高等院校教材同步辅导
及考研复习用书

理工社

3

张天德◎主编

高等数学辅导

同济七版·下册

·同济七版·
全新升级

年销量10万册《高等数学辅导》

考点图解+题型归总+真题精讲+习题全解

关注微信公众号
听免费课程

扫码观看高数
常考题型精讲视频

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等院校教材同步辅导
及考研复习用书

高等数学辅导

同济七版·下册

张天德◎主编

窦慧、王玮、赵树欣◎副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学辅导：同济七版．下册／张天德主编．—北京：北京理工大学出版社，2018.6

ISBN 978-7-5682-5753-4

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 113619 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
　　　　　（010）82562903（教材售后服务热线）
　　　　　（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本／710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张／18.5
字　　数／378 千字
版　　次／2018 年 6 月第 1 版　2018 年 6 月第 1 次印刷
定　　价／32.80 元

责任编辑／王俊洁
文案编辑／王俊洁
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前　言

高等数学是理工类专业的一门重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学(第七版)》是一部深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材。为了帮助读者学好高等数学，我们编写了《高等数学辅导(同济七版)》，该书与同济大学数学系主编的《高等数学(第七版)》配套，汇集了编者几十年的丰富经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中。本书将会成为读者学习高等数学的良师益友。

本书的章节划分和内容设置与同济大学数学系主编的《高等数学(第七版)》教材完全一致。在每一章的开头先对本章知识点进行简要地概括，然后用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

讲解结构七大部分

一、知识结构图解　用结构图解的形式对每节涉及的基本概念、基本定理和基本公式进行系统梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需要注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、重点及常考点分析　分类总结每章重点题型以及重要定理，使读者能更扎实地掌握各个知识点，最终提升读者的应试能力。

三、考研大纲要求解读　帮助读者了解本章内容在考研试题中考查的考点及题型，为复习备考指明方向，使读者准备考试更加轻松。

四、例题精解　这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题及全国大学生数学竞赛试题的研究，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研和数学竞赛中经常考到的重点、难点、考点归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量精选例题，深入讲解，使读者扎实掌握每一个知识点，并能在具体解题中熟练运用。本书使基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动，一举突破难点，从而使学生获得实际应用能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的"思路探索""方法点击"，更是巧妙点拨，让读者举一反三、触类旁通。

五、本章知识小结　对本章所学的知识进行系统回顾，帮助读者更好地复习、总结、提高。

六、本章同步自测　精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年研究生入学考试和大学生数学竞赛试题)，以此检测、巩固读者所学知识，达到提高应试水平的目的。

七、教材习题详解　为了方便读者对课本知识进行复习巩固，本书对教材课后习题做了详细解答，这与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，本书对部分有代表性的习题设置了"思路探索"，以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；本书安排了"方法点击"来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。针对部分习题，本书还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维的能力。

内容编写三大特色

一、重新修订、内容完善　本书是《高等数学辅导(同济六版)》的最新修订版,前一版在市场上受到了广大学子的欢迎,每年销量都在10万册以上。本次修订增加了大学生数学竞赛试题,更新了研究生入学考试试题,改正了原来的印刷错误,内容更加完善,体例更为合理。

二、条理清晰、学习高效　知识点讲解清晰明了,分析透彻到位,既对重点及常考知识点进行归纳,又对基本题型的解题思路、解题方法和答题技巧进行了深层次的总结。据此,读者不仅可以从全局上对章节要点有整体性的把握,更可以纲举目张,系统地把握数学知识的内在逻辑性。

三、联系考研、经济实用　本书不仅是一本与教材同步的辅导书,也是一本不可多得的考研复习用书,书中内容与研究生入学考试联系紧密。本书在知识全解版块设置"考研大纲要求"版块,例题精解和自测题部分选取大量考研真题,让读者在同步学习中达到考研的备考水平。

本书由张天德任主编,由窦慧、王玮、赵树欣任副主编。衷心希望我们的这本《高等数学辅导(同济七版)》能对读者有所裨益。由于编者水平有限,书中疏漏之处在所难免,不足之处敬请读者批评指正,以便不断完善。

张天德

目　录

教材知识全解(下册)

教材知识全解

（下册）

第八章　空间解析几何与向量代数

本章内容概览

空间解析几何与平面解析几何的思想方法类似，都是用代数方法研究几何问题，其重要工具就是向量代数，众所周知，平面解析几何的基础对于学习一元微积分是至关重要的. 同样，空间解析几何的知识对于多元微积分的学习也是必不可缺的.

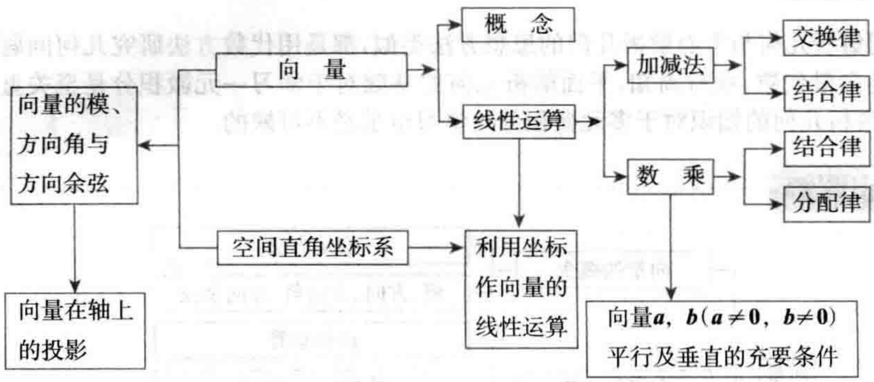
本章知识图解

- 空间解析几何与向量代数
  - 向量代数
    - 向量的概念
      - 表示方法
      - 模、方向、方向角、方向余弦
    - 向量的运算
      - 线性运算
      - 数量积、向量积
      - 混合积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$
    - 向量的位置关系
      - 两向量垂直、平行
      - 三向量共面
  - 解析几何
    - 平面方程
      - 点法式
      - 一般式
      - 截距式
    - 直线方程
      - 一般式
      - 对称式
      - 参数式
    - 线面关系
      - 面面关系
        - 夹角
        - 平行、垂直
      - 线线关系
        - 夹角
        - 平行、垂直
      - 线面关系
        - 夹角
        - 平行、垂直
    - 曲面
      - 旋转曲面
      - 柱面
      - 二次曲面
    - 曲线
      - 投影曲线
      - 参数式、一般式方程

第一节　向量及其线性运算

知识全解

一 本节知识结构图解



二 重点及常考点分析

1. 向量.

(1)定义.

既有大小又有方向的量称为向量.

(2)向量的表示.

用空间有向线段来表示向量. 例如$\overrightarrow{AB}$表示以 A 为起点，以 B 为终点的向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段所指的方向表示向量的方向. 当向量定义为有向线段时，它只具有长度和方向两要素，与起点无关.

(3)向量相等.

大小相等且方向相同的两个向量相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(4)向量的模.

向量的大小称为向量的模，记为$|\boldsymbol{a}|$.

(5)单位向量、零向量及负向量.

模等于 1 的向量称为单位向量；模等于 0 的向量称为零向量，其方向是任意的；与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$.

(6)平行向量.

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行，记为$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量与任何向量都平行.

(7)向量的坐标.

将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与空间直角坐标系的原点重合，则向量 $\boldsymbol{a}$ 终点的坐标(x,y,z)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为(x,y,z)，并且$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

设向量的起点和终点分别为 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，则向量

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

(8)方向角与方向余弦.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴的三个夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$，故 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\boldsymbol{e}_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(9)向量在轴上的投影.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 u 轴的夹角为 φ，则 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 $(\boldsymbol{a})_u$.

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\varphi,\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2,$$

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a},$$

向量在与其方向相同的轴上的投影称为向量的模 $|\boldsymbol{a}|$.

在空间直角坐标系中，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标 (x,y,z) 是 $\boldsymbol{a}$ 向各坐标轴的投影. 向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成分量形式 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

2. 向量的线性运算及性质.

(1)加减法运算.

向量加法运算服从平行四边形法则或三角形法则. 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2).$$

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点，则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 即为从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$.

n 个向量相加 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ 等于将 n 个向量首尾顺次相连后，从 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点所确定的向量.

(2)数乘运算.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向规定如下：

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向任意.

(3)性质.

①$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

②$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

③$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

④$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

⑤设 $\boldsymbol{a}$ 是一非零向量，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

三　考研大纲要求解读

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的线性运算，掌握单位向量、方向角与方向余弦. 向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

第八章

例题精解

基本题型 1:有关向量的定义、线性运算、模、方向角、方向余弦、向量的坐标表示等基本问题

例 1 一向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角相等,与 z 轴正向的夹角是前者的两倍.求与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

【思路探索】 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量就是以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量.故问题求解的关键在于求出向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解: 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角为 α,则它与 z 轴正向的夹角为 2α,那么 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦分别是 $\cos\alpha,\cos\alpha,\cos 2\alpha$. 又 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2(2\alpha)=1$,即

$$2\cos^2\alpha-1+\cos^2(2\alpha)=0.$$

由此得到 $\cos 2\alpha(\cos 2\alpha+1)=0$,所以 $\cos 2\alpha=0$ 或 $\cos 2\alpha=-1$.

又因为 $2\alpha\in[0,\pi]$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$,则

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=0 \text{ 或 } \cos\alpha=0,\cos\beta=0,\cos\gamma=-1.$$

因此,所求的单位向量为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 或 $(0,0,-1)$.

【方法点击】 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 有关系式:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 2 设 $\boldsymbol{a}=(4,5,-3)$,$\boldsymbol{b}=(2,3,6)$,求 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦.

解: 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量,因此

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}}(4,5,-3)=\left(\frac{4}{\sqrt{50}},\frac{5}{\sqrt{50}},\frac{-3}{\sqrt{50}}\right).$$

同理,设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{b}^{\circ}$,则

$$\boldsymbol{b}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}(2,3,6)=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right),$$

从而,$\boldsymbol{b}$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\frac{2}{7}$,$\cos\beta=\frac{3}{7}$,$\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

【方法点击】 向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦就是与 $\boldsymbol{b}$ 同方向的单位向量的各坐标分量.

基本题型 2:利用向量的运算与性质求证的证明题

例 3 用向量的方法证明:三角形的中位线平行于底边,且它的长度等于底边的一半.

证明: 设 $\triangle ABC$ 中,D,E 分别为 AB,AC 的中点,因为

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

所以 $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$,即 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

故

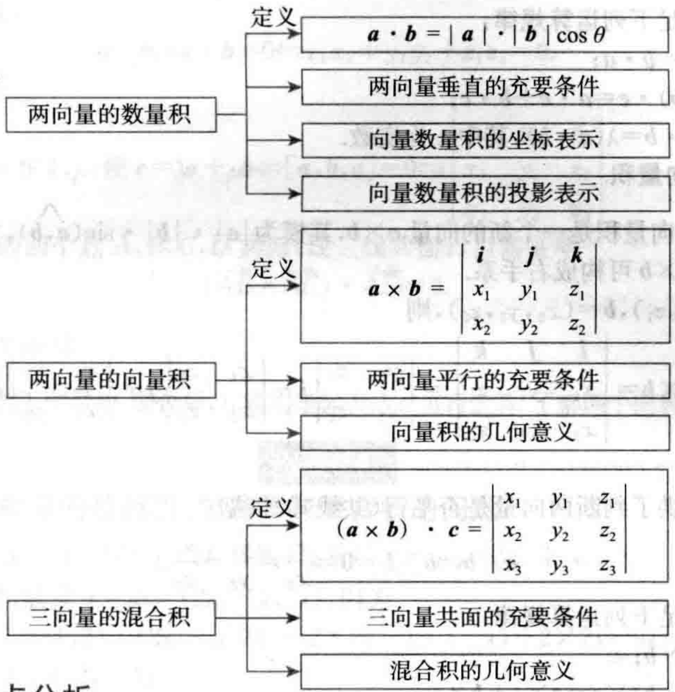
$$\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{BC} \text{ 且 } |\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|,$$

结论得证.

第二节　数量积　向量积　*混合积

知识全解

一　本节知识结构图解



二　重点及常考点分析

1. 两向量的数量积.

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个给定的向量,它们的数量积定义为:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$,其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

在空间直角坐标系下,若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

(1)数量积的引入,为我们提供了刻画向量夹角关系的数学工具,这体现在:

向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 为非零向量,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,可通过

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

计算得出.

上式又可理解为两个单位向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 的数量积,即

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}^{\circ}\cdot\boldsymbol{b}^{\circ}.$$

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^{\circ},$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与单位向量 $\boldsymbol{b}^{\circ}$ 的数量积表示 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}^{\circ}$ 方向的投影.

(3)用数量积表示向量的模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(4)数量积提供了判断两个向量是否垂直的依据：

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

(5)用投影可以表示向量的数量积：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

(6)数量积满足下列运算规律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中 λ 为实数.

2. 两向量的向量积.

两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个新的向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其模为 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于 $\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 可构成右手系.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2)向量积提供了判断两向量是否平行(共线)的依据：

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

(3)向量积满足下列运算规律：

①$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

②分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,；

③结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为实数).

其中，第一个运算规律说明向量积不具有交换律. 这同通常的乘法运算有很大区别，不能照搬常用的乘法公式. 如

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

(4)向量积的引入为我们提供了刻画两向量公垂线方向的数学工具. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向就是既与 $\boldsymbol{a}$ 垂直又与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的公垂线方向. 即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面.

3. 三向量的混合积.

三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合乘法运算 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积，记为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$. 在空间直角坐标系下，设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$，则

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

(1)根据行列式的运算性质，得到混合积的交换法则：

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],$$
$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}].$$

(2)混合积的引入，为我们提供了三个向量共面的依据：

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0.$$

4. 向量之间的几何关系.

(1)两向量平行(共线):

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

要证明不重合的三点 A,B,C 共线,只需证明 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=0$.

(2)两向量垂直:

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

(3)三向量共面:

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow\text{存在 }\lambda,\mu,\text{使 }\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0.$$

要证明不重合的四个点 A,B,C,D 共面(或三线共面),只需证明

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0.$$

三 考研大纲要求解读

掌握向量的数量积、向量积、混合积,并能用坐标表达式进行运算.了解两个向量垂直、平行的条件.

例题精解

基本题型 1:有关向量的数量积、向量积与混合积的问题

例 1 设未知向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线,且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$.求 $\boldsymbol{x}$.

解:由于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,故设 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$,因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=(2,-1,2)\cdot(2\lambda,-\lambda,2\lambda)=2\times2\lambda-1\cdot(-\lambda)+2\times2\lambda=9\lambda=-18,$$

得到 $\lambda=-2$.故 $\boldsymbol{x}=(-4,2,-4)$.

例 2 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$,则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$______.(考研题)

解:原式 $=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.$$

故应填 4.

【方法点击】 本题综合考查向量的数量积、向量积及混合积的定义,直接利用其运算性质可得结果.有关混合积的性质为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$$

其中混合积中的三个向量若有两个向量是重合或平行时,则其混合积为零.

例 3 设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$,$\boldsymbol{b}=(3,-4,5)$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,问 λ 取何值时,$|\boldsymbol{c}|$ 最小?并证明:当 $|\boldsymbol{c}|$ 最小时,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

解:$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$$

$$=|\boldsymbol{b}|^2\lambda^2+2\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{a}|^2,$$

则当 $\lambda=-\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|^2}=-\dfrac{1\times3+(-1)\times(-4)+1\times5}{3^2+(-4)^2+5^2}=-\dfrac{12}{50}=-\dfrac{6}{25}$ 时,$|\boldsymbol{c}|$ 最小.此时

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$$