数学分析习题课讲义

（第2版）（上册）

谢惠民　恽自求　易法槐　钱定边　编

高等教育出版社

数学分析习题课讲义

（第2版）（上册）

谢惠民 恽自求 易法槐 钱定边 编

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是教育部“国家理科基地创建名牌课程项目”的研究成果，其目的是为数学分析的习题课教学提供一套有创新特色的教材和参考书.

本书以编者们20多年来在数学分析及其习题课方面的教学经验为基础，吸取了国内外多种教材和研究性论著中的大量成果，非常注意经典教学内容中的思想、方法和技巧的开拓和延伸，在例题的讲解中强调启发式和逐步深入，在习题的选取上致力于对传统内容的更新、补充与层次化. 本次修订对第1版的基本框架 (指章、节和小节) 和主要内容 (指命题、例题、练习题和参考题) 基本上不做改动，但对书中的一些证明、解法和注释等做了多处改进；对部分较难的参考题的提示做了改写.

本书分上、下两册出版. 上册内容为极限理论和一元微积分，下册内容为无穷级数和多元微积分.

本书可作为高等学校理工科教师和学生在数学分析习题课方面的教材或参考书，也可以作为全国硕士研究生入学统一考试和其他人员的数学分析辅导书.

图书在版编目（CIP）数据

数学分析习题课讲义. 上册 / 谢惠民等编. -- 2版. -- 北京：高等教育出版社，2018.11

ISBN 978-7-04-049851-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①谢… Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第107089号

策划编辑 胡 颖　　责任编辑 胡 颖　　封面设计 张 志　　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	河北鹏盛贤印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	27.75	版 次	2003年7月第1版
字 数	500千字		2018年11月第2版
购书热线	010-58581118	印 次	2018年11月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	48.60元

物料号 49851-00

第1版序

数学教育本质上是一种素质教育. 学习数学的目的, 不仅仅在于学到一些数学的概念、公式和结论, 更重要的, 是要了解数学的思想方法和精神实质, 真正掌握数学这门学科的精髓. 只有这样, 所学的数学知识才不致沦为一堆僵死的教条, 变得似乎毫无作用, 相反, 能做到触类旁通, 在现实世界中提出的种种问题面前显示出无穷无尽的威力, 终生受用不尽.

要做到这一点, 单靠教师把课讲好是远远不够的. 只有调动学生学习的积极性和主动性, 促使他们自觉地接受经常、充分而又严格的数学训练, 才能使他们真正走近数学, 取得切身的体会, 从而加深对数学的理解. 这些数学训练的内容, 在大学学习阶段, 包括复习课文、做习题、阅读参考书、相互切磋、讨论班报告以及参加与数学有关的实践活动等, 其中, 在认真复习的基础上做好习题, 是和课堂教学联系最直接与紧密、同时也最利于经常实施和长期坚持的一项重要的数学训练. 多讲不如多练, 对数学这样一门注重思考的学科, 情况更是如此. 老师讲课再好, 多媒体等先进教学手段用得再五彩纷呈, 也代替不了学生自己的思考和领悟. 只有通过严格的训练, 使学生手脑并用, 才能启迪心智, 推动思维, 使认识不断深入.

由于解题在训练数学思维方面的极端重要性, 更由于对学生的解题 (至少在初期阶段) 必须进行必要的指引, 长期以来, 对一些大学基础数学课程都开设了相应的习题课, 并安排老师精心指导. 实践证明, 这对保证和提高教学质量是一个颇有成效的培养方式. 然而也毋庸讳言, 近些年来这一个重要的教学环节在一部分学校中却有明显削弱的趋势: 老师布置的习题在数量及质量两方面都降低了要求; 老师批改作业只是象征性的, 有的甚至干脆不改, 简单地公布一个标准答案了事; 习题课不少已名存实亡, 有的干脆已经取消; 极个别的学校甚至将数学课程的考试也采用了TOEFL考试的方式等. 这样做的结果, 在全国硕士研究生入学统一考试中也已经可以很清楚地看得出来: 有些平时学习成绩“优秀”的学生、甚至一些免试直升的优等生, 对一些基本概念和重要基础理论的似是而非的回答, 对一些基本运算的生疏和迟疑, 往往使主考老师大失所望, 更使他们本人入学后的深造面临重重的困难. 所有这些, 不能不使众多的有识之士深表忧虑和关切.

就数学分析这样的课程来说, 一方面, 它是一门重要的大学基础课程, 很多后继课程都以它为基础, 可视为它的延伸、深化和应用, 而它的基本概念、思想和方法更是无所不在. 因此, 牢固地掌握它的基本内容, 熟练地运用它的基本方法, 透彻地理解它的基本思想, 是打开大学阶段数学学习局面的关键. 另一方面, 为了帮助学生掌握学习的主动权, 尽快实现由初等数学阶段进入高等数学阶段的飞跃, 作为学生最早面对的一门高等数学课程, 它在培养学生养成思考的习惯、提高理解的能力等方面, 更负有重大的启蒙责任. 正因为如此, 上好数学分析的课程, 做好数学分析

的习题, 努力提高数学分析习题课的质量, 就具有特别重要的意义. 前辈数学大师苏步青教授告诉我们, 他曾做过一万道微积分的习题, 他能得心应手地在微分几何的前沿领域做出举世瞩目的重大贡献, 与他通过这样严格的训练所打下的坚实基础、所培养的顽强毅力以及所积累的对数学思想的洞察是分不开的.

现在的这一本书, 是在作者们长期从事与指导习题课教学的基础上, 为加强数学分析习题课建设而认真撰写的教材与课外读物. 它的着眼点, 不是像现在充斥市面的各种各样的习题解答那样, 消极地为老师或学生提供一些习题的解答, 而是利用习题课这种教学形式, 引导学生深入理解课程内容, 启发学生深入思考, 扩大学生知识视野, 力求使学生达到举一反三、由小见大、由表及里的境界, 较快地熟悉高等数学的思想方法, 迈步走进高等数学的广阔天地. 对于学生, 这是一本富于启发性且颇有新意的辅导读物; 对于担任数学分析授课或习题课的老师, 更是一本独具特色且不可多得的参考书籍. 在已经出版了大量似曾相识的数学分析教材之后, 本书以其鲜明的特色、新颖的视角和丰富的内容, 给我们以耳目一新的感受. 它的出版, 对帮助广大教师提高习题课的教学质量, 对推动学生自觉重视解题的训练, 均可望带来积极的影响, 很值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2003 年 4 月 3 日

第 2 版前言

本书在 2003 年出版之后, 承蒙许多读者的厚爱, 曾多次印刷使用, 在使用过程中一些院校的师生对本教材提出了很多宝贵的意见与建议. 现在将近十五年了, 情况有了许多变化, 遂决定在初版的基础上进行改写.

第 2 版继续保留了原书的基本框架 (指章、节和小节) 和主要内容 (指命题、例题、练习题和参考题), 结合我们多年的使用经验进行了一些必要的增删和改写.

此次修订, 除对文字、数学名词和符号进行了修改之外, 主要是对部分命题和例题的证明或解法做了改进, 重写和增加了很多注解. 对于参考题, 特别是难度较大的参考题, 大幅度地修改或重写了参考题提示, 力求使得所给出的提示对读者确实有帮助.

在第 2 版中更新和增加了部分参考文献, 在更新的文献中特别要指出, 在第 1 版中多次引用的菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》的 50 年代的中译本 (三卷八分册), 由于第 2 版中改用原书第 8 版在 2006 出版的中译本 (三卷), 因此引用该书时一般均有变动. 在增加的文献中,《吉米多维奇数学分析习题集学习指引》(全三册) 和本书一样, 也是学习微积分的辅导用书, 但在写法和内容方面很不一样, 与本书具有很强的互补性, 因此在第 2 版中多次加以引用.

编者在这里要特别感谢本书第 1 版的审阅人沐定夷教授. 他在知道本书将出第 2 版时, 非常支持. 虽然他因健康原因不能提供更多的指导与帮助, 却一再表示出版后一定要给他看. 由于他已于 2017 年 3 月不幸去世, 他的这个愿望已不能实现. 实际上, 沐定夷教授不仅是第 1 版的审阅人, 而且还向我们提供了他在上海交通大学多年的数学分析教学中积累起来的大量宝贵资料, 对第 1 版的编写起到了重要的作用. 谨以本书的出版作为对沐定夷教授的纪念.

最后要指出, 本书的出版得到了高等教育出版社的推动和大力支持. 编者特别对于李蕊同志的帮助、策划和责任编辑胡颖同志的辛勤劳动和高质量的工作表示衷心的感谢.

编者

2018 年 8 月

第1版前言

本书是以适应多层次需要和具有多种用途为指导思想编写的数学分析习题课教材.

首先, 本书的直接目的是为上数学分析习题课的教师和学生同时提供服务. 为此在书中对于基本例题和基本方法作了比较详细的讲解, 特别注重如何帮助初学者入门和逐步提高 (例如 §1.3、§1.4 和 2.1.3 小节), 按照难度的不同层次收录相当数量的习题, 并在每一章的最后一节总结学习要点. 对许多经典性的内容采取比较新颖的证明和分析方法, 在例题和习题的选取中也力求创新, 改变过去微积分学教程和吉米多维奇习题集一统天下的传统格局. 在编写中非常重视一题多解和前后呼应, 并对学习中常见的典型错误进行分析. 此外, 特别为教师提供的服务还有在 §1.1 中对组织习题课教案的意见, 在 §2.8 的数列极限的习题课教案, 在 25.5.1 小节的曲面积分的习题课教案, 以及每一章末对教学的建议等.

其次, 本书可作为学生在解题和扩大知识领域方面的参考书. 我们不赞成像工厂生产标准化产品那样来开展教学工作, 千人一面的做法不可能造就具有高度创造性的人才. 能力的培养不可能离开解题的训练. 学生根据自己的情况, 做一些有难度的课外题是非常必要的. 本书所收录的习题按照其难度和灵活性大致分为练习题和参考题. 每节末有练习题, 每章末有参考题 (一般有两组). 这样安排是为了帮助初学者逐步提高分析问题和解决问题的能力. 此外, 本书对于教材中的一系列问题作了较深入的讨论, 还包括了一些提高部分的内容, 例如第二章的迭代生成数列, 第五章的 Li-Yorke 混沌, 第八章和第十一章的凸函数和不等式中的部分材料等. 它们既是课程内容的自然延伸, 又是进一步学习的起跳板. 本书与一般教科书不同的另一特点是, 文中有大量的引用, 其中除了书末的参考文献外, 还有国内外与数学分析有关的杂志上的大量教学研究论文. 我们认为这种旁征博引对读者是有益的.

对较难的题, 学生一时做不出是十分正常的现象. 建议学生要学会将问题记在心里经常思考. 如能通过自己的不懈努力做出一道较难的题, 那才是真正的收获. 若能持之以恒, 自己的能力和素质就会有切实的提高, 不要养成急于从书本上或他人处寻找现成解答的习惯. 这样看似省力, 实际上往往转身就忘, 反而失去了很好的学习机会. 来得快则去得更快. 没有经过自己的努力, 即使将现成答案放在面前, 也往往不知所云, 一无所得. 本书不附习题解答就是出于以上考虑. 为了对读者提供帮助, 书中附有较多的注解, 经常指出有关例题和习题的意义、与其他题的联系等. 书中对所有参考题均给出提示, 集中放在书末. 但请注意, 该提示中指出的方法未必高明, 更不一定是唯一的方法.

本书也可作为考研的复习教材. 就我们所见, 许多学生在考研前对课程的基

本内容已遗忘甚多, 面对茫茫题海不知所措. 本书可以帮助他们对基本内容和方法进行复习, 然后通过数量并不很大的习题训练得到较快的提高.

本书还可作为已经学过一般高等数学的读者进一步提高的进修教材. 本书在许多基本方法的讲解上较为细致, 起点不高, 对自学比较合适.

苏州大学数学系长期以来非常重视数学分析的习题课建设. 1987—1989 年由吴茂庆和卫瑞霞编写的习题课教材, 分上、中、下三册, 在数学分析教学中起了重要的作用; 但由于当时只油印了几十份, 仅供上习题课的青年教师使用, 目前已很难得到, 而十年以来的形势发展很需要一套全新的习题课教材, 并供广泛得多的读者使用, 这便是编写本书的由来. 本书从 1998 年底开始编写, 并经多次试用和征求同行的意见, 逐步形成现在的面貌. 当然, 数学分析习题课教材的建设是一个长期积累的过程, 不可能毕其功于一役. 希望本书的编写能够起到承前启后的作用, 使数学分析习题课的教学质量得到稳步的提高.

本书分上、下两册出版. 上册的内容为极限理论和一元微积分, 下册的内容为无穷级数和多元微积分.

为简明起见, 正文内只设命题与例题, 并在每一章节内分别依次编号. 例如, 命题 2.4.1 就是第二章第 4 节的第一个命题. 命题一般是有独立存在价值的定理或结论. 有的例题很重要, 实际上也可以作为命题. 这里没有绝对的界线.

在几年的编写和试用过程中, 得到了兄弟院校和本校许多同行的关心和帮助, 并尽可能地吸取了他们对几次初稿的宝贵意见; 上海交通大学的沐定夷教授承担了全书的审阅, 其中包括几年来的每次修改稿, 提出了许多重要意见和建议; 在本书的编写中参考了很多文献, 其中包括教科书、习题课教材、习题集和对数学分析中许多课题和方法的研究性材料; 本书的排版采用天元和LaTeX系统, 并得到了华东师范大学陈志杰教授的多次热情帮助; 本书的编写得到了教育部"国家理科基地创建名牌课程项目"和苏州大学数学系的资助; 本书的出版得到了高等教育出版社数学分社的大力支持, 特别是得益于高级策划王瑜和责任编辑薛春玲的辛勤工作和热情指导; 对于以上种种帮助, 在此一并致以深切的感谢.

本书编写组的成员是谢惠民、恽自求、易法槐和钱定边. 极限和一元微分学的执笔人是谢惠民, 一元积分学和无穷级数的执笔人是恽自求和谢惠民, 多元微积分的执笔人是易法槐和钱定边. 此外上册的数列极限习题课教案和对习题课的多数建议是由钱定边提供的.

由于编者水平所限, 在目前的版本中必然还会有许多错误和不妥之处, 这完全是执笔人的问题. 本书的许多新的设想和特点也还不成熟. 我们恳切地希望读者对本书批评指正, 提出进一步改进的宝贵意见, 以利于本书今后的修正.

数学分析习题课教材编写组

2003 年 2 月

上册内容简介

这里将分章介绍本书上册正文中的部分内容. 建议读者广泛使用书末的两个索引, 即中文名词索引和外文名词索引, 从中可以查到许多在目录上不易寻找到的材料.

第一章为引论. §1.3 介绍了一系列初等不等式, 其中特别是平均值不等式在书中将多次应用. 在 §1.4 中对两个逻辑符号 $\forall$ 和 $\exists$ 的由来和用处作了详细的讲解. 这都是在一般教科书中不可能花很多篇幅来介绍的内容.

第二章为数列极限. 在 2.1.3 小节中对适当放大法作详细讨论. 例题 2.2.1 在一般教科书中是少见的. 2.2.3 小节中提前引入无穷级数, 并对调和级数的发散性给出多个证明. §2.5 用两个通俗问题引入数 e. §2.6 对于迭代生成的数列介绍了"蛛网工作法", 总结出具有相当普遍性的两条规律.

第三章为实数系的基本定理. 除了单调有界数列的收敛定理是上一章的主要工具外, 在这一章中分节详细介绍其余 5 个基本定理的内容、证明和应用. 对区间套定理的"凝聚"特点作了细致的分析. 凝聚定理的证明依赖于一般教科书中不常见的"任何数列必有单调子列"的结论. 用三分法证明 Cauchy 收敛准则仅见于 [41]. Lebesgue 数的存在性证明是易法槐提出的. 介绍了上、下极限的三种不同视角, 还包括它们在多个方面的应用. 在 3.7.2小节举出用本章定理一题多解的例题.

第四章为函数极限. 其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的证明取自杂志《数学的实践与认识》中的论文. 对于使用等价量代换法中的常见错误进行了分析, 指出了正确使用的两条规则.

第五章为连续函数. 其中除了对基本定理作细致的处理外, 作为第二章中迭代生成数列的现代发展, 还在 §5.6 介绍了混沌. 为了理解这些最新发展所需的知识只限于连续性和上、下极限的概念.

第六章为导数与微分. 其中对几个基本结果采用了 [17] 中的处理方法. 对于一阶微分的形式不变性作了详细讨论.

第七章为微分学中值定理和 Taylor 定理. 对于 Fermat 定理、Rolle 定理和 Lagrange 中值定理都采用了不同于一般书中的新的证明方法. 根据沐定夷的建议, 提出并证明了 Taylor 多项式的最优性.

第八章为微分学的应用. 这里分 7 个专题作介绍. §8.4 和 §8.5 对于凸函数以及凸性在证明不等式中的应用有丰富的材料, 其中包括大量练习题. 作图题中收入了燕尾突变的例题.

第九章为不定积分. 对于第二换元法作出了一个严格证明 (取自《美国数学月刊》上的论文). 对于求有理函数的不定积分举出两种比较灵活的计算方法 (其中之一来自 [72]).

第十章为定积分. 不正面介绍零测度概念而给出关于 Riemann 可积充要条件的 Lebesgue 定理的证明 [8].对积分第一中值定理的中值可以在开区间中取到的结论作出证明 (与 [53, 57] 类似). 计算定积分的例题 10.4.1 是较新的. 在利用对称性计算定积分方面利用了 [49] 的分析, 这比传统的说法更为透彻. 在对称性分析的基础上形成的命题 10.4.6 成为解决一系列问题的有力工具.

第十一章为积分学的应用. 在几何应用中推荐用 Green 公式的一个特例 [42]. §11.2 与 §8.4 和 §8.5 呼应, 为凸函数和不等式提供了丰富的内容. 对于积分估计给出了较多的例题. Wallis 公式的证明虽然是传统的, 但具有新的视角. Stirling 公式采用 [8] 中比较严格的证明. 改写了 Niven 对于 π 的无理性的证明.

第十二章为广义积分. 对 Dirichlet 判别法的必要性给出证明. 采用较新的方法计算概率积分. 对于无穷限广义积分收敛时被积函数在无穷远处的特殊性质作了详细讨论.

由于篇幅所限, 本书没有介绍插值多项式的丰富内容, 在数值积分方面也未作详细介绍, 但仍收入了关于近似计算的许多材料. 从收敛数列的收敛速度出发, 正式引入算法的阶, 讨论了对圆周率的多种算法、对数 e 的两种近似计算的比较、方程求根的不同算法等.

目　　录

第一章 引　论

这一章只是一些准备工作. 读者可先浏览一下, 然后根据自己的需要来使用.

在 §1.1 中对于如何上习题课提出一些建议. 在 §1.2 中列出了本书中的常用记号. 在 §1.3 中介绍几个常用的初等不等式, 供自学. 根据我们的经验, 在学期开始时如能关于初等不等式组织一次课外讲座是很合适的. 就初学者而言, 花点力气学好这一节 (包括练习题) 对今后大有好处. 这不仅因为其中的平均值不等式、三点不等式和 Cauchy (柯西) 不等式是以后的常用工具, 而且还可以通过这些不等式的证明熟悉所用的方法. §1.4 的对偶法则很重要, 也可自学.

§1.1 关于习题课教案的组织

在上册中, 除第二章外, 不提供具体的习题课教案. 附有教案的参考书已有很多, 例如 [13, 61, 65, 70] 等. 我们认为习题课的任课教师应当根据所用的具体教材、大课内容和学生的动态情况来写出自己的习题课教案. 与主讲教师所上的大课相比, 这里有更为广阔的天地可以发挥教师的创造性. 我们在下面先提出一些原则性的建议供参考, 然后从第二章起, 于每章的最后一节提出学习要点和对习题课的建议, 并附有一定难度的若干参考题供选择使用. 注意: 较难的参考题, 特别是第二组参考题, 可供学有余力的学生或考研使用, 对习题课则不尽合适.

在讨论习题课的内容之前, 需要强调指出: 上习题课的教师必须自己动手解题和选题. 随随便便从一本书上抄个题, 不明白它的来龙去脉, 就拿来作为习题课上的例题或练习题, 这不是对学生负责的做法, 效果也一定不会好. 一旦出了问题, 就会砸锅, 使自己下不了台. 以其昏昏, 怎能使人昭昭?

写教案的另一个依据则是掌握学生不断变化的具体情况, 特别是作业批改中出现的活材料. 教师认真批改作业和思考其中出现的问题是上好习题课的必要条件. 对于学习中出现的情况是不可能举尽的, 完全要靠教师的辛勤劳动和对教学内容的把握来作出正确的处理. “教无常法”在这里是非常合适的.

一、课堂提问与讨论　这方面可以参考本书中为部分章节安排的思考题. 但往往最好的材料来自习题批改和学习中出现的具体情况. 要从一开始引导学生学习数学的思维方式. 例如, 对于所提出的问题, 若回答“一定”, 则要求能给出证明; 若回答“不一定”, 则要求会举出反例. 用来推翻某个论断的例子就叫做“反例”. 要引导学生学会举例子来支持自己的观点.

二、课内例题的选取　首先应当注意, 不要将习题课变成例题讲解课, 一讲到底. 这样做的效果往往不一定好. 实际上, 不论例题的选择和讲解是怎样的如花似锦, 学生还是必须经过自己的实践才能吸收其中所含的营养. 这就是 Pólya (波利