解析数学讲义

（第三卷，解析函数论）

（法）古尔萨（Goursat Edvard）　著

王尚济　译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

解析数学讲义

（第三卷，解析函数论）

（法）古尔萨（Goursat Edvard） 著

王尚济 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本套书是一部世界数学的名著，共分三卷，该书为第三卷，主要介绍了解析函数论等相关内容，同时配以相应的习题，以供读者更好的理解.

本书适合大中学师生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

解析数学讲义. 第三卷，解析函数论/(法)古尔萨(Goursat Edvard)著；王尚济译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.4

ISBN 978-7-5603-5148-3

Ⅰ.①解… Ⅱ.①古…②王… Ⅲ.①解析函数-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 038432 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　杜莹雪
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　牡丹江邮电印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 23.75　字数 247 千字
版　　次　2019 年 4 月第 1 版　2019 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5148-3
定　　价　78.00 元

原書第二册第四版序

此版和前版沒有重要的改變.在第十六章關於解析函數論的幾個命題我增加若干節,都是現代的幾何學者的創作.這些定理現在已幾成為學校式的(Classique),我以為在一個解析講義中應有牠們的位置.此册之末,關於解析函數的敘列有一個附記,在其中我簡約的敘明關於這個問題在科學上所得的重要結果.

我甚愉快的再致謝爾內高斯他繼續助我校對.

一千九百二十四年十二月二十二日,

古爾薩

例　言

（一）　此册是古爾薩氏原書第二册的前半,卽關於解析函數部分.係據原書第五版(1929)譯出.

（二）　此册之末附有勘誤表,頗有關係重要之點,請閱者依表改正,庶免誤會.

（三）　原書有大小兩種字體,示閱者在第一次讀此書時可以略去小字部分,註解及習題亦均用小字;現在譯本對於原文係用小字部分一律加框以別之.

（四）　原書凡令人注意之處均用斜字體;現在譯本則加横線於每字之下.

（五）　所有專門名詞均於首見時兼書法文原名於譯名之下,然亦有於再見三見時仍兼書原名者.

（六）　爲印刷之便,將每頁下所有註解均移於每章之末加〔註一〕,〔註二〕,…等號以便檢查.

（七）　此册的校對者仍爲杜宏遠君和第一册同.

民國二十年八月譯者誌.

目錄

第十三章

一個複變數的普通函數

第十四章

解析函數的一般理論.高失的方法.

第十五章

單値函數

第十六章

解析延長

第十七章

多變數的解析函數

解析數學講義

第十三章

一個複變數的普通函數

1.—概論.—單義函數

255. 定義.— 凡一個算式形狀是 $a+bi$ 就叫作虛數量(quantité imaginaire)或複數量(quantité complexe),a及b是兩個任何實數,i是在代數學上爲普偏起見所加入的一個特別記號.實際上,一個複數量只是一組的兩個實數量依某一個次序排列.$a+bi$這麼樣的一個算式雖然牠的自身毫無具體的意義,但是我們適宜的應用代數運算的通常定規,並且到處將平方i^2代以-1.

兩個虛數量$a+bi$及$a'+b'i$若$a'=a$, $b'=b$就說是相等.兩個虛數量$a+bi$及$c+di$的和是一個形狀相同的記號$a+c+i(b+d)$.同樣,差數$a+bi-(c+di)$等於$a-c+i(b-d)$.欲得$a+bi$及$c+di$的積,即適用代數乘法的通常定規,並且用-1代i^2,得

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+i(ad+bc).$$

$a+bi$及$c+di$的商是一個第三虛數$x+yi$,牠的性質是若是用$c+di$乘即復得$a+bi$.依乘法的定規,等式

$$a+bi=(c+di)(x+yi)$$

同值於兩個關係式

$$cx-dy=a,\quad dx+cy=b,$$

由此取得

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

$a+bi$及$c+di$的商爲一個代數分數的普通記法所表,可寫爲

$$x+yi=\frac{a+bi}{c+di};$$

爲便於計算x及y,只須將此分數的兩項各乘以$c-di$,再展開這兩個積.

代數學的基本運算的一切性質都能推廣到虛數記號的運算上;設$A, B, C, \cdots$表虛數記號,我們有

$$A\cdot B=B\cdot A,\ A\cdot B\cdot C=A\cdot(B\cdot C),\ A(B+C)=AB+AC,\cdots,$$

餘仿此.

兩個虛數$a+bi$及$a-bi$叫作<u>共軛虛數</u>(imaginaires conjuguées).兩個虛數$a+bi$及$-a-bi$叫作<u>相反</u>(opposées)或<u>對稱</u>(symetriques).

在一個平面中已知一系的兩個直交坐標軸,牠們的位置法(disposition)即通用的位置法,虛數量$a+bi$表以xoy平面中一點M,牠的坐標是$x=a$, $y=b$.如此,卽使一個純粹記號的式子有了一個具體的意義,於是凡對於虛數量所成立的命題都相應於平面幾何上一個定理.然而這個表明法的最大利益在以後尤爲顯著.凡實數量都相應在ox軸的各點上,因爲這個理由,所以這個軸叫作<u>實軸</u>(*axe* reel).兩個共軛虛數,$a+bi$及$a-bi$相應於關於ox爲對稱的兩點;兩個相反量$a+bi$及$-a-bi$爲關於o點的兩個對稱點所表.

和M點(a,b)相應的虛數量$a+bi$有時也叫作此點的<u>表明量</u>(affixe).

解析數學講義

若沒有別的窒礙時,我們用同一文字表一個虛數量及牠的表明點.

我們連結原點 o 到 m 點,牠的坐標是 (a,b). 距離 Om 叫作 $a+bi$ 的<u>模</u>(module), 一個半直線先合於 Ox 再來合於 Om 時所旋轉的角(這個角的數法是自 ox 向 oy 和在三角學上相同)叫作 $a+bi$ 的<u>模角</u>(argument)設 ρ 及 ω 是 $a+bi$ 的模及模角;在此等實數量 a, b, ρ, ω 間有兩個關係式 $a=\rho\cos\omega$,$b=\rho\sin\omega$, 由此取得

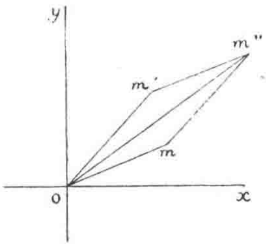
$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\omega=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

虛數的模顯然爲一個正數,牠是確定的毫無疑義,至於模角,牠只爲牠的三角線所顯明,除相差一個 2π 的倍數不計外是確定的,况且由牠的定義上這一層至爲明瞭.所以凡一個虛數量都有無量數的模角成爲一個算術級數,公差是 2π. 若要兩個虛數量相等,牠們的模當相等,又必須牠們的模角相差爲 2π 的一個倍數;這些條件並且是充足的.一個虛數量 z 的模表以 $|z|$, 和一個實數量的絕對值的記法相同.

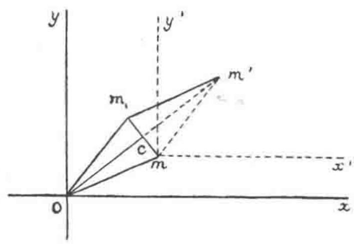
設 $z=a+bi$, $z'=a'+b'i$ 是兩個虛數量, m,m' 是兩個相應點;和數 $z+z'$ 表以一點 m'', 牠是在 Om 及 Om' 上所建的平行四邊形的頂點.三角形 Omm''(圖四十三)的三邊各等於虛數量 z,z',$z+z'$ 的模.因此决定<u>兩個虛數量的和的模小於或至多等於兩項的模的和,然大於或至少等於牠們的差</u>.最後,同一方法可見任有若干個虛數量的和的模至多等於牠們的模的和.若要實現這個等式,必須這些量的表明點都在由原點所出的一個半直線上.

若自 m 點引兩個直線 mx', my' 平行於 ox 及 oy, 在此系的坐標軸內, m' 點的坐標是 $a'-a$ 及 $b'-b$ (圖四十四). 所以 m' 點在

圖四十三



圖四十四



此新系中表 $z'-z$; $z'-z$ 的模等於長度 mm',牠的模角 θ 等於方向 mm' 和 mx' 所作的角.由 o 點引線分 om_1 等於且平行於線分 mm';此線分的頂點 m_1 在坐標系 ox, oy 內表 $z'-z$.然而圖形 $Omm'm_1$ 是一個平行四邊形;所以 m_1 點是 m 點關於 Om' 的中點 c 的對稱點.

我們再述明一個公式牠給與任有若干因子的積的模及模角.設

$$z_k=\rho_k(\cos\omega_k+i\sin\omega_k)\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

是這些因子;依乘法的定規三角線的加法的公式給與我們這個積數

$$z_1z_2\cdots z_n=\rho_1\rho_2\cdots\rho_n[\cos(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)+i\sin(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)],$$

這表明積數的模等於各因子的模的積,積數的模角等於各因子的模角的和.由此不難得到馬弗耳(Moivre)的著名公式

$$\cos m\omega+i\sin m\omega=(\cos\omega+i\sin\omega)^m,$$

牠包有圓函數的乘法的一切公式為一個極其密緻的形狀.

虛數量的記號的加入給代數方程式論一個普遍性及一個完全對稱性.這是關於二次方程式這些式子最初發現.在解析學