

高等院校数学教材同步辅导及考研用书

线性代数

高教版（第六版）同济大学编

习题精解及考研辅导

（第3版）

周华任 等编

知识结构分析

典型方法归纳

各种题型集成

课后习题精解

考研真题精选

打磨能力训练

成就考试考研



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等院校数学教材同步辅导及考研用书

线性代数习题精解及考研辅导

(第3版)

高教版《工程数学线性代数(第六版)》(同济大学数学系编)

周华任 等编

东南大学出版社

• 南京 •

内 容 简 介

本书是高等教育出版社的《工程数学线性代数(第六版)》(同济大学数学系编)的辅导教材,包括了知识逻辑结构图,学习目的要求,基本内容提要,解题方法归纳,课后习题精解,考研真题精选等部分,分析了考试的热点以及出题的角度和重点考查的知识点,加强了知识的应用性和针对性。本书题目丰富,难度适中,以研究生入学考试的题目难度标准选题,循序渐进,在笔者的课程教学和考研辅导中都取得了很好的效果。

本书可作为工科、经管等各专业学习线性代数课程的参考书,也可供报考硕士研究生的读者使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题精解及考研辅导 / 周华任等编. —3
版. —南京:东南大学出版社, 2018. 8
高等院校数学教材同步辅导及考研用书
ISBN 978-7-5641-7957-1

I. ①线… II. ①周… III. ①线性代数—高等学校—
教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 194426 号

线性代数习题精解及考研辅导(第 3 版)

编 者 周华任等
责任编辑 宋华莉
编辑邮箱 52145104@qq.com
出版发行 东南大学出版社
出 版 人 江建中
社 址 南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
网 址 <http://www.seupress.com>
电子邮箱 press@seupress.com
印 刷 兴化印刷有限责任公司
开 本 700 mm×1 000 mm 1/16
印 张 18.25
字 数 510 千字
版 印 次 2018 年 8 月第 3 版 2018 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5641-7957-1
定 价 46.00 元
经 销 全国各地新华书店
发行热线 025-83790519 83791830

(本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830)

第3版前言

本书是高等教育出版社的《工程数学线性代数(第六版)》(同济大学数学系编)的辅导教材。

这一版我们对本书第1版、第2版中的一些疏漏和不妥之处作了修改,根据新版把相关内容作了调整,增加了2015—2018年全国硕士研究生入学考试数学一、数学二和数学三的真题。

本书第3版修订由周华任、庞秀梅、顾秀松、徐兵、徐为、陈蓓、寇冰煜、汪鹏完成,新版中存在的问题,继续欢迎广大专家、同仁和读者给予批评指正。

作者

2018年6月

第2版前言

这一版我们对本书第1版中的一些疏漏和不妥之处作了修改,增加了2013年和2014年全国硕士研究生入学考试数学一、数学二和数学三的真题。

书中不足之处,诚恳地希望读者批评指正。

作者

2014年1月

第1版前言

本书是高等教育出版社的《工程数学线性代数(第五版)》(同济大学数学系编)的辅导教材,由以下几个部分组成:

1. 知识逻辑结构图:把本章的主要知识点用图解的方式表达出来。
2. 学习目的要求:根据考试及考研要求提炼每章学习要求,使读者学习时一目了然。
3. 基本内容提要:列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式,突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。
4. 解题方法归纳:归纳了线性代数这门课程中常见的题型和解题方法技巧,便于读者建立系统的应用知识的能力架构,提高学习的效率。
5. 课后习题精解:教材中课后习题丰富、层次多,许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论,因此我们对课后全部习题给出了详细的解答。由于有些题目解题方法多种多样,大多数习题我们只给出了一种参考解答,其他方法留给读者自己去思考。
6. 考研真题精选:精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的解答,这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强,可以使广大同学举一反三,触类旁通,开拓解题思路,更好地掌握线性代数的基本内容和解题方法。

本书由周华任、钱岳红、蔡开华、陈玉金、刘硕松、李喜波、卢刚、任宝龙编写,由于作者的水平有限,书中的疏漏之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

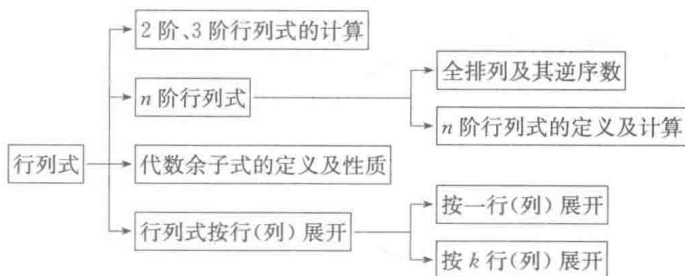
目 录

第一章 行列式	1
知识逻辑结构图	1
学习目的要求	1
基本内容提要	1
解题方法归纳	3
课后习题精解	16
考研真题精选	26
第二章 矩阵及其运算	32
知识逻辑结构图	32
学习目的要求	32
基本内容提要	32
解题方法归纳	35
课后习题精解	46
考研真题精选	61
第三章 矩阵的初等变换与线性方程组	69
知识逻辑结构图	69
学习目的要求	69
基本内容提要	69
解题方法归纳	71
课后习题精解	83
考研真题精选	97
第四章 向量组的线性相关性	108
知识逻辑结构图	108
学习目的要求	108
基本内容提要	108
解题方法归纳	110
课后习题精解	123
考研真题精选	143
第五章 相似矩阵及二次型	167
知识逻辑结构图	167

学习目的要求	167
基本内容提要	167
解题方法归纳	170
课后习题精解	189
考研真题精选	217
第六章 线性空间与线性变换	242
知识逻辑结构图	242
学习目的要求	242
基本内容提要	242
解题方法归纳	244
课后习题精解	250
考研真题精选	257
综合测试题(一)	260
综合测试题(二)	265
综合测试题(三)	270
综合测试题(四)	277

第一章 | 行列式

知识逻辑结构图



学习目的要求

- (1) 掌握对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式。
- (2) 掌握 n 阶行列式的定义及性质。
- (3) 了解余子式的概念,掌握代数余子式的定义及性质。
- (4) 掌握行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式。

基本内容提要

1. 全排列及其逆序数

- (1) 全排列:把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列。
- (2) 逆序和逆序数:在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s)$ 中,若一对数的前后位置与大小顺序相反,则称这两个数组成一个逆序。

一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数,记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 。若 τ 为奇数,则称 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为奇排列;若 τ 为偶数,则称此排列为偶排列。

2. n 阶行列式的定义

- (1) 定义: n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中, $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, τ 为这个排列的逆序数, 求和符号 $\sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是对所有排列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 求和。

n 阶行列式 D 中所含 n^2 个数叫做 D 的元素, a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的元素。

- (2) 2 阶和 3 阶行列式还适用对角线法则。
- (3) 由 n 阶行列式的定义可得到一些特殊行列式的值。

① 上、下三角行列式等于主对角线上的元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

② 对角行列式等于对角线元素之积,即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

③ 次对角线行列式的值为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

3. 行列式的性质

(1) 行列式 D 和它的转置行列式 D^T 的值相等.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式改变符号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k ,等于用这个数 k 乘以此行列式,即行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 若行列式的某一行(行)的元素都是两数之和,则

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(5) 把行列式的某一行(行)的各元素乘以同一个数然后加到另一行(行)对应的元素上,行列式的值不变.

4. 行列式按行(列)展开

(1) 代数余子式:把 n 阶行列式元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $(n-1)$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} . $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 外都为 0,则该行行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即 $D = a_{ij}A_{ij}$.

(3) 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即行列式按行(列)展开法则:

按第 i 行展开,有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

按第 j 列展开,有

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

(4) 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j$$

(5) 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

5. 拉普拉斯定理

(1) 位于 n 阶行列式的第 $i_1, \cdots, i_k$ 行及第 $j_1, \cdots, j_k$ 列 ($1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$) 交叉位置上的元素, 按原来相对位置所构成的 k 阶行列式 D_1 称为 D 的一个 k 阶子式, 不在这 k 行 k 列上的元素, 按原来相对位置所构成的 $(n-k)$ 阶子式 D_2 叫做 D_1 的余子式, 而称 $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} D_2$ 为 D_1 的代数余子式.

(2) 拉普拉斯定理: 任意取定 n 阶行列式的某 k 行(列), 位于这 k 行(列)中的 k 阶子式共有 C_n^k 个, 则这 C_n^k 个子式与其相应的代数余子式乘积的和等于 D .

解题方法归纳



题型 1 计算排列的逆序数

计算逆序数的方法: 看有多少个比 1 大的数码排在 1 的前面, 设为 m_1 个, 那么就有 m_1 个数码与 1 构成逆序; 然后把 1 划去, 再看有多少个比 2 大的数码排在 2 前面, 设有 m_2 个, 那么就有 m_2 个数码与 2 构成逆序, 再把 2 划去. 依此类推, 最后设在 n 前面有 m_n 个数码 (显然 $m_n = 0$), 那么这个排列的逆序数为 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

例 1 求下列排列的逆序数.

(1) 1347265; (2) $n(n-1)\cdots 21$.

解: (1) $\tau(1347265) = 0 + 3 + 0 + 0 + 2 + 1 = 6$.

(2) $\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

例 2 选择 i 和 k , 使: (1) 12564897 成奇排列; (2) 127435689 成偶排列.

解: (1) 由题意, i, k 只有两种选择: $i = 3, k = 6$ 或 $i = 6, k = 3$. 一般取小数在先, 大数在后, 如果符合要求即为所求, 否则后一种情况符合要求.

而 $\tau(132564897) = 5$, 即为所求, 故 $i = 3, k = 6$.

(2) 由题意: $i = 3, k = 8$ 或 $i = 8, k = 3$.

而 $\tau(127435689) = 5$, 则 $i = 8, k = 3$.

题型 2 利用行列式性质进行行列式计算

方法 利用性质将行列式化为上(或下)三角行列式以及利用其他性质计算(如提取公因式、逐行或列相加减等).

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解: 将第 2, 3, $\cdots$, n 行加到第 1 行, 得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

再将第 1 行的 $-a$ 倍加到第 2, 3, $\cdots$, n 行, 有

$$D_n = (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

例 4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解: 由于 D 的主对角线及第 1 行与第 1 列元素非 0, 其余元素为 0, 把第 2 行的 $(-\frac{1}{2})$ 倍, 第 3 行的 $(-\frac{1}{3})$ 倍, $\cdots$, 第 n 行的 $(-\frac{1}{n})$ 倍都加到第 1 行上, 使 D 化成下三角行列式, 得

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n! \left(1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right)$$

例 5 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

解: 利用逐行(列)相加减的技巧将该行列式化为三角行列式, 即有

$$D \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

例 6 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

解: 所有行(列)对应元素相加后相等的行列式, 可把所有行(列)加到第 1 行(或第 1 列), 提取公因子后再化简计算. 该行列式所有列对应元素相加后均为 $b + \sum_{i=1}^n a_i$, 将第 2 列至第 n 列对应元素加到第 1 列, 然后提出公因子 $(b + \sum_{i=1}^n a_i)$, 有

$$D_n = \begin{vmatrix} b + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b + \sum_{i=1}^n a_i & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = (b + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

再将第 1 行乘 (-1) 加到其余各行, 得

$$D_n = (b + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (b + \sum_{i=1}^n a_i) b^{n-1}$$

例 7 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解: 这是一个“爪”型行列式, 通常提取公因式化为三角行列式. 从第 i 行提出 a_{i-1} ($i = 2, 3, \dots, n+1$), 得

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

再将第 2 行的 (-1) 倍, $\cdots$, 第 n 行的 (-1) 倍加到第 1 行, 得

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$$

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$.

解: 利用行列式性质直接将它化成“爪”型行列式. 第 2 行, 第 3 行, $\cdots$, 第 n 行分别减去第 1 行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

将第 i 行分别提出因子 $a_i (i=2, \cdots, n)$, 得

$$D_n = a_2 a_3 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\frac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_1}{a_{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

将第 1 行分别减去第 2 行,第 3 行, ..., 第 n 行,得

$$\begin{aligned}
 D_n &= a_2 a_3 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 + a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_2 a_3 \cdots a_n \left(1 + a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_1}{a_i} \right) \\
 &= a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)
 \end{aligned}$$



题型 3 利用行列式按行(列)展开定理

方法 当行列式的某一行(列)中的零元素较多时才能显出展开定理的优势,所以往往先利用行列式性质使行列式的某一行(列)出现较多的零元素,然后再利用定理.

例 9 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1+x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解: 行列式中各行元素之和都相等,可先把各列的每一个元素都加到第 1 列,则有

$$\begin{aligned}
 D &\xrightarrow{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3 \\ c_1+c_4}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}} x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第 1 列展开}} x \begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^4
 \end{aligned}$$

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解: 利用行列式的性质,将第 1 行的 (-1) 倍加到第 $i (i = 2, 3, \cdots, n)$ 行上去,则

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^{n-1}$$

例 11 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

解: 由于第 2, 3, $\cdots$, n 行的元素的和都是零, 将第 2, 3, $\cdots$, n 列都加到第 1 列上, 有

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} (n+1)!$$

例 12 计算下列 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解: 按第 1 行展开, 得

$$D_n = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= a^n + (-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} \\
 &= a^n + (-1)^{2n+1} a^{n-2} = a^n - a^{n-2}
 \end{aligned}$$



题型 4 代数余子式的计算

方法 由行列式展开定理可知行列式

$$D_n = |a_{ij}| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \begin{cases} D_n, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

也可将展开定理反过来使用,即已知行列式 $D = |a_{ij}|$ 及其元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 和任意 n 个数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 求和式 $\sum_{j=1}^n k_j A_{ij}$ 或 $\sum_{i=1}^n k_i A_{ij}$, 可将某些低阶行列式(代数余子式或余子式)的计算转化为高阶行列式计算更为方便.

例 13 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, 求 $3A_{12} + 7A_{22} + 4A_{32} + 8A_{42}$, 其中 $A_{i2} (i=1, 2, 3, 4)$ 为 D 中

元素 a_{i2} 的代数余子式.

解: 方法 1 因为 A_{i2} 为 D 中元素 a_{i2} 的代数余子式 ($i=1, 2, 3, 4$), 故将 D 中第 2 列元素依次换为 3, 7, 4, 8, 即得

$$3A_{12} + 7A_{22} + 4A_{32} + 8A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

方法 2 因 3, 7, 4, 8 恰为 D 中第 3 列元素, 而 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$ 为 D 中第 2 列元素的代数余子式, 故 $3A_{12} + 7A_{22} + 4A_{32} + 8A_{42}$ 表示 D 中第 3 列元素与第 2 列的对应元素的代数余子式乘积的和, 则 $3A_{12} + 7A_{22} + 4A_{32} + 8A_{42} = 0$.

例 14 已知 5 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

求 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 和 $A_{44} + A_{45}$, 其中 $A_{ij} (j=1, 2, 3, 4, 5)$ 为 D 中第 4 行第 j 列元素的代数余子式.

解: 可以通过代数余子式的定义求, 也可以通过观察发现利用第 2 行和第 4 行.

$$\begin{cases} (1 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 1 \cdot A_{43}) + (2A_{44} + 2A_{45}) = 27 \\ (2A_{41} + 2A_{42} + 2A_{43}) + (1 \cdot A_{44} + 1 \cdot A_{45}) = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (A_{41} + A_{42} + A_{43}) + 2(A_{44} + A_{45}) = 27 \\ 2(A_{41} + A_{42} + A_{43}) + (A_{44} + A_{45}) = 0 \end{cases}$$