普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

（供医药类院校使用）

GAODENG SHUXUE

敖 登 李宗学 主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（供医药类院校使用）

主　编　敖　登　李宗学
副主编　曹　莉　杨素青　孔建霞
编　委　（按章节顺序）
孔建霞　敖　登
李宗学　曹　莉
杨素青　郑　婷
谢桃枫　贾　荣

北京邮电大学出版社
·北京·

内容提要

本书是为医药院校高等数学课程而编写的，全书共分为六章，主要内容包括：函数的极限与连续，函数的导数与微分，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，常微分方程.每节后配有思考与练习，每章末配有习题，并附有思考与练习解答以及习题答案与提示.

本书内容设计合理，理论深入浅出，层次分明，既重视基本概念和基本方法的准确阐述，又注意数学知识与实际问题的紧密结合，简明实用，便于教学.适合高等医药院校各层次不同专业类学生使用，也可作为广大医务工作者和数学爱好者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/敖登，李宗学主编.--北京：北京邮电大学出版社，2015.8(2017.8重印)
ISBN 978-7-5635-4506-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①敖… ②李… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第199140号

书　　名	高等数学
主　　编	敖　登　李宗学
责任编辑	马　飞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www3.buptpress.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京九州迅驰传媒文化有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	16
字　　数	399千字
版　　次	2015年8月第1版　2017年8月第3次印刷

ISBN 978-7-5635-4506-3　　定价：36.00元

前　言

高等数学是一门研究变量的学科,在社会的发展和创新过程中发挥着不可替代的重要作用,是现代科学技术的重要基础,是医学生必须掌握的一门知识.

本书是为医药院校各个不同专业不同层次学生开设高等数学课程而编写的.根据医药院校高等数学课程的教学要求、教学目的和有限的学时,在编写过程中注重整体知识的循序渐进,既重视基本概念和基本方法的准确阐述,也注意数学知识与实际问题的紧密结合,不过分追求数学的抽象性及严格的定义,淡化一些繁难的理论推导证明,重视数学知识的应用和实用.

本书每节后配备的思考与练习,是为引导学生进一步地学习而编排的.思考题是自我检查、激励学生、形成学习动机必不可少的一个环节,它的作用是突出的,目的是让学生从中体会和学习到数学的思维方法,同时引申出更深入的问题进行讨论,使学生受到逻辑推理的训练,全面提升医学生为适应未来发展的数学素质,也为后续各学科专业课程的学习打下坚实的基础.

本书的内容有:函数的极限与连续,函数的导数与微分,不定积分,定积分及其应用,多元函数微积分,常微分方程. 书中配有较多丰富的例题、思考题和习题,各专业不同层次的教学可根据实际课时设置而进行取舍.

参加本书编写的教师具体分工如下:

第一章	函数的极限与连续	孔建霞
第二章	函数的导数与微分	敖登
第三章	不定积分	敖登　李宗学
第四章	定积分及其应用	李宗学
第五章	多元函数微积分	曹莉
第六章	常微分方程	杨素青

简明积分表的整理工作以及本书校对工作由贾荣、谢桃枫、郑婷完成.在本书的编写过程中,汲取了诸多教材的优点,借鉴了同行们的经验,得到了老师们的热情支持,在此一并表示诚挚的感谢.由于编者水平有限,书中难免有考虑不周和不妥之处,敬请广大同仁和读者批评赐教.

编　者

2015 年 3 月

目 录

第一章　函数的极限与连续 ………………………………………… 1

1.1　函数的基本知识 ………………………………………… 1

1.1.1　集合简介 ………………………………………… 1

1.1.2　区间和邻域 ………………………………………… 1

1.1.3　常量与变量 ………………………………………… 3

1.1.4　函数的概念 ………………………………………… 3

1.1.5　函数的几种特性 ………………………………………… 5

1.1.6　反函数与复合函数 ………………………………………… 6

1.1.7　分段函数 ………………………………………… 8

1.1.8　初等函数 ………………………………………… 8

1.2　极限 ………………………………………… 12

1.2.1　极限的概念 ………………………………………… 12

1.3　极限的运算法则 ………………………………………… 20

1.3.1　极限运算法则 ………………………………………… 20

1.3.2　极限存在准则 ………………………………………… 21

1.4　无穷小量与无穷大量 ………………………………………… 24

1.4.1　无穷小量 ………………………………………… 24

1.4.2　无穷大量 ………………………………………… 25

1.4.3　无穷小量的比较 ………………………………………… 26

1.5　函数的连续性 ………………………………………… 27

1.5.1　增量 ………………………………………… 28

1.5.2　函数连续的概念 ………………………………………… 28

1.5.3　函数的间断点及分类 ………………………………………… 29

1.5.4　连续函数的运算 ………………………………………… 31

1.5.5　闭区间上连续函数的性质 ………………………………………… 32

习题一 ………………………………………… 33

思考与练习解答 ………………………………………… 36

习题一提示与答案 ………………………………………… 37

第二章　函数的导数与微分 ………………………………………… 39

2.1　导数的基本知识 ………………………………………… 39

2.1.1　导数的概念及其几何意义 …… 39
2.1.2　函数的可导性与连续性的关系 …… 43
2.1.3　几个基本初等函数的导数 …… 44
2.2　函数的求导法则 …… 46
2.2.1　函数四则运算的求导法则 …… 46
2.2.2　复合函数的求导法则 …… 48
2.2.3　隐函数的导数 …… 52
2.2.4　基本初等函数的导数公式及导数运算法则 …… 55
2.3　微分及其应用 …… 56
2.3.1　微分的基本知识 …… 56
2.3.2　微分形式的不变性 …… 58
2.3.3　由参数方程所确定的函数的导数 …… 59
2.4　微分在近似计算中的应用 …… 60
2.5　高阶导数 …… 62
2.6　中值定理与洛比达法则 …… 64
2.6.1　罗尔定理 …… 64
2.6.2　拉格朗日中值定理 …… 65
2.6.3　洛必达法则 …… 66
2.7　导数的应用 …… 70
2.7.1　函数的单调性与极值 …… 70
2.7.2　函数的最大值与最小值 …… 75
2.7.3　曲线的凹凸性与拐点 …… 76
2.7.4　函数作图 …… 79
习题二 …… 80
思考与练习解答 …… 84
习题二提示与答案 …… 89
第三章　不定积分 …… 94
3.1　不定积分的基本知识 …… 94
3.1.1　原函数与不定积分 …… 94
3.1.2　基本积分公式 …… 96
3.1.3　不定积分的性质 …… 97
3.2　换元积分法 …… 99
3.2.1　第一类换元法 …… 99
3.2.2　第二类换元法 …… 104
3.3　分部积分法 …… 107
3.4　有理函数的积分简介 …… 111
3.5　积分表的使用 …… 115
习题三 …… 117
思考与练习解答 …… 119

习题三提示与答案 …… 120

第四章 定积分及其应用 …… 123

4.1 定积分的基本知识 …… 123

4.1.1 引出定积分概念的两个实际问题 …… 123

4.1.2 定积分的定义及其几何意义 …… 125

4.2 定积分的性质 …… 127

4.3 微积分基本定理 …… 131

4.3.1 积分上限的函数及其导数 …… 131

4.3.2 牛顿-莱布尼兹公式 …… 132

4.4 定积分的换元积分法与分部积分法 …… 135

4.4.1 定积分的换元积分法 …… 135

4.4.2 定积分的分部积分法 …… 141

4.5 广义积分 …… 143

4.5.1 无穷区间上的广义积分 …… 144

4.5.2 被积函数有无穷型间断点的广义积分 …… 146

4.6 定积分的应用 …… 148

4.6.1 平面图形的面积 …… 148

4.6.2 旋转体的体积 …… 151

4.6.3 变力所做的功 …… 153

4.6.4 连续函数的平均值 …… 153

习题四 …… 155

思考与练习解答 …… 156

习题四提示与答案 …… 158

第五章 多元函数微积分 …… 160

5.1 空间解析几何简介 …… 160

5.1.1 空间直角坐标系 …… 160

5.1.2 曲面与曲线的一般概念 …… 162

5.1.3 空间平面与直线 …… 163

5.2 多元函数的基本知识 …… 165

5.2.1 平面点集与区域 …… 165

5.2.2 多元函数的概念 …… 165

5.2.3 二元函数的极限与连续 …… 167

5.3 偏导数与全微分 …… 170

5.3.1 一阶偏导数 …… 170

5.3.2 偏导数的几何意义 …… 171

5.3.3 全微分及其应用 …… 173

5.4 多元复合函数与隐函数的求导法则 …… 176

5.4.1 多元复合函数的求导法则 …… 176

5.4.2　隐函数的求导法则 …… 178
5.5　高阶偏导数 …… 180
5.6　多元函数偏导数的应用 …… 182
5.6.1　多元函数的极值与求法 …… 182
5.6.2　多元函数的最大值与最小值 …… 184
5.7　二重积分 …… 185
5.7.1　二重积分的概念与性质 …… 185
5.7.2　二重积分的计算 …… 188
习题五 …… 193
思考与练习解答 …… 194
习题五提示与答案 …… 198
第六章　常微分方程 …… 199
6.1　微分方程的基本知识 …… 199
6.1.1　两个实例 …… 199
6.1.2　微分方程的一般概念 …… 200
6.1.3　微分方程的解 …… 201
6.1.4　微分方程的几何意义 …… 202
6.2　常见的一阶微分方程 …… 203
6.2.1　可分离变量的微分方程 …… 204
6.2.2　齐次微分方程 …… 206
6.2.3　一阶线性微分方程 …… 208
6.2.4　伯努利方程 …… 213
6.3　特殊类型的高阶微分方程 …… 217
6.3.1　$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 217
6.3.2　$y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 218
6.3.3　$y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 219
6.4　二阶线性微分方程 …… 222
6.4.1　二阶线性微分方程的解的结构 …… 222
6.4.2　二阶常系数齐次线性微分方程 …… 224
6.5　微分方程在医药学中的应用模型简介 …… 229
习题六 …… 233
思考与练习解答 …… 235
习题六提示与答案 …… 236
附录　简明积分表 …… 238
参考文献 …… 247

第一章　函数的极限与连续

函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型，是微积分学研究的主要对象. 极限是研究微积分学的重要工具，微积分学中的许多概念，如导数、定积分等都是通过极限来定义的. 本章将介绍函数、极限以及函数连续性等基本概念和它们的主要性质.

1.1　函数的基本知识

1.1.1　集合简介

集合是现代数学的一个最基本的概念，数学的各个分支普遍地运用集合的方法和符号，学习高等数学、线性代数、概率统计等都必须熟悉集合的概念. **集合**是指具有某种共同属性的一些对象的全体，是一种描述性定义. 集合通常用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示，组成这个集合的每一个对象称为该集合的**元素**，常用小写字母 $a,b,c\cdots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的元素，记作 $a \in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，记作 $a \notin A$，读作 a 不属于 A. 元素 x 与集合 A 的关系只有 $x \in A$ 或 $x \notin A$，二者必择其一.

一个集合，若它只包含有限个元素，则称为**有限集**. 反之则为**无限集**. 例如，$M=\{x \mid x^2-5x+4=0\}$ 为有限集，$N=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 为无限集.

数学中常用的数集有：自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、正实数集 $\mathbf{R}^+$、复数集 $\mathbf{C}$.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$)，读作 A 包含于 B(或 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$，规定 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

1.1.2　区间和邻域

1. 区间

在数学中，常用区间表示一个变量的变化范围. 所谓区间，是一个实数集合，它的定义如下.

设 a、b 是两个实数，且 $a<b$. 则：

闭区间　$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

开区间　$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$；

半开半闭区间　$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$（左开右闭）；

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$（左闭右开）；

无限区间　$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$；

$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$；

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$；

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in \mathbf{R}\}$.

其中 a 为区间的**左端点**，b 为区间的**右端点**，其中闭区间 $[a,b]$、开区间 (a,b)、半开半闭区间 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 为有限区间，有限区间左右端点之间距离 $b-a$ 为**区间长度**. 后五个区间为无限区间，其中 $+\infty$ 与 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”与“负无穷大”，是引用的符号，不表示任何数.

2. 邻域

作为区间的特例，有时需考虑由某点附近的所有点构成的集合.

在高等数学中，我们经常会用到一些特殊的区间 $(a-\delta,a+\delta)$，称这个开区间为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$. 即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$

称点 a 为**邻域的中心**，δ 为**邻域的半径**.

通常 δ 为较小的正数，由邻域的定义知，$U(a,\delta)$ 表示点 a 的附近的点，即由 $a-\delta$、$a+\delta$ 为左、右端点的开区间，区间长度为 2δ，如图 1-1 所示.

有时候，我们只考虑点 a 附近的点，而不考虑 a，即考虑点集 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，我们称这个数集为**点 a 的 δ 去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

如图 1-2 所示.

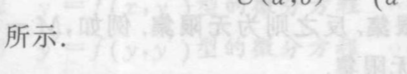

图 1-1

图 1-2

例如，$U(2,0.5)$ 表示点 2 的 0.5 邻域，也表示开区间 $(1.5,2.5)$；$\mathring{U}(2,0.5)$ 表示点 2 的 0.5 去心邻域，也表示两个开区间的并集 $(1.5,2)\cup(2,2.5)$.

思考与练习

1. 用区间表示满足下列不等式的变量 x 的变化范围.

(1) $0\leqslant x<8$；　　(2) $x<b$；

(3) $|x|<0.5$；　　(4) $0<|x-5|<0.1$.

2. 设 $x\in U(1,\delta)$ 时，$|2x-2|<\varepsilon$. 当 ε 分别等于 0.1 与 0.01 时，求邻域的半径 δ 各等于

多少？

1.1.3　常量与变量

在观察医学现象及其他自然现象时，经常会遇到两类不同的量：一类是在变化过程中保持不变、总取同一数值的量，即为**常量**；另一类是在变化过程中变化、可以取不同数值的量，即为**变量**. 例如，物体在做自由落体运动时，下落的路程 s 与下落的时间 t 是变量，而重力加速度 g 是常量.

初等数学中主要研究常量，而高等数学中主要研究的是变量，着重研究的是变量与变量之间的关系.

1.1.4　函数的概念

1. 函数的定义

通常在同一个变化过程中，变量之间并不是相互独立，而是相互联系、彼此制约的，函数关系就是表达变量之间的依赖关系.

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对任意的 $x \in D$，变量 y 按照一定的对应法则 f 有确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**. 记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**，数集 D 称为**定义域**，对应法则 f 称为**函数关系**.

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点，则称函数 $f(x)$ 在**点** x_0 **处有定义**. 与 x_0 对应的因变量的值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$. 而所有函数值的集合称为函数的**值域**，记作 $f(D)$ 或 $R(f)$.

定义域和对应法则是函数的两个基本要素. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则这两个函数为同一函数，否则为不同的函数. 判断两个函数是否为同一函数与用什么字母表示自变量和因变量无关. 例如函数 $y = x^2$ 和 $x = y^2$，这两个函数的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，且对应法则相同，所以为同一函数. 而函数 $f(x) = \dfrac{2x}{x}$ 和 $g(x) = 2$，因为两函数的定义域不相同，所以是两个不同的函数.

将平面点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 描绘在直角坐标系 xOy 内，得到的图形称为函数 $y = f(x)$ 的**图形或图**，如图 1-3 所示.

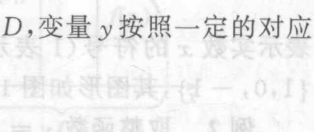
图 1-3

如果定义域 D 中任意一个 x 值所对应的函数值是唯一确定的，则称函数为**单值函数**；如果有的 x 所对应的函数值不止一个，则称函数为**多值函数**. 如函数 $y^2 = x$，其定义域为 $\{x \mid x \geqslant 0 \text{且} x \in \mathbf{R}\}$，但是对于定义域中任意一个非零的 x 值，总对应两个不同的 y 值：$y = \sqrt{x}$ 和 $y = -\sqrt{x}$，所以该函数为多值函数. 在本书的后续内容中，如无特殊说明，函数都表示单值函数.

在实际应用中，函数定义域的确定很重要. 如果是纯数学问题，函数的定义域就是使函数

有意义的自变量的集合；如果是实际问题，确定函数的定义域除了考虑数学角度有意义，还要考虑是否满足实际情况.

确定函数定义域时应注意以下四点：

(1) 如果函数的表达式中含有分式，则分式的分母不能为零；

(2) 如果函数的表达式中含有偶次方根，则根号下的表达式必须大于或等于零；

(3) 如果函数的表达式中含有对数，则真数必须大于零；

(4) 如果函数的表达式中含有反正弦函数或反余弦函数，则必须符合反正弦函数或反余弦函数的定义域，即对于 $\arcsin \varphi(x)$，$\arccos \varphi(x)$，必须满足 $-1 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$.

2. 函数的表示法

函数的表示法实际上是指表述函数关系的方法，常有以下三种方法.

(1) 解析法：用数学公式表示函数关系的方法，又称公式法. 解析法的优点是简明、准确且便于理论证明，但对很多实际问题，要想得到变量间的函数关系并不容易.

(2) 图形法：借助图形表示函数关系的方法.

例 1　符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & 当\ x > 0, \\ 0, & 当\ x = 0, \\ -1, & 当\ x < 0 \end{cases}$$

表示实数 x 的符号(1 表示正号，-1 表示负号，0 表示零). 其定义域为实数集 $\mathbf{R}$，值域为 $\{1, 0, -1\}$，其图形如图 1-4 所示.

例 2　取整函数 $y = [x]$，对任意的 $x \in \mathbf{R}$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 此函数的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为整数集 $\mathbf{Z}$，其图像如图 1-5 所示.

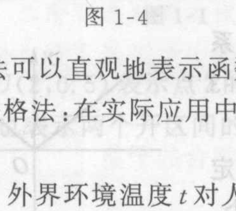

图 1-4

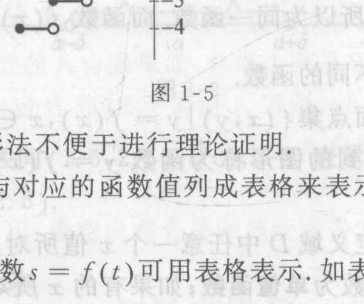

图 1-5

图形法可以直观地表示函数的变化形态，但图形法不便于进行理论证明.

(3) 表格法：在实际应用中，用一系列自变量值与对应的函数值列成表格来表示函数关系的方法.

例 3　外界环境温度 t 对人体代谢率 s 的影响函数 $s = f(t)$ 可用表格表示. 如表 1-1 所示.

表 1-1

环境温度 (t)/℃	…	4	10	20	30	38	…
代谢率 (s)/ $[\text{kcal} \cdot (\text{h} \cdot \text{m}^2)^{-1}]$	…	60	44	40	40.5	54	…

表格法的优点是直接从表格中得到一些自变量处的函数值，但难以直接反应函数间的内在规律，也不便于进行理论证明。

在理论研究和实际应用中，根据具体问题选择适合的函数表示法。

1.1.5　函数的几种特性

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) 成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调递增**（**单调递减**），而区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调递增区间**（**单调递减区间**）.

单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**，单调递增区间和单调递减区间统称为**单调区间**，单调递增（单调递减）函数的图形是沿着 x 轴正向上升（下降）的，分别如图 1-6 和图 1-7 所示.

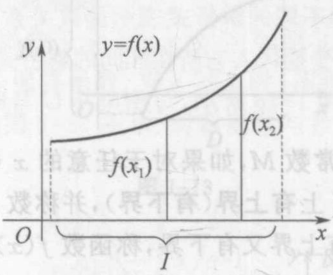

图 1-6

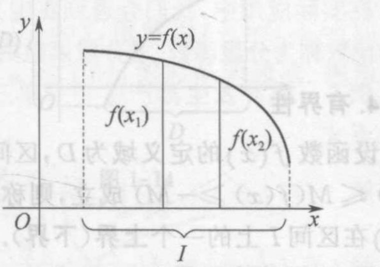

图 1-7

例如，函数 $y = e^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调递增的；函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调递减的，在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增的，但是，函数 $y = x^2$ 在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域关于坐标原点对称，如果对于任意的 $x \in D$，总有 $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) 成立，则称 $f(x)$ 是**偶函数**（**奇函数**）.

偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-8 所示；奇函数的图形关于原点对称，如图 1-9 所示.

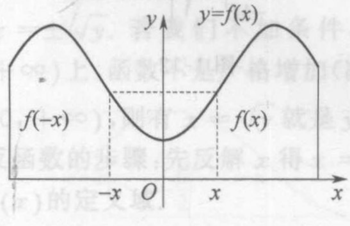

图 1-8

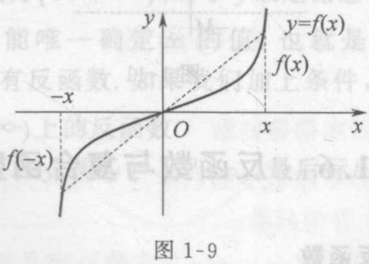

图 1-9

例如，函数 $y = x^2$ 是偶函数；函数 $y = x^3$ 是奇函数；既不是偶函数也不是奇函数的函数为**非奇非偶函数**，如 $y = \sin x + \cos x$.

注意：奇偶函数的定义域一定关于原点对称.

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，存在非零常数 T，如果对于任意的 $x \in D$，总有 $f(x+T) = f(x)$ 成立，则称此函数为**周期函数**，称 T 为函数的**周期**. 周期中最小正数称为函数的**最小正周期**，通常说的周期是指最小正周期. 如 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ 的周期为 2π，$f(x) = \tan x$ 的周期为 π，但并不是所有的周期函数都有最小正周期，如常值函数 $y = \pi$ 的周期是任意非零常数.

如果函数 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，则其图形中相邻的两个长度为 T 的区间上的图形完全相同，如图 1-10 所示.

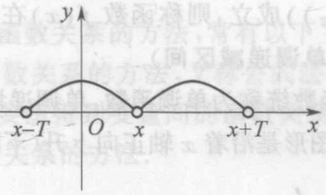

图 1-10

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，存在正的常数 M，如果对于任意的 $x \in I$，总有 $f(x) \leqslant M(f(x) \geqslant -M)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**有上界**(**有下界**)，并称数 M 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**上界**(**下界**). 若 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界，称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**，否则称为**无界**.

有界的定义可表述为：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，存在常数 $M > 0$，如果对于任意的 $x \in I$，总有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

有界函数的图形介于两条直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间，无界函数图形则相反，分别如图 1-11 和图 1-12 所示.

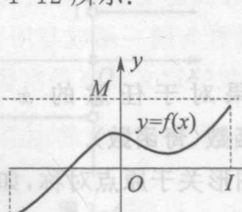

图 1-11

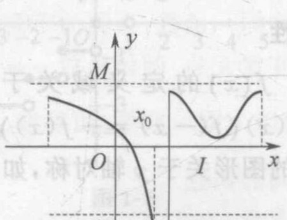

图 1-12

1.1.6　反函数与复合函数

1. 反函数

在同一过程中存在多个变量的函数关系，究竟哪一个是自变量哪一个是因变量并不是绝对的，要根据问题的具体要求而定.

定义 1　一般地，对于任意的 $y \in f(D)$，如果存在唯一的 $x \in D$，使得 x 与 y 相对应，且

满足

$$f(x) = y,$$

按照函数的定义，当我们把 y 看成是自变量，把 x 看成是因变量时，便得到一个新函数，称这个新函数为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in f(D).$$

因为习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以，函数 $y = f(x)$，$x \in D$ 的反函数通常记作 $y = f^{-1}(x)$，$x \in f(D)$，则函数 $y = f(x)$，$x \in D$ 称为**直接函数**.

这里函数 $x = f^{-1}(y)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 都是函数 $y = f(x)$ 的反函数，$x = f^{-1}(y)$ 图形与 $y = f(x)$ 的图形是一致的，如图 1-13 和图 1-14 所示. 而 $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 图形关于直线 $y = x$ 对称，如图 1-15 所示. 反函数的两种形式以后都会遇到，我们根据前后文去判断究竟是哪一种.

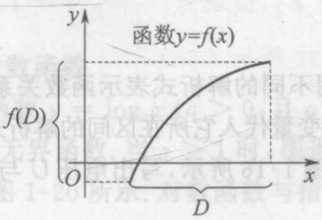

图 1-13

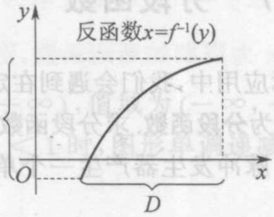

图 1-14

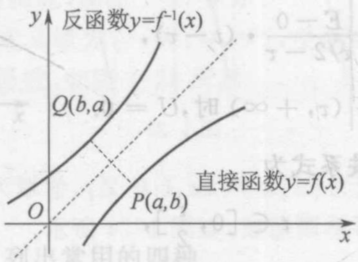

图 1-15

反函数的性质有：单调函数必有反函数，且直接函数与反函数具有相同的单调性. 反函数关系是相互的，即有 $f[f^{-1}(x)] = x$ 和 $f^{-1}[f(x)] = x$ 成立.

例 4　函数 $y = x^2$，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[0, +\infty)$，对于 y 取定任意非负值，可求得 $x = \pm\sqrt{y}$. 若我们不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上，函数不是严格增加(减少)的，故其没有反函数. 如果我们加上条件，要求定义域为 $[0, +\infty)$，则有 $x = \sqrt{y}$ 就是 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上的反函数.

求反函数的步骤：先反解 x 得 $x = f^{-1}(y)$；再互换 x, y，得 $y = f^{-1}(x)$；最后标出反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域.

2. 复合函数

设函数 $y = \sin u$，而变量 $u = x^2$，用 x^2 去代替第一个表达式中的 u，得 $y = \sin x^2$. 这里 $y = \sin x^2$ 是由函数 $y = \sin u$ 和 $u = x^2$ 复合而成的函数，这样的函数称为**复合函数**.

定义 2　若 y 是 u 的函数 $y = f(u)$，$u \in U$，而 u 又是 x 的函数，$u = \varphi(x)$，$x \in D$，且

$\varphi(x)$的函数值的全部或部分在$f(u)$的定义域内,则称函数$y=f[\varphi(x)]$是由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**,其中$y=f(u)$为外层函数,$u=\varphi(x)$为内层函数,y为因变量,x为自变量,u为中间变量.

由复合函数的定义可知,并不是任意两个函数都能复合成有意义的函数,两个函数能复合有意义的函数的关键是:内层函数的值域与外层函数定义域的交集不是空集.例如,函数$y=\arcsin u, u\in[-1,1]$和$u=x^2+2, u\in[2,+\infty)$复合成函数就没有意义.

另外,复合函数可由多个函数构成,即可以有多个中间变量.例如,复合函数$y=\sin(e^{x^2})$是由函数$y=\sin u, u=e^v$和$v=x^2$三个函数复合而成,有两个中间变量u和v.

在微分学中,经常需要把一个复合函数"分解"成若干个简单函数,因此我们必须熟练掌握复合函数的复合与分解的方法.

1.1.7 分段函数

在实际应用中,我们会遇到在定义域内的不同区间用不同的解析式表示函数关系的函数,这样的函数称为**分段函数**.求分段函数的函数值时,必须将自变量代入它所在区间的解析式中计算.

例5 脉冲发生器产生一个单三角脉冲,其波形如图1-16所示,写出电压U与时间t的函数关系式.

解 当$t\in[0,\frac{\tau}{2}]$时,$U=\frac{E}{\tau/2}t=\frac{2E}{\tau}t$;

当$t\in(\frac{\tau}{2},\tau]$时,$U-0=\frac{E-0}{\tau/2-\tau}\cdot(t-\tau)$,

即$U=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau)$;当$t\in(\tau,+\infty)$时,$U=0$.

则电压U与时间t的函数关系式为

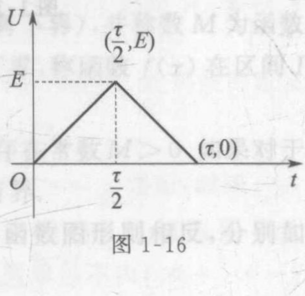

图 1-16

$$U(t)=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}t, & t\in[0,\frac{\tau}{2}],\\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau), & t\in(\frac{\tau}{2},\tau],\\ 0, & t\in(\tau,+\infty).\end{cases}$$

上式中,电压U与时间t的函数关系式$U(t)$就是一个分段函数,定义域为$[0,+\infty)$.

1.1.8 初等函数

1. 基本初等函数

在初等数学中我们学过下面六类基本初等函数.

(1) 常值函数

常值函数$y=c$(c为常数),定义域为实数集$(-\infty,+\infty)$,值域为单点集$\{c\}$,偶函数,没有最小正周期的周期函数,它的图形是平行于x轴的直线,如图1-17所示.

(2) 幂函数

幂函数$y=x^\mu$(μ为常数),其定义域、值域、奇偶性、单调性都随μ而异,其共性是在区间

$(0,+\infty)$上有定义，图形过点$(1,1)$，如图 1-18 所示.

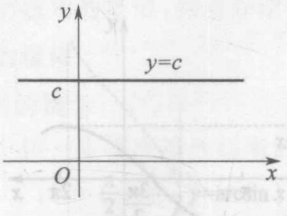

图 1-17

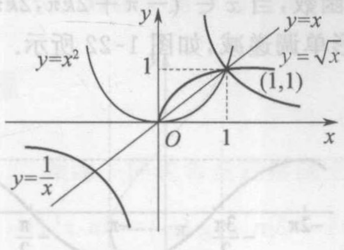

图 1-18

(3) 指数函数

指数函数 $y=a^x\,(a>0$，且 $a\neq1)$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，非奇非偶函数，无界函数. 当 $a>1$ 时，图形单调递增；当 $a<1$ 时，图形单调递减. 图形过点$(0,1)$，如图 1-19 所示.

(4) 对数函数

对数函数 $y=\log_a x\,(a>0$，且 $a\neq1)$，定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，非奇非偶函数，无界函数. 当 $a>1$ 时，图形单调递增；当 $0<a<1$ 时，图形单调递减. 图形过点$(1,0)$，如图 1-20 所示. 对数函数与指数函数互为反函数.

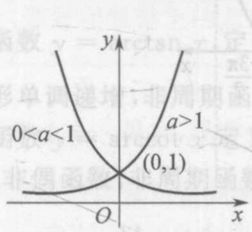

图 1-19　$y=a^x$

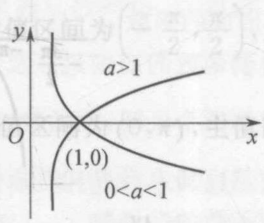

图 1-20　$y=\log_a x$

(5) 三角函数

三角函数共有六种，下面只列出常用的四种.

正弦函数 $y=\sin x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，奇函数，有界函数. 以 2π 为周期的周期函数，当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，其图形单调递增；当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，其图形单调递减，如图 1-21 所示.

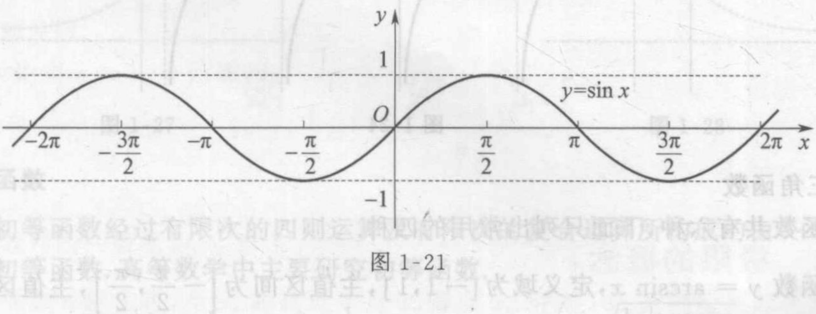

图 1-21