100 个脑洞谜题集合

三个逻辑学家去酒吧

Kommen drei Logiker in eine Bar

HOLGER DAMBECK

loading...

上瘾！

让 20 万德国人每周头秃的智力挑战

首度引进

霍格尔·丹贝克 著
吉 译

京联合出版公司

三个逻辑学家去酒吧

三个逻辑学家去酒吧

Kommen drei Logiker in eine Bar

HOLGER DAMBECK

[德] 霍格尔·丹贝克 著
罗松洁 译

北京联合出版公司
Beijing United Publishing Co.,Ltd.

三个逻辑学家去酒吧

[德]霍格尔·丹贝克 著
罗松洁 译

图书在版编目(CIP)数据

三个逻辑学家去酒吧/(德)霍格尔·丹贝克著;罗松洁译. — 5版. — 北京:北京联合出版公司,2019.6

ISBN 978-7-5596-3064-3

Ⅰ.①三… Ⅱ.①霍… ②罗… Ⅲ.①逻辑学—通俗读物 Ⅳ.①B81-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第057314号

Kommen drei Logiker in eine Bar

by Holger Dambeck

Originally published in the German language as "Kommen drei Logiker in eine Bar" by Holger Dambeck

选题策划 联合天际·王 微
责任编辑 李 伟
特约编辑 何 川
美术编辑 冉 冉
封面设计 汐 和

UnRead
—
思想家

出 版 北京联合出版公司
北京市西城区德外大街83号楼9层 100088
发 行 北京联合天畅文化传播公司
印 刷 三河市冀华印务有限公司
经 销 新华书店
字 数 100千字
开 本 880毫米×1230毫米 1/32 8.75印张
版 次 2019年6月第1版 2019年6月第1次印刷
ISBN 978-7-5596-3064-3
定 价 58.00元

关注未读好书

未读 CLUB
会员服务平台

前言

Vorwort

数学究竟是什么?

我总是会听到这样的问题。我知道有很多人都认为数学就是关于计算或者关于一些公式的。

然而，数学其实恰恰是为了避免计算，为了尽可能地避免烦琐、复杂的一切而产生的。对于这一点，或许不是每个数学家都同意，但这一点至少对本书的 100 道谜题而言是绝对适用的。

本书是由已经在《明镜周刊》(网络版)上发表过的《每周谜题》和我精心挑选的新难题组合而成。

这些谜题经常被称为所谓的“娱乐数学”。曾经，我觉得这个概念并不恰当。这个概念总使我想起各种“娱乐音乐”，每当这时，我的耳朵里就会响起那些可怕的流行乐。

但后来我觉得这不算什么，因为与数学打交道确实是一件

十分有趣的事，数学本身就非常具有娱乐性。数学让我们用日常生活里完全没有过的方式来使用我们的大脑。当你面对一道看起来无法解答的题，而它的答案却突然闪现在你的面前时，没有什么能比这种“恍然大悟”的体验更棒的了。

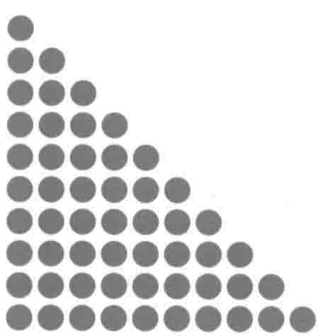
正如我所说，数学可以让我们避免那些烦琐复杂的计算。因此，比起我们在学校里学到的那些呆板的固定模式，常常会有许多更具创造性和更优雅的方法来解答同一道题。

有两道例题足以证明这一点。而你很可能已经见过第一道例题了：

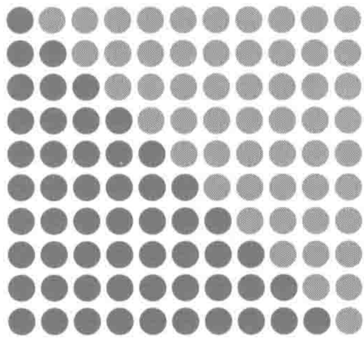
从 1 到 10 的整数总和是多少？

这道题有一种非常漂亮的类几何解答方法。我们可以将这 10 个数字画成圆点的集合。总共 10 行。第 1 行是 1 个圆点，第 2 行是 2 个圆点，以此类推，第 10 行是 10 个圆点。

画出的圆点如下图所示。不过，这张图还不能解答问题。



现在，我们把这些圆点集合旋转 180 度，放置在与原图对称的右上角，答案已经呼之欲出了。



这两个合并而成的圆点集合形成了一个矩形，由 10 行、每行 11 个圆点组成，也就是共 110 个圆点。因为这是两个圆点集合的数量，所以我们只需要将这个数除以 2，就得到了正确答案：55。

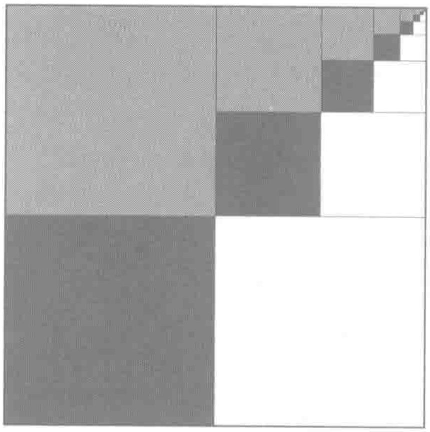
第二道例题就不这么容易了。但是，一个简单的图形同样能让答案不言而明。

$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots$ 的总和是多少？

即从 $\frac{1}{4}$ 开始，4 的 n 次幂的倒数的总和是多少？

答案是 $\frac{1}{3}$。画一个平分为 4 份的正方形即可求证答案。

将正方形右上方的 $\frac{1}{4}$ 部分再次划为 4 份，以此类推。见下图：



当我们想要计算 $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$的总和时，我们只需要将正方形的黑色部分相加，因为它们所对应的正是正方形平面的 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{64}$，…

决定性的窍门就是：当我们将黑色部分和与之大小相同的白色与灰色部分全部相加时，正好是整个正方形的大小。于是：

$$1 = 3 \times \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)$$

我们再除以 3 就得到了正确结果。

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$$

这很复杂吗？但愿你不会有这样的感觉。

祝愿你在接下来的 100 道题中玩得愉快！希望你尽可能

多地体验到如何从一窍不通到灵光一现想出绝妙解答方法的过程。

霍格尔·丹贝克

德国汉堡，2017 年 6 月 15 日

引言：如何解开数学谜题

这本书能来到你的手上，我相信绝非偶然。你可能很喜欢数学，并且一定也很爱思考。所以，我想提前给你一些建议，这样你就不会对接下来的这些谜题感到绝望。虽然我并不能给大家提供所有人都普遍适用的解答策略——这种策略也根本不存在，但是，我还是有一些如何解决难题的意见可以供你参考。如果你读过我的其他书，那么你可能会对其中的一两个建议感到熟悉，因为那本书里有一整篇章节是关于如何找到创造性的解答方法。在本书中，我扩充了这些建议，用更缜密的方式来阐述。

不要放弃，坚持到底

要坚持！如果你想解决一道难题，首先，你应该从头到

尾彻底地思考一遍。当你毫无头绪时，不要马上去翻答案，多一些耐心，也可以暂时将这道难题放在一边，先试试下一道谜题，这能帮助你换一种思维，也许你就会撬开之前还没有解决的难题。另外，在第二天早晨刷牙的时候，也很可能会有令人惊喜的灵光闪现。

仔细分析题目文本

首先，你自己必须理解这道题。当你阅读题目文本，遇到一些不好理解的地方时，就该注意了，这些题目中的“绊脚石”经常会提供有价值的提示。我们就拿与本书习题 12 相似的题目来举例：

两个俄罗斯数学家在飞机上偶遇。

“你有三个儿子，是不是？”其中一个数学家问道，“他们现在多大了啊？”

“他们的年龄的乘积是 36，”另一个数学家回答道，“年龄的总和正是今天的日期。”

“呃，这些条件还不够。”提问的数学家说道。

“噢，对了，我忘说了，我大儿子有一只狗。”

那么这三个儿子的年龄分别是多大呢？

你也觉得提到狗这一点很奇怪吧？如果你再仔细想一下，

就会发现，这里还可以用一只猫、一台游戏机或一种头发的颜色来替代这只狗。这句话之所以看起来很重要，是因为有其他的细节。至于怎么解题，在这里我先不过多透露。

系统性分析

如果解决方式清楚明了，那就值得把所有能想到的推论都写下来，并逐个查看。这对逻辑谜题尤其适用。举例来说：当你听到三个人在说话并知道其中有一人在说谎时，谁是那个说谎者？

人物 A：“B 在说谎。”

人物 B：“C 在说谎。”

人物 C：“我没说谎。”

面对这样的逻辑谜题，你可以制作一个小小的表格，这个表格也叫作真值表。在这个表格里，把所有可能的情况都列出来：

	情况 1	情况 2	情况 3
人物 A：“B 在说谎”	说谎	真	真
人物 B：“C 在说谎”	真	说谎	真
人物 C：“我没说谎”	真	真	说谎
	矛盾	有可能	矛盾

将表列出后，你可以对照这几种情况里的说辞是否矛盾。在这里，情况 2 没有问题，情况 1 和情况 3 都有逻辑上的矛盾。

情况 1：B 说 C 在说谎，但情况 1 里的说谎者是 A，两种说法相互矛盾。

情况 3：A 说 B 在说谎，但此情况里的说谎者是 C，两种说法自相矛盾。

因此，情况 1 和情况 3 不可能是正确答案。只有情况 2 还有可能，并且没有逻辑上的矛盾，只有 B 一个说谎者。

将问题尽量简单化

我们常常会面对那种需要我们分析全部情况或数值很大的问题，要想解决这类问题，非常困难。例如，有 100 个说谎者和 100 个诚实的人坐在一张桌子旁，他们在说一些奇怪的事情。面对这种问题，你可以先尝试一下简化的版本——一张桌子旁坐着两个说谎者和两个只说真话的人——在简化版的解题过程中，你或许能找到其他解决更大问题的途径。

另辟蹊径

离开熟悉的路径——这是形成创造性想法最重要的方式之一。这一点在数学中常常很难实现，因为我们习惯于运用自己学过的解答技巧。就像坐火车去旅行一样，我们能到达的只是

那些铺有铁轨的地方。

换一个视角或者改变一下问题的形式，常常会很有帮助。也许一道与数字有关的题也可以从几何的角度来解答。举一个例子：

为了在14点的时候到达山上的小屋，一个男人在10点时从山谷里开始了他的徒步远足。到达后，他在小屋里住了一晚。第二天上午10点，这个男人又开始走回山谷。由于是走下山路，他在14点之前就回到了山谷。请你论证：这两天里，在10点到14点之间，哪一个时间点上这个徒步者恰好处在同一高度位置？

我们对山的高度、走势以及徒步者的速度一无所知。尽管如此，只要我们把这个问题改动一下，解答方式就很简单了：

两个男人在10点时开始了最多四个小时的徒步远足。一个人从山谷向山上走，另一个人从山上向山谷走。请你论证：在10点到14点之间，哪一个时间点上这两个徒步者恰好处在同一高度位置？

现在，解题方式就很简单了：只需要求出两个徒步者在远足途中相遇的瞬间。

再举一道题：

1 + 2 + 3 + 4 + … + 97 + 98 + 99 + 100 的总和是多少？

我们当然可以在大脑里或者用便携计算器来计算。但年轻的卡尔·弗里德里希·高斯（Carl Friedrich Gauss）早就知道一种更好的方法。他将这些数字全部分类整理：

（1 + 100）+（2 + 99）+ … +（50 + 51）的总和是多少？

我们可以直接写出结果：50 × 101=5 050。

最后再举一道针对创造性解决方法的题。这是一道关于日历的题，解决这道题有一个非常特别的诀窍：

一个男人有两个木制的立方体，他可以用它们呈现出一个月从 01 号到 31 号的日期。请问这两个立方体上都有哪些数字？

分析这个问题相对简单：每个立方体上只能有六个数字，也就是说我们需要将 0~9 的数字合理分布到这两个立方体上，问题是：该如何分布？一个月的日期是从 01 号开始直至 31 号结束的，就是说无论如何都会有一个 11 号和一个 22 号，即数字 1 和数字 2 必须出现在两个立方体上。

为了呈现出从 01 号到 09 号的日期，数字 0 也需要同时出

现在两个立方体上。

从1到9有九个数字，而在一个立方体上只能有六个不同的数字。0，1，2——两个立方体上均有三面被这三个数字占据。两个立方体总共有十二个面，现在还剩六个面，可气的是剩下了七个数字：3，4，5，6，7，8，9。

如果我们在第一个立方体上写0，1，2，3，4，5，第二个立方体写上0，1，2，6，7，8，那么9就没有地方安置了。

怎么办？难道答案根本不存在？不，有一个答案，而这个答案我们已经找到了：当我们需要数字9时，把数字6倒过来就好了。如此，这个立方体日历的谜题就解开了。

社会工程学

有时候我解一道题，很怕这题可能会有看不到头的多个答案。例如下面这一题：

请找出所有包含数字0，1，2，3，4，5，6，7，8，9的十位数的质数（质数只能被1和其自身整除）。

如果你知道一些组合学，就会明白，这十个数字可以组合成三百多万个不同的数字。该如何检验每个数字是不是质数？是谁想出了这么难的一道题？

更有可能的情况是，这题要么只有一个答案，要么压根儿

就没有答案。我们这道题就是后一种情况。

有一个规律可以帮助我们解决这道题[1]：所有由这十个数字组成的十位数，字面数字相加都是 45（=1+2+3+4+5+6+7+8+9）。45 不仅可以被 3 整除，还可以被 9 整除，而由这十个数字组成的十位数都可以被 3 和 9 整除。因此，它们全都不是质数。

间接取代直接

上面的题是关于三百多万个不同的数字。这里我们再进一步到无限多的数字。

请证明，质数是无限多的。

我们可以尝试把所有质数都逐一编号列举。与此同时，可以肯定的是，这种做法根本没完没了。用这种方法，我们无论如何也无法证明质数是无限多的。

---

[1] 如果一个三位数的百位数字是 a，十位数字是 b，个位数字是 c，那么这个三位数可以表示为：

$100a+10b+c$

$=(99+1)a+(9+1)b+c$

$=99a+a+9b+b+c$

$=(99a+9b)+(a+b+c)$

$99a+9b$ 肯定能被 3 整除，所以只要 $a+b+c$ 的和能被 3 整除，这个三位数就能被 3 整除。以此类推，十位数也适用此理。这就是横加数规律。

面对这种问题，我们要做的不是直接解决问题，而是间接着手，然后再反绕过来。入室抢劫者基本上是这么做的：他们不会撬开房屋大门上厚重的锁，而是去到房屋的背面，然后在那里找到比较好打开的地下室窗户。

我们用反驳论点的对立面这种间接方式非直接地证明论点。由于数学的逻辑一致性，间接证明是完全有可能的。一个论点要么正确，要么错误，两个相矛盾的论点不可能同时为真。

因此我们假设，只存在有限多的质数，更确切地说有 n 个质数。我们将这些质数列为 p_1，p_2，p_3，…，p_n，并将它们相乘：

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n$$

我们得到了一个有趣的自然数：它可以被 n 个质数，即 p_1，p_2，p_3，…，p_n 里的任意一个整除，因为这个数是所有这些质数的乘积。现在就是真正诀窍了，我们在 n 个质数的乘积之上再加上数字 1：

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1$$

所得之数也是一个自然数。然而，它不能被 n 个质数里的任何一个整除，更确切地说，在做除法时总会有一个多余的 1。因此，这个数自身即是质数，它不包含在 p_1，p_2，p_3，…，p_n