

解析数学讲义

(第三卷, 解析函数论)

(法) 古尔萨(Goursat Edvard) 著

王尚洛 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



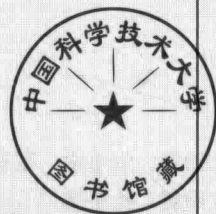
解析数学讲义

(第三卷, 解析函数论)



(法)古尔萨(Goursat Edvard) 著

王尚济 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本套书是一部世界数学的名著,共分三卷,该书为第三卷,主要介绍了解析函数论等相关内容,同时配以相应的习题,以供读者更好的理解.

本书适合大中学师生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

解析数学讲义.第三卷,解析函数论/(法)古尔萨(Goursat Edvard)著;王尚济译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.4

ISBN 978-7-5603-5148-3

I. ①解… II. ①古…②王… III. ①解析函数-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 038432 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 23.75 字数 247 千字

版 次 2019 年 4 月第 1 版 2019 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5148-3

定 价 78.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

原書第二冊第四版序

此版和前版沒有重要的改變。在第十六章關於解析函數論的幾個命題我增加若干節，都是現代的幾何學者的創作。這些定理現在已幾成爲學校式的(Classique)，我以爲在一個解析講義中應有牠們的位置。此冊之末，關於解析函數的叙列有一個附記，在其中我簡約的叙明關於這個問題在科學上所得的重要結果。

我甚愉快的再致謝爾內高斯他繼續助我校對。

一千九百二十四年十二月二十二日，

古爾薩



例 言

(一) 此冊是古爾薩氏原書第二冊的前半,即關於解析函數部分,係據原書第五版(1929)譯出。

(二) 此冊之末附有勘誤表,頗有關係重要之點,請閱者依表改正,庶免誤會。

(三) 原書有大小兩種字體,示閱者在第一次讀此書時可以略去小字部分,註解及習題亦均用小字,現在譯本對於原文係用小字部分一律加框以別之。

(四) 原書凡令人注意之處均用斜字體;現在譯本則加橫線於每字之下。

(五) 所有專門名詞均於首見時兼書法文原名於譯名之下,然亦有於再見三見時仍兼書原名者。

(六) 爲印刷之便,將每頁下所有註解均移於每章之末加[註一],[註二],…等號以便檢查。

(七) 此冊的校對者仍爲杜宏遠君和第一冊同。

民國二十年八月譯者誌。

目 錄

第 十 三 章

一 個 複 變 數 的 普 通 函 數

I.	概論.—單義函數 (fonction monogène).....	1
	255. 定義.....	1
	256. 一個複變數的連續函數.....	5
	257. 單義函數.....	6
	258. 整式函數 (fonction holomorphe).....	9
	259. 有理函數.....	11
	260. 幾個無理函數的研究.....	12
	261. 單值函數 (fonction uniforme).....	16
II.	虛數項的整級數.普通超越函數.....	18
	262. 收斂圓 (cercle de convergence).....	18
	263. 級數的級數.....	22
	264. 一個無限積展開為一個整級數.....	23
	265. 指函數 (fonction exponentielle).....	25
	266. 圓函數.....	28
	267. 對數.....	30
	268. 反函數: arcsinz, arctangz.....	32
	269. 關於積分的應用.....	35
	270. $\sin z$ 及 $\cos z$ 的有理函數的分解.....	37

271. $\text{Log}(1+z)$ 的展開式.....	41
272. 二項式公式的擴張.....	43
III. 平面上的同形表示法(representation conforme).....	
273. 導來式的幾何意義.....	46
274. <u>黎曼</u> (Riemann)的定理.....	51
275. 等熱線(courbes isothermes).....	54
習題.....	56
註.....	61

第 十 四 章

解 析 函 數 的 一 般 理 論 高 失 的 方 法 .

I. 取在虛數極限間的有定積分.....	63
276. 定義及概論.....	63
277. 變數更換法.....	65
278. <u>危伊特拉新</u> (Weierstrass)及 <u>達爾布</u> (Darboux)的公式.....	67
279. 沿一個閉圍線上的積分.....	69
280. 關於證明法所須假定的考慮.....	72
281. 定理的擴張.....	73
282. 積分的公式的推廣.....	75
283. 以上的結果的另—證法.....	77
II. <u>高失</u> 的積分.— <u>戴勞</u> 的級數及 <u>羅耶</u> 的級數.— 奇點.—餘數.....	79
284. 基本公式.....	79

285.	牟拉 (Morera) 的定理.....	82
286.	戴勞的級數	83
287.	劉微爾 (Liouville) 的定理.....	86
288.	羅郎 (Laurent) 的級數.....	86
289.	各種級數	90
290.	危伊特拉斯的定理	94
291.	極 (pôle)	95
292.	分式函數 (fonction méromorphe).....	97
293.	顯著奇點 (point singulier essentiel)	98
294.	餘數 (résidu)	101
III 普通定理的應用		
295.	各種注意.....	103
296.	普通有定積分的計算.....	103
297.	各種的有定積分	105
298.	$\Gamma(p)\Gamma(1-p)$ 的計算法.....	109
299.	關於分式函數的應用.....	110
300.	關於方程式論的應用.....	112
301.	讓桑 (Zensen) 的公式.....	114
302.	拉格郎熱的公式	116
303.	一個函數在變數無限大時的研究.....	120
IV. 有定積分的週期		
304.	極週期 (période polaire)	123
305.	積分 $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ 的研究	126
306.	過橢圓積分 (intégrale ultra-elliptique) 的週期.....	127

307. 第一類橢圓積分的週期·····	132
習題·····	135
註·····	147

第 十 五 章

單 值 函 數

I.	<u>危伊特拉斯</u> 的一次因數, <u>密達勒福來</u> 的定理·····	151
	308. 一個整函數的算式化爲一次因數的積·····	151
	309. 一個整函數的類 (genre)·····	156
	310. 具有有限數的奇點的單值函數·····	156
	311. 具有一個無量數的奇點的單值函數·····	158
	312. <u>密達勒福來</u> 的定理·····	158
	313. 幾個特別場合的研究·····	161
	314. <u>高失</u> 的方法·····	164
	315. $\cot x$ 及 $\sin x$ 的展開式·····	167
II.	<u>雙週期函數</u> , <u>橢圓函數</u> ·····	171
	316. 週期函數展開爲級數·····	171
	317. 具有三個週期的單值函數的不可能性·····	173
	318. 雙週期函數·····	176
	319. 橢圓函數一般通性·····	177
	320. 函數 Pu ·····	182
	321. Pu 及 $P'u$ 間的代數關係式·····	186
	322. 函數 ζu ·····	188

323.	函數 ϕu	190
324.	橢圓函數的一般算式.....	192
325.	加法公式.....	195
326.	橢圓函數的積分.....	197
327.	函數 θ	200
III.	反函數,第一類曲線.....	204
328.	週期及不變式的關係.....	204
329.	第一類橢圓積分的反函數(fonction inverse).....	206
330.	Pu 爲不變式的函數的新定法.....	215
331.	對於立方平曲線的應用.....	218
332.	反函數的普通公式.....	222
333.	第一類的曲線.....	225
	習題.....	229
	註.....	232

第十六章

解析延長

I.	解析函數爲牠的一個原素所定.....	334
334.	解析延長 (prolongement analytique) 的最初觀念.....	234
335.	解析延數的新定法.....	237
336.	奇點.....	242
337.	一般問題.....	244
II.	解析延長的多種方法.....	246

338.	變數更換法.....	246
339.	部分叙列 (suite partielle).....	250
340.	變為一個積分	252
341.	<u>哈達馬</u> 的定理	256
342.	<u>密達勒福來</u> 的定理	258
343.	<u>班樂衡</u> 的定理	260
III.	缺陷空間 (espaces lacunaires)	262
344.	奇異線,缺陷空間	262
345.	例	265
346.	解析算式的奇異性	268
347.	<u>赫爾彌特</u> 的公式	270
	習題	273
	註.....	275

第十七章

多變數的解析函數

I.	一般通性	280
348.	定義	280
349.	收斂圓的會合	281
350.	二重積分	283
351.	<u>高夫</u> 的定理的擴張	286
352.	有定積分所表的函數.....	288
353.	關於函數 Γ 的應用	291

解析數學講義

354.	兩個變數的函數的解析延長	293
II.	陰函數.代函數	295
355.	<u>危伊特拉斯</u> 的定理	295
356.	難點 (point critique)	300
357.	代函數	303
358.	<u>阿伯爾</u> 積分 (intégrale abélienne)	307
359.	<u>阿伯爾</u> 的定理	308
360.	關於過橢圓積分的應用	311
361.	<u>拉格郎熱</u> 的公式的擴張	315
	習題	317
	註	318
	編輯手記	320

解析數學講義

第十三章

一個複變數的普通函數

1. — 概論。— 單義函數

255. 定義。— 凡一個算式形狀是 $a+bi$ 就叫作虛數量 (quantité imaginaire) 或 複數量 (quantité complexe), a 及 b 是兩個任何實數, i 是在代數學上為普遍起見所加入的一個特別記號。實際上, 一個複數量只是一組的兩個實數量依某一個次序排列, $a+bi$ 這麼樣的一個算式雖然牠的自身毫無具體的意義, 但是我們適宜的應用代數運算的通常定規, 並且到處將平方 i^2 代以 -1 。

兩個虛數量 $a+bi$ 及 $a'+b'i$ 若 $a'=a$, $b'=b$ 就說是相等。兩個虛數量 $a+bi$ 及 $c+di$ 的和是一個形狀相同的記號 $a+c+i(b+d)$ 。同樣, 差數 $a+bi-(c+di)$ 等於 $a-c+i(b-d)$ 。欲得 $a+bi$ 及 $c+di$ 的積, 即適用代數乘法的通常定規, 並且用 -1 代 i^2 , 得

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + i(ad+bc).$$

$a+bi$ 及 $c+di$ 的商是一個第三虛數 $x+yi$, 牠的性質是若是用 $c+di$ 乘即復得 $a+bi$ 。依乘法的定規, 等式

$$a+bi = (c+di)(x+yi)$$

同值於兩個關係式

$$cx - dy = a, \quad dx + cy = b,$$

由此取得

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

$a + bi$ 及 $c + di$ 的商為一個代數分數的普通記法所表, 可寫為

$$x + yi = \frac{a + bi}{c + di};$$

為便於計算 x 及 y , 只須將此分數的兩項各乘以 $c - di$, 再展開這兩個積。

代數學的基本運算的一切性質都能推廣到虛數記號的運算上; 設 A, B, C, \dots 表虛數記號, 我們有

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \quad A(B + C) = AB + AC, \dots,$$

餘仿此。

兩個虛數 $a + bi$ 及 $a - bi$ 叫作 共軛虛數 (imaginaires conjuguées)。兩個虛數 $a + bi$ 及 $-a - bi$ 叫作 相反 (opposées) 或 對稱 (symétriques)。

在一個平面中已知一系的兩個直交坐標軸, 牠們的位置法 (disposition) 即通用的位置法, 虛數量 $a + bi$ 表以 xoy 平面中一點 M , 牠的坐標是 $x = a, y = b$, 如此, 即使一個純粹記號的式子有了一個具體的意義, 於是凡對於虛數量所成立的命題都相應於平面幾何上一個定理, 然而這個表明法的最大利益在以後尤為顯著, 凡實數量都相應在 ox 軸的各點上, 因為這個理由, 所以這個軸叫作 實軸 (axe réel)。兩個共軛虛數, $a + bi$ 及 $a - bi$ 相應於關於 ox 為對稱的兩點; 兩個相反量 $a + bi$ 及 $-a - bi$ 為關於 o 點的兩個對稱點所表。

和 M 點 (a, b) 相應的虛數量 $a + bi$ 有時也叫作此點的 表明量 (affixe)。

若沒有別的窒礙時,我們用同一文字表一個虛數量及牠的表明點。

我們連結原點 o 到 m 點,牠的坐標是 (a,b) , 距離 Om 叫作 $a+bi$ 的模(module), 一個半直線先合於 Ox 再來合於 Om 時所旋轉的角(這個角的數法是自 ox 向 oy 和在三角學上相同)叫作 $a+bi$ 的模角(argument) 設 ρ 及 ω 是 $a+bi$ 的模及模角;在此等實數量 a, b, ρ, ω 間有兩個關係式 $a = \rho \cos \omega, b = \rho \sin \omega$, 由此取得

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \omega = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

虛數的模顯然為一個正數,牠是確定的毫無疑義,至於模角,牠只為牠的三角線所顯明,除相差一個 2π 的倍數不計外是確定的,況且由牠的定義上這一層至為明瞭,所以凡一個虛數量都有無量數的模角成為一個算術級數,公差是 2π 。若要兩個虛數量相等,牠們的模當相等,又必須牠們的模角相差為 2π 的一個倍數;這些條件並且是充足的,一個虛數量 z 的模表以 $|z|$, 和一個實數量的絕對值的記法相同。

設 $z = a+bi, z' = a'+b'i$ 是兩個虛數量, m, m' 是兩個相應點;和數 $z+z'$ 表以一點 m'' , 牠是在 Om 及 Om' 上所建的平行四邊形的頂點,三角形 Omm'' (圖四十三)的三邊各等於虛數量 $z, z', z+z'$ 的模,因此決定兩個虛數量的和的模小於或至多等於兩項的模的和,然大於或至少等於牠們的差,最後,同一方法可見任有若干個虛數量的和的模至多等於牠們的模的和,若要實現這個等式,必須這些量的表明點都在由原點所出的一個半直線上。

若自 m 點引兩個直線 mx', my' 平行於 ox 及 oy , 在此系的坐標軸內, m' 點的坐標是 $a'-a$ 及 $b'-b$ (圖四十四), 所以 m' 點在

解 析 數 學 講 義

圖 四 十 三

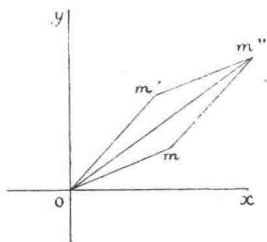
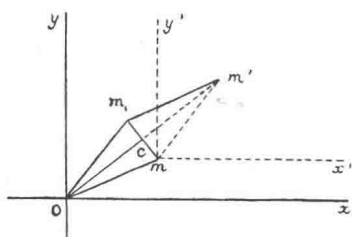


圖 四 十 四



此新系中表 $z' - z$, $z' - z$ 的模等於長度 $m m'$, 牠的模角 θ 等於方向 $m m'$ 和 $m x'$ 所作的角, 由 o 點引線分 $o m_1$ 等於且平行於線分 $m m'$; 此線分的頂點 m_1 在坐標系 $o x, o y$ 內表 $z' - z$. 然而圖形 $O m m' m_1$ 是一個平行四邊形; 所以 m_1 點是 m 點關於 $O m'$ 的中點 c 的對稱點.

我們再述明一個公式牠給與任有若干因子的積的模及模角, 設

$$z_k = \rho_k (\cos \omega_k + i \sin \omega_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

是這些因子; 依乘法的定規三角線的加法的公式給與我們這個積數

$$z_1 z_2 \dots z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\cos (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) + i \sin (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)],$$

這表明積數的模等於各因子的模的積, 積數的模角等於各因子的模角的和, 由此不難得到馬弗耳 (Moivre) 的著名公式

$$\cos m \omega + i \sin m \omega = (\cos \omega + i \sin \omega)^m,$$

牠包有圓函數的乘法的一切公式為一個極其密緻的形狀.

虛數量的記號的加入給代數方程式論一個普遍性及一個完全對稱性, 這是關於二次方程式這些式子最初發現, 在解析學