科学经典品读丛书

改变历史的数学名著

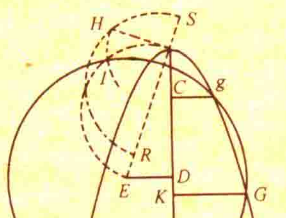
God Greated the Integers

# 上帝创造整数

（上）


【英】史蒂芬·霍金 编评

李文林◎等译



CNS 湖南科学技术出版社

科学经典品读丛书

改变历史的数学名著

God Greated the Integers

# 上帝创造整数

（上）

【英】史蒂芬·霍金　编评

李文林◎等译



湖南科学技术出版社

本书译者（排名不分先后）

兰纪正 朱恩宽 冯汉桥 周 畅 王晓斐 常心怡 王青建 周冬梅 杨宝山 袁向东 赵振江 王幼军
贾随军 朱尧辰 周畅 李文林 程钊 胥鸣伟 潘丽云 杨显 罗里波

**图书在版编目（CIP）数据**

上帝创造整数 / (英) 史蒂芬·霍金编 ; 李文林等译. -- 长沙 : 湖南科学技术出版社，2019.3
（科学经典品读丛书） 书名原文：God Created the Integers
ISBN 978-7-5357-9985-2

Ⅰ. ①上… Ⅱ. ①史… ②李… Ⅲ. ①数学一文集Ⅳ. ①01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 249628 号

*God Created the Integers*

著作权合同登记号：18-2014-242

SHANGDI CHUANGZAO ZHENGSHU
科学经典品读丛书
**上帝创造整数**
编 评：[英]史蒂芬·霍金
译 者：李文林等
责任编辑：孙桂均 吴 炜 李 蓓 杨 波
文字编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社 址：长沙市湘雅路 276 号
http://www.hnstp.com
湖南科学技术出版社天猫旗舰店网址：
http://hnkjcbs.tmall.com
印 刷：湖南众鑫印务有限公司
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂 址：长沙县榔梨镇保家工业园
邮 编：410129
版 次：2019 年 3 月第 1 版
印 次：2019 年 3 月第 1 次印刷
开 本：710mm×1000mm 1/16
印 张：72
字 数：1270000
书 号：ISBN 978-7-5357-9985-2
定 价：278.00 元（上、下册）

# 致 谢

在本书编撰的各个阶段，许多能人作出了不同的贡献，没有他们的帮助，本书不可能完成. 这里要特别感谢朗宁出版社顾问罗辛（Michael Rosin）、姆洛迪诺（Leonard Mlodinow）、史蒂芬·霍金教授的助手赛姆女士（Karen Sime）、安德斯（John Anders）和安萨尔迪（Michael Ansaldi）出色的翻译技巧，感谢普罗布斯特（John Probst）和他在技术书局（Techbooks）的杰出团队.

作者还要感谢朗宁出版社现任和过去的职员格兰迪纳梯（Deborah Grandinetti）、冯格拉恩（Diana von Glahn）、格雷齐洛（Kathleen Greczylo）、路德维克（Julia Ludwig）和史密斯（Nicole Smith）.

# 译者序

摆在我们面前的是一部由著名理论物理家史蒂芬·霍金（Stephen Hawking）主编和评注的数学经典原著选集. 霍金是蜚声世界的剑桥大学卢卡斯数学教授，在学术界有“当代爱因斯坦”之誉，这样一位科学大师亲自编注数学原始文献，可谓是对数学原始著述的意义与价值的权威性宣示.

数学是最古老的科学领域之一. 在几千年数学发展的历史长河中，产生过无数不朽的篇章，它们是数学进化的记录，人类智慧的珍宝. 阅读数学家特别是数学大师们的原始著述，是了解数学的起源与发展的最直接与最可靠的途径. 同时，这些原始著述向我们提供了数学创新思维的范例，学习历史范例，可以“促进数学发现的艺术，揭示数学发现的方法”①，推动现实的数学研究.

然而，数学原始著述的意义远不止此. 本书的副题“改变历史的数学名著”昭示了数学改变人类历史进程的作用. 霍金在引言中对此有进一步解释. 他写道：“长期以来，数学一直影响着我们的世界观.”“我们认识世界的方式的变革总是与数学思想的变革携手并进.”并指出，“数学的未来发展将一如既往，肯定会（直接或间接地）影响我们的生活方式和思维方式”. 当然，作为数学家数学思想主要载体的数学原著，就具有更深层的思想意义和文化价值. 通过这些原始经典，人们可以跟随人类文明进步的步伐，感受人类思想革命的脉搏. 因此可以说，阅读数学家特别是数学大师们的原始著述，是了解整个人类文明史和思想史的重要的、不可或缺的途径.

站在这样的视角，霍金这部数学原始文献选集自有其不同于已有的同类著作的特色. 这部巨型文集追溯了2500年间17位数学家31篇里程碑式的著作. 选择的权重放在引起思想变革的突破性发展上，因而使本书在描绘数学进化图像的同时，展开了一幅人类思想变革的历史画卷.

---

① G. Leibniz, *Historia et origo Calculi differentialis*（《微积分的历史与起源》，1714），英译本见 J. M. Child, The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz, Open Court, 1920

霍金为每一位入选的数学家撰写了传记，这些传记不仅介绍了数学家的生平，更重要的是包含有对相关著作的影响和意义的独到精辟的分析. 在多数文献正文中，霍金加插了大量评注，这些评注或诠释疑难，或阐幽发微，对读者阅读理解艰深的原文大有启迪. 生动的传记和言简意赅的评注与原始正文浑然一体，使一向让人感到冷冰冰故纸堆般的原始文献，变成焕然一新、鲜活可读的思想宝典.

读者也许不难发现，本书在数学发展的时段上有两个明显的缺项，即中世纪和 18 世纪. 中世纪的欧洲数学在宗教思想的束缚下处于停滞时期，但在东方，中国、印度与阿拉伯的数学却有重大的进展，特别是阿拉伯代数著作在文艺复兴前夕的西传，对欧洲近代数学的兴起有不容忽视的影响；18 世纪则被称为“分析时代”，这个时代的数学家们发展、拓广了牛顿、莱伯尼茨的微积分，建造了春色满园的分析王国，他们中最杰出的代表是欧拉，欧拉因此而被加冕“分析的化身”. 不过从另一方面看，生活在 18 世纪的数学英雄们也许有他们的不幸，那就是：“只能发明一次”的微积分刚刚被发明了！我们无意去妄测本书忽略上述两个时代的原因，过于求全往往以减失特色为代价. 当然，就整个数学史而言，欧拉无论如何是不能忽略的人物. 对上述两个时期的数学经典感兴趣的读者，可以参考其他的数学原著选集（例如文献［1］，［2］，［3］，［4］，［5］）①.

概而言之，本书是登高望远、独具特色、荟萃巨著的巨著. 由于霍金的声誉与非同一般的眼光，本书一经出版便受到了广泛的瞩目，影响远远超出了数学界的范围.

霍金精心选评的数学经典，是科学创新思维最生动的教材，致力于创造性研究的数学工作者和相关领域的科学工作者，都可从中学习历史范例，汲取创新灵感.

本书是科学史和思想史工作者的袖珍资料库，为他（她）们的进一步深入研究提供线索，引导方向.

对于广大的科学爱好者来说，本书是值得珍藏的数学青花瓷，一篇篇原汁原味的数学原著，会带给你鉴赏艺术珍品一般的享受.

为了方便中文读者阅读，中译者为本书做了必要的脚注，原来英译本的脚注以尾注的形式放在文后.

《上帝创造整数——改变历史的数学名著》，大师选大师，名家释名家. 一

① 霍金本人在本书第二版（2007）中已增选了欧拉、罗巴切夫斯基和伽罗瓦等 3 位数学家的著述.

卷在握，众星在手．读读大师，走近数学，走向科学！

中国科学院数学与系统科学研究院　李文林

2012 年 12 月于中关村

**参考文献**

[1] D. E. Smith (ed.). A Source Book in Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1929

[2] D. J. Struik (ed.). A Source Book in Mathematics, 1200—1800, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1969

[3] R. Carlinger (ed.). Classics of Mathematics. Moore Publishing Company Inc. 1982

[4] J. Fauvel &J. Gray (eds.). A History of Mathematics: A Reader, Macmillan Education Ltd. in association with the Open University, London, 1987

[5] 李文林．数学珍宝——数学历史文献精选．北京：科学出版社，1998

# 引　言

我们很幸运生活在一个继续发现的时代. 就像发现美洲新大陆一样——你只能发现一次. 我们是生活在一个发现自然基本定律的时代.

——美国物理学家　理查·费恩曼　1964 年

本书摘选了数学史上最重要的 31 部典范之作，它们汇成了对那些推进人类认识世界并为现代科学技术开山铺路的数学家们的赞歌.

许多世纪以来，数学家们努力帮助人类达到对自然的伟大洞察，诸如认识到地球是圆的、使苹果落地和使重物运动的是同一种力、空间是有限的和非永恒的、时空相互联系并因物质和能量而弯曲，以及未来只能或然地确定. 我们认识世界方式的变革总是与数学思想的变革携手并进. 没有笛卡儿的解析几何和牛顿自己发明的微积分，牛顿绝不可能建立其力学定律；没有傅里叶的方法和由高斯、柯西引领的微积分和复变函数论研究，很难想象电动力学和量子理论的发展——正是勒贝格的测度理论使冯·诺伊曼得以奠定量子力学的严格基础；同样，不借助黎曼的几何思想，爱因斯坦也不可能完成他的广义相对论；而事实上，如果没有拉普拉斯的概率统计概念，整个近代科学就不可能如此影响巨大（如果确有影响的话）.

迄今还没有哪一种智力探索比数学研究对物理科学更为重要. 然而数学不仅仅是科学的工具和语言，它还有自身的目的. 长期以来，数学一直影响着我们的世界观. 魏尔斯特拉斯提出了崭新的函数连续性概念；康托尔的工作革新了人们对无限的认识；布尔的《思维规律》揭示了逻辑作为一种程序系统服从与代数相同的规律，从而阐明了思维的本质，最终能够在一定程度上使思维的机械化，即现代数字计算机得以实现；早在有可能在计算机上进行熟练的计算之前很久，图灵就阐明了数值计算的威力和局限；哥德尔证明了一条使许多哲学家和所有其他相信绝对真理的人大感困惑的定理：任何一个足够复杂的逻辑系统（例如算术）一定存在一个既不能证明也不能证伪的命题. 更糟糕的是，他同时还证明

了：一个系统在逻辑上是否相容的问题不可能由该系统本身获得证明.

这部引人入胜的文集展示了所有这类突破性的发展，25 个世纪来数学的核心思想，通过原始文献来追踪古往今来数学思想的进化与变革.

本书选载的第一篇文献是公元前 300 年左右欧几里得的著作，不过早在公元前 3500 年以前埃及人和巴比伦人就已经发展了令人印象深刻的数学计算能力. 埃及人运用这种技能建造了伟大的金字塔并实现了其他令人惊异的目标，然而埃及人的计算缺乏某种后来被认为对数学来说至关重要的品质，即严格性. 例如，古代埃及人将一个圆的面积等同于一个边长为其直径的 8/9 的正方形的面积. 这一方法相当于取数学常数 $\pi$ 的值为 256/81. 一方面，这是了不起的，因为它与精确值的误差还不到百分之零点五. 但另一方面，这一结果是完全错误的. 为什么要在乎百分之零点五的误差呢？因为埃及人的近似值忽视了 $\pi$ 的真值的一个深刻而基本的性质：它根本不可能写成任何分数的形式. 这是一个原则问题，与任何纯粹的数量精确性问题无关. $\pi$ 的无理性直到 19 世纪后半叶才被证明，早期希腊人确实发现了不能用分数表示的数，这使他们感到困惑和震惊. 希腊人的高明之处在于：他们认识到数学中原则的重要性，认识到数学本质上是一门从一套概念和法则出发、严格地推导出精确结果的学科.

公元前 300 年左右，亚历山大城欧几里得的《原本》集希腊几何知识之大成. 在随后几个世纪里，希腊人在几何与代数两个领域里都作出了重大的推进. 阿基米德可谓古代世界最伟大的数学家，他深入研究几何图形的性质并创造了求面积和体积以及计算 $\pi$ 的新的近似值的天才方法. 另一位亚历山大数学家丢番图考察了代数问题中文字和数字混杂的情况，指出抽象可以使数学极大地简化. 因此丢番图应该是在代数中引进符号的第一人. 1000 多年以后，法国人笛卡儿将代数与几何两大领域结合起来而开创了解析几何. 笛卡儿的工作为牛顿发明微积分铺平了道路，微积分与解析几何共同标志着科学研究的崭新方法. 自牛顿时代以来，数学创新的步伐始终激动人心，数学的基础学科代数、几何与微积分（或函数理论）相互渗透、相互滋养，并引发在诸如概率论、数论和热的理论等各种不同领域的深入应用. 随着数学的成熟，它所提出的问题也越来越深刻：本书选录的最后两位思想家哥德尔和图灵也许提出了最深刻的问题——什么是可知？数学的未来发展将一如既往，肯定会（直接或间接地）影响我们的生活方式和思维方式. 古代世界创造了体力的奇迹，例如埃及的金字塔. 而正如本书所阐明的，现代世界的奇迹则是我们自身智力的奇迹.

（李文林　译）

# 目　　录


**致谢**/ i

**译者序**/ iii

**引言**/ vii

**欧几里得（约前 325—前 265）**

生平和成果/1

《原本》节选/6

第Ⅰ卷　几何基础——定义、公设、公理及命题 47（勾股定理推导）/6

第Ⅴ卷　欧多克索斯的比例论——定义和命题/24

第Ⅶ卷　数论原理——定义和命题/68

第Ⅸ卷　命题 20：无限的素数　命题 36：偶完全数/109

第Ⅹ卷　可公度量和不可公度量/112

**阿基米德（前 287—前 212）**

生平和成果/127

《阿基米德著作》节选/133

论球和圆柱Ⅰ/133

论球和圆柱Ⅱ/171

圆的度量/198

沙粒的计算/205

解决力学问题的方法——致厄拉多塞/215

**丢番图（公元 3 世纪）**

生平和成果/246

《亚历山大的丢番图，希腊代数史研究》（希思）节选/252

第Ⅱ卷　问题 8—35/252

第Ⅲ卷　问题 5—21/261

第Ⅴ卷　问题1—29/270
**勒内·笛卡儿（1596—1650）**
生平和成果/306
《勒内·笛卡儿的几何》/313
**伊萨克·牛顿（1642—1727）**
生平和成果/394
《原理》节选/402
第Ⅰ卷　论物体的运动/402
**皮埃尔·西蒙·拉普拉斯（1749—1827）**
生平和成果/410
《概率的哲学探讨》/417
**让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶（1768—1830）**
生平和成果/507
《热的解析理论》节选/515
第Ⅲ章　无界矩形固体中的热传导（傅里叶级数）/515
**卡尔·弗里德利赫·高斯（1777—1855）**
生平和成果/576
《算术研究》节选/584
第Ⅲ章　幂剩余/584
第Ⅳ章　二次同余/607
**奥古斯丁·路易·柯西（1789—1857）**
生平和成果/643
《奥古斯丁·柯西全集》节选/651
微分/651
积分/657
**乔治·布尔（1815—1864）**
生平和成果/672
《思维规律研究》/679
**伯恩哈德·黎曼（1826—1866）**
生平和成果/802
《论函数的三角级数表示》/814
《关于几何基础中的假设》/851

《论不大于一个给定值的素数的个数》/860

**卡尔·魏尔斯特拉斯（1815—1897）**

生平和成果/869

《函数论》/875

§7 一致连续性/875

**理查德·居理斯·威尔姆·戴德金（1831—1916）**

生平和成果/882

《数论文集》/887

第一版前言/887

第二版前言/891

《连续性与无理数》/892

《数的性质与意义》/904

**乔治·康托尔（1845—1918）**

生平和成果/943

《创建超限数理论的贡献》节选/949

**亨利·勒贝格（1875—1941）**

生平和成果/1014

《积分、长度、面积》节选/1019

**库尔特·哥德尔（1906—1978）**

生平和成果/1058

《关于数学基本原理及相关体系的形式不可判定命题》/1067

**艾伦·图灵（1912—1954）**

生平和成果/1091

《可计算实数及其在判定问题上的应用》/1098

# 欧几里得（约前 325—前 265）

## 生平和成果

可能除了牛顿（Newton，I.）之外，欧几里得（Euclid）（约公元前 325—前 265）是最有名的数学家. 直到 20 世纪，他的唯一幸存的著作《原本》（*Elements*）一直是第二大畅销图书，仅次于《圣经》（*Bible*）. 欧几里得无疑是他那个时代有名的数学编辑家，正像 19 世纪伟大的辞典编辑家韦伯斯特（Noah Webster），美国最大的辞典是以他的名字命名的.

关于欧几里得人们知道得很少，只知道他在亚历山大（Alexandria）的一个学院里教书，亚历山大是亚历山大大帝（Alexander the Great）建立在埃及尼罗河口岸的一座希腊城市. 由于他的工作是一个编辑家，欧几里得熟悉在他之前的全部希腊数学，特别地，他熟悉第一次数学危机：无理数的危机.

毕达哥拉斯（Pythagoras，卒于大约公元前 475 年）是早期希腊数学研究者中的一个神秘人物. 如果说我们关于欧几里得知道得很少，那么我们关于毕达哥

拉斯知道得就更少. 然而，我们确实知道毕达哥拉斯学派的一些事情. 毕达哥拉斯学派认为整个宇宙可以用整数 1，2，3 等来描述. 正如亚里士多德所说："毕达哥拉斯学派认为事物是数，而且整个宇宙是一个比例和一个数."勾股定理（表述在这一章）说明了这个论断. 小小的整数，像 3，4，5，不仅能描述一个直角三角形的边长，而且具有下述性质：建立在两个较小边上的正方形的面积之和等于建立在最长边（斜边，即直角所对的边）上的正方形的面积. 注意，古希腊人陈述勾股定理用的是几何术语而不是数！

后来有一个人提出了一个有趣的问题，如果有一个边长是一个单位长的正方形，以及其面积是这个正方形面积 2 倍的另一个正方形，那么另一个正方形的边与这个正方形的边的比是多少？这正是 2 的平方根问题的原始提法.

古埃及人发现了其答案的一个很好的近似，另一个正方形的边与这个正方形的边的比几乎就是 7 比 5. 这当然不会使我们吃惊，由于我们知道 7/5 也可以表示为 1.4，它很接近我们知道的$\sqrt{2}$的小数表示. 但是接近不能使毕达哥拉斯学派满意，毕竟勾股定理不能断定正方形的面积是接近相等的，它断言的是它们相等.

后来一个人（我们不知道他的名字）提出了一个深刻的见解，假定 2 的平方根可以表示为两个整数的比，并且这两个整数没有除了单位 1 之外的公因子，称这两个整数为 $p$ 和 $q$，建立在边长为 $p$ 的正方形 $P$ 的面积正好是建立在边长为 $q$ 的正方形 $Q$ 的面积的 2 倍. 现在如果 $P$ 是 $Q$ 的 2 倍，那么 $P$ 一定是一个偶数！毕达哥拉斯学派已经知道如果一个正方形的面积是偶数，那么这个面积必然是 4 的倍数，因而这个正方形的边长必然是一个偶数.

再者，任何人都知道，如果有一个正方形，就能找到另一个其面积是这个正方形面积$\frac{1}{4}$的正方形：只要在长为已给正方形边长一半的边上建立一个正方形即可. 此时，做一个正方形 $T$，它的边长 $t$ 是 $p$ 的一半，因为 $p$ 的长是偶数，所以 $t$ 的长必然是一个整数，由于正方形 $T$ 的面积是 $P$ 的面积的 1/4，故正方形 $Q$ 的面积是正方形 $T$ 的面积的 2 倍. 于是，正方形 $Q$ 的面积是偶数，正像正方形 $P$ 一样，正方形 $Q$ 的面积也是 4 的倍数. 因而，边 $q$ 的长度应当是一个偶数. 此时，这个数学推理像打网球一样——球在两个运动员之间来来回回运动.

终于这个推理达到它的高峰，开始假定这两条边没有 1 之外的公因子，终于产生一个矛盾：它们有公因子 2！毕达哥拉斯学派找不出这个推理的任何毛病. 事实上，没有人能找到一个方法把 2 的平方根表示为两个整数之比，毕达哥拉斯学派面临这样一个现实，已经证明 2 的平方根不能表示为两个整数之比.

于是无理数就诞生了，它作为数学对象至少有2000年不能用整数来表示，这是克罗内克（Kronecker）所说的最早的人为的工作.

毕达哥拉斯学派谨慎地保守这个重大发现，由于它制造了一个危机，这个危机影响到他们的宇宙观的根源. 当毕达哥拉斯学派知道他们的一个成员把这个秘密泄露给他们圈子之外的某个人时，他们很快作出决定把泄密者开除并且把他扔进深海之中，这个人是第一个为了数学而死的殉道者！

无理数的危机也教育了古希腊人，他们不能企望用算术来构成其余数学的基础，也不能用它来解释宇宙的构造，他们必须寻找另外的办法，他们转向了几何.

欧几里得的《原本》是最应当提及的几何著作，特别地，应当提及他对平行线的处理，平行线的定义是：

**平行直线是这样一些直线，他们在同一平面内，并且在两个方向上无限延长时，在每个方向上都不相交.**

而在第五公设中，平行公设是：

**如果一条直线与两条直线相交，并且在同一侧的内角和小于两个直角，那么，如果无限延长这两条直线，则这两条直线必然在这一侧相交，并且其交角小于两个直角.**

这与通常的表述很不相同，通常的表述是：

**给出一条直线及不在这条线上的一个点，至多可以画一条直线通过已知点并且平行于这条直线.**

这是一个等价但不同的形式，是由苏格兰数学家普莱费尔（Playfair，J.）于1795年给出的.

在牛顿时代的高潮期间，哲学家，譬如康德（Kant，I.）从来也没有怀疑过欧几里得平行公设的真实性. 人们只是质疑其真实性的性质. 平行公设在宇宙中是必然地真还是偶然地真？当然，自从爱因斯坦的革命以后，我们知道平行公设在宇宙中完全不是真的. 我们居住的爱因斯坦的时空宇宙是弯曲的，欧几里得几何以及牛顿的物理只是它的近似.

于是，我们要问希腊人到底如何想象平行公设的性质？我相信在考查了古希腊人关于世界的概念之后，我们就会作出这样的解释，他们也是把平行公设看作一个有用的东西，而不是看作物理世界的真实描述. 古希腊人相信我们居住在科学史家考瑞（Koyre，A.）所说的一个“封闭的世界（closed world）”里，这是一个球形的宇宙，在它之中实际上没有延伸到无穷的直线. 在月球轨道之下，沿直线运动的物体或者朝向地心或者远离它而去. 在月球轨道的上方，物体的轨道

是以地球中心为中心的圆，在这个宇宙中，实际上完全没有任何直线.

但是，希腊人有一个问题，他们需要找到他们的数学的基础，毕达哥拉斯学派已经把算术作为基础并且出现了一次危机，为了找到另外一个基础，继承泰勒斯（Thales，卒于大约公元前 547 年）的另一个学派认为数学的基础是几何，这个学派发现没有平行公设他们能得到的很少！例如，他们不能证明勾股定理，事实上，他们不能证明许多几何命题，这对 2500 年后的我们现代人来说不会感到惊奇，因为我们受惠于 2500 年之后的认识并且知道了勾股定理在非欧几何中不成立. 我相信古希腊人知道平行公设只是一个有用的近似，不，让我来说，一个非常有用的近似.

如果说平方根无理性的证明给予我们第一次数学危机，那么它也给予我们**归谬法**（reductio ad absurdum）推理的第一个例子. 这种推理形式的第二个例子可以在欧几里得证明素数无限多的证明中看到，另外的证明当然源自另一个人.

一个素数是一个正整数，例如 3 或 23，它的正整数因子只有 1 和它本身. 证明素数有无限多个是意想不到的简单. 假定存在一个最大的素数 $P$，把所有的素数 $P$，包括 $P$ 乘起来，再加上 1，其结果既不能被 $P$ 整除，也不能被任何一个小于 $P$ 的素数整除，由于 $P$ 和所有小于它的素数显然能整除加 1 之前的乘积，于是，存在最大素数的假定导致矛盾. 这就是归谬法！

希腊人注意到许多素数是成对出现的，例如 11 和 13，17 和 19，29 和 31，这些素数称为孪生素数. 希腊人猜测不只有无限多个素数，而且也应当有无限多个孪生素数. 但是他们不能证明这个，直到现在也没有一个数学家能证明这个.

同样地，没有一个数学家能否证存在**奇完全数**. **完全数**，听起来确实奇怪！什么是完全数？一个完全数是这样一个数，它的大于等于 1 的但小于它本身的整数因子之和等于它. 这样的因子称为它的**真**因数. 古希腊人发现的全部偶完全数如下：

注意：2 的幂，从 1，即 $2^0$，到 $2^{n-1}$ 的和等于 $2^n-1$，对于 $n=3$，$1+2+4=7=8-1$. 现在，我们做一个简单的算术：

$$7=1+2+4=2^0+2^1+2^2$$

$$7=8-1=2^3-2^0$$

$$14=16-2=2^4-2^1$$

逐列相加，得到 28.

$28=1+2+4+7+14=2^2+2^3+2^4=2^2(2^0+2^1+2^2)=2^2(2^3-1)$，28 是它的所有真因子的和. 注意这些因子，前面都是 2 的幂，一直到某一个指数，而后是下一个 2

的幂减去1，这个因子称为转向点因子，再后是转向点因子乘2的所有幂，直到某一个指数. 再注意，如果7不是素数，那么28就不等于它的所有真因子的和. 如果转向点因子有一个素数因子，那么，所有真因子的和就会超出，利用上述观察，希腊人证明了：

**如果（$2^n-1$）是一个素数，那么$2^{n-1}(2^n-1)$是一个完全数，并且偶完全数必然有这种形式.**

2000多年后，仍然没有人发现奇完全数、没有一个数学家相信奇完全数的存在，但是没有人能够证明奇完全数不存在！

毕达哥拉斯学派试图并且失败于以算术为全部数学的基础. 把数学的基础建立在几何上意味着算术的基础是几何.

快！$\frac{7}{5}$与$\frac{10}{7}$哪一个比较大？这个对你来说可能是太容易了. 不要计算，试比较$\frac{19}{12}$与$\frac{30}{19}$哪一个比较大？试着只用乘法而不用除法来做一下. 在欧几里得的《原本》第V卷中的欧多克索斯比例论提供了只用乘法就得到答案的方法.

遵照欧多克索斯（Eudoxus 卒于约公元前355年），欧几里得提出如下问题：考虑4个长度——$a$，$b$，$c$和$d$，如何决定$a$比$b$是大于，小于，或等于$c$比$d$? 欧多克索斯开始于断言："称两个量彼此有一个比，当倍数其中任一个可以超过另一个时." 他认识到，如果$a$比$b$大于$c$比$d$? 那么，$a$比$b$的倍数大于$c$比$d$的相同的倍数. 知道了这个事实，欧多克索斯就知道整个事情就是要找到一个有用的倍数来解决这个问题，他选定的倍数是$b$和$d$的乘积，$a$比$b$乘以$b$和$d$的乘积给出了$a$，$b$和$d$的乘积比$b$，即边为$a$和$d$的矩形的面积. 类似地，$c$比$d$乘以$b$和$d$的乘积给出了$c$，$b$和$d$的乘积比$d$，即边为$c$和$b$的矩形的面积.

于是，边$a$和$d$的矩形的面积大于边为$c$和$b$的矩形的面积当且仅当$a$比$b$大于$c$比$d$. 因而，毕达哥拉斯学派试图把几何算术化失败了，而欧多克索斯试图把算术几何化却成功了！顺便指出，因为$19\times19$大于$30\times12$，所以$\frac{19}{12}$大于$\frac{30}{19}$!

欧几里得是最伟大的数学百科全书式的数学家. 现在，不同领域的数学家难以懂得不同领域前沿的工作，没有一个数学家能够编辑所有已知数学的概要. 但是，在数学界保留了这样一个理想，在20世纪后半叶，法国数学界的布尔巴基（Bourbaki，N.）走出了模仿欧几里得的一步. 布尔巴基不是一个人，他是法国20多个各领域数学家集体的笔名！直到现在欧几里得的书仍然是数学教科书的典范.