

新东方
XDF.CN

决胜考研丛书

postgraduate 考研数学过关必做800题



(数学二)

新东方国内大学项目事业部 | 编著

题型全面涵盖，准确考查
遵照科目章节，有的放矢
基础强化拔高，循序渐进
紧密结合考点，高度仿真

新东方决胜考研丛书

考研数学过关必做 800 题

(数学二)

新东方国内大学项目事业部 编著



华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

考研数学过关必做 800 题. 数学二/新东方国内大学项目事业部编著. —武汉: 华中科技大学出版社, 2019. 5
(新东方决胜考研丛书)
ISBN 978-7-5680-5141-5

I. ①考… II. ①新… III. ①高等数学-研究生-入学考试-习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 083662 号

考研数学过关必做 800 题(数学二)

新东方国内大学项目事业部 编著

Kaoyan Shuxue Guoguan Bizuo 800 Ti (Shuxue Er)

策划编辑: 谢燕群

责任编辑: 余 涛

封面设计: 原色设计

责任校对: 刘 竣

责任监印: 徐 露

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

电话: (027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园

邮编: 430223

录 排: 武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷: 武汉华工鑫宏印务有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 18.25

字 数: 472 千字

版 次: 2019 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 42.80 元



华中出版

本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

新东方决胜考研丛书编委会

吴 强	周 雷	甘 源	高林显
俞彦芳	张 伟	朱佳佳	刘细艳
金 铃	李 琳	柴俊锋	李媛斌
吴 博	海 量	张宝硕	吴正权
周 浩	殷志川	陈剑飞	

本书编委会

策 划	周 雷	甘 源	
主 编	周 雷	高林显	
副主编	张 伟		
编 者	崔原铭	冯 志	李 芳
	刘 艳	郑 帅	

序

对每一位考研学子而言,无论考研是为了提升将来就业的竞争力,还是出于对某一专业的热爱而想继续深造,考研都是一次重要的人生抉择,是为了改变自己的前途和命运而进行的一场奋斗。为了梦圆心仪的学校,许多考生卧薪尝胆、焚膏继晷,然而面对浩茫无涯的复习内容,难免会产生欲济无舟楫之感。倘若此时,能够遇到一本贴心周到、内容精准的考研指导用书,或者得到一位经验丰富、声誉卓著的考研名师的点拨,可谓善莫大焉。

由新东方国内大学项目事业部推出的决胜考研丛书可称得上这样的备考利器。新东方国内大学项目事业部是新东方面对国内考试项目培训而设置的部门,不仅提供多个考研核心培训课程,通过面授和网络培训,每年帮助数以万计的考生实现了读研的梦想,而且,新东方国内大学项目事业部设有专业的教研中心,集结了众多新东方国内考试名师,全面负责大学四六级考试、英语专业、考研无忧计划、考研直通车、VIP 一对一、考研封闭集训营、考研全科等课程和公务员考试的设计与相应课程配套教材的研发工作。专业的研发,使得本系列图书能时刻把握考研的动态,保证图书内容的针对性和有效性。

新东方决胜考研丛书始于 2011 年上市的考研英语系列图书,其最大的特点是解析详尽,准确独到,以真正解决实际问题为原则,重视培养考生实际解题技能;同时,渗透了当代语言教学与研究的最新成果,并采用先进的语料库技术对相关考点进行梳理。面市当年,就赢得广大考生的青睐,成为考研英语图书市场的领军品牌。经多年深耕,决胜考研丛书从英语学科已延伸至政治、数学、专业课等学科领域,涵盖真题、模拟题、考点精编、专项突破等方面。这套丛书的编撰者都是新东方教学一线的名师,他们学养深厚,经验丰富,熟谙所执教学科考试的重难点和命题规律,确保了本套丛书的专业性和权威性。同时,部分内容基于新东方教师的课堂讲义,是新东方教师教学经验的总结与反思,是教师沉淀的精华所在,并且经新东方学员多轮使用而不断完善,具有很强的指导意义。

近年来,随着考研难度的增加和考法的多变,像过去那种孤军奋战的复习方法已难以保证在考试中取得理想成绩。从某种意义上来说,在备考过程中选对一本好的辅导书能达到事半功倍的效果。这套丛书的编写宗旨是品质至上,服务一线教学。它力求做到为学生着想,讲解深入透彻,确凿无误,将疏漏降至最低程度,在内容编排上注重由易到难,循序渐进,从而使非利足者而致千里,非能水者而绝江河。

新东方创立二十余年来,一直处于中国教育培训行业领跑者的地位,享有很高的品牌号召力和影响力,这是其坚定不移地以教学产品、教学质量为核心,以给客户创造价值、提供极致服务为核心的结果,也反映出新东方注重对教育教学产品的研发和投入,致力打造优质教育资源。这套丛书正是这样的成果之一,我衷心希望广大考生借此登堂入室,从中获得最优化的学习内容和方法,在备考过程中少走弯路,顺利考入心目中的学校,实现自己的人生理想。

周 雷

新东方国内大学项目事业部总经理

前言

全国硕士研究生入学统一考试数学试卷满分 150 分,题型结构分为选择题、填空题、解答题.其中选择题为 32 分、填空题为 24 分,合计 56 分,占整个试卷分值的 37.3%;解答题(包括计算题、证明题、应用题等)合计 94 分,占比 62.7%.整套试卷由 23 个题目组成,要求在 3 个小时内完成.

我们知道,考研数学重点考查“三基”,即基本概念、基本理论和基本方法.同时考查五种基本能力,尤其强调计算能力、逻辑推理能力及综合运用所学知识解决实际问题的能力.由于考研数学涉及的知识面广泛、内容多,因此很大一部分考生难以理解,在学习的过程中屡屡碰壁.所以对于广大考生而言,要在复习的过程中做到牢固掌握基础知识并且融会贯通就显得很棘手.那么,如何才能学好数学,提高学习的效率并提升数学成绩呢?拥有一本质量上乘的数学学习题册显得特别重要!

本书由新东方具有多年一线授课经验的老师编写.编写者根据长期的考研数学授课经验,结合对最新数学考试大纲的深入研究和对考试命题规律的研究,以及对考生的薄弱环节的了解,从广大考生的实际需求出发,精心编写而成.

本书根据数学的学科特点和考生学习的规律,把试题进行了分类.首先是按科目、章节进行分类,其次每个科目又按照题目的难易程度分为基础篇、强化篇和拔高篇三部分,以此满足不同考生对于学习内容的不同需求.对于仅需过线就能达到要求的考生,重点抓基础篇题目即可;想要考取 100 分左右的考生,对基础篇题目要特别熟练,强化篇题目是其重点;对于有更高要求的考生,还要进一步训练拔高篇题目.

本书每一部分的各个章节的题目都将知识要点系统地融入问题之中,旨在帮助考生进一步加深对知识点、基本原理和基础方法技巧的理解和掌握.

本书的结构和特点安排如下:

基础篇题目的设置严格依据最新考纲的要求.在题目选取方面,注重基础题目,同时融合了基本概念、原理、方法的考查,知识点覆盖面广.考生通过这一部分习题的系统训练,能够对大纲规定的考点做到深入透彻的认识.同时能够掌握解题的常用方法、要领和数学思维.

强化篇题目的设置兼顾了考纲要求和题目难度,做到和基础题目有区别.题目选取综合性强、知识覆盖率高,难度与真题持平甚至略高于真题.这一部分旨在锻炼考生综合运用知识的能力,从而进一步提高解题的效率和准确度.

拔高篇题目的难度相当于模拟题的难度,旨在帮助基础好的考生进一步拔高数学水平,因此所选题目的综合性更强,每个题目包含的知识点更多,甚至一个题目包含十多个考点.通过这部分题目的练习,可以提高考生的思维能力和分析问题、解决问题的能力,把握知识重点、掌握考研数学的考查规律.

要想学好数学,必须做一定量的习题,并且是一个循序渐进的过程.做题可以帮助考生正确地理解和牢固地掌握基本概念、基本公式、基本原理,从而发现自己的问题之所在.只有做

题,才能更好地理解和掌握有关基础知识和解题技巧,才能把书上的东西转化为考生自己所有,从而大幅度提高考生的解题能力和应试水平,这也是编写本书的出发点和目的之所在.

本书注重博采众家之长,参考了多种同类书籍,吸取了不少养分,在此向这些书籍的作者表示感谢.同时,由于本书的编写时间仓促,书中难免有不妥和疏漏之处,欢迎读者批评指正.

欢迎加入考研数学交流 QQ 群:149812311,275350834.

编 者
2019 年 3 月

目 录

基础习题篇

高等数学部分	(2)
第1章 函数、极限、连续	(2)
第2章 导数与微分	(6)
第3章 导数的应用	(9)
第4章 不定积分	(13)
第5章 定积分	(16)
第6章 常微分方程	(19)
第7章 多元函数微分	(22)
第8章 二重积分	(25)
线性代数部分	(28)
第1章 行列式	(28)
第2章 矩阵	(31)
第3章 向量	(33)
第4章 线性方程组	(35)
第5章 特征值和特征向量	(37)
第6章 二次型	(39)

强化习题篇

高等数学部分	(42)
第1章 函数、极限、连续	(42)
第2章 导数与微分	(44)
第3章 导数的应用	(45)
第4章 不定积分	(47)
第5章 定积分	(48)
第6章 常微分方程	(50)
第7章 多元函数微分	(52)
第8章 二重积分	(53)
线性代数部分	(55)
第1章 行列式	(55)
第2章 矩阵	(57)
第3章 向量	(59)

第 4 章 线性方程组	(61)
第 5 章 特征值和特征向量	(63)
第 6 章 二次型	(65)

拔高习题篇

高等数学部分	(68)
第 1 章 函数、极限、连续	(68)
第 2 章 一元函数微分	(69)
第 3 章 导数的应用	(70)
第 4 章 不定积分	(71)
第 5 章 定积分	(72)
第 6 章 常微分方程	(73)
第 7 章 多元函数微分	(74)
第 8 章 二重积分	(75)
线性代数部分	(76)
第 1 章 行列式	(76)
第 2 章 矩阵	(78)
第 3 章 向量	(79)
第 4 章 线性方程组	(80)
第 5 章 特征值和特征向量	(81)
第 6 章 二次型	(82)

基础习题详解篇

高等数学部分	(84)
第 1 章 函数、极限、连续	(84)
第 2 章 导数与微分	(93)
第 3 章 导数的应用	(99)
第 4 章 不定积分	(109)
第 5 章 定积分	(116)
第 6 章 常微分方程	(123)
第 7 章 多元函数微分	(132)
第 8 章 二重积分	(141)
线性代数部分	(147)
第 1 章 行列式	(147)
第 2 章 矩阵	(151)
第 3 章 向量	(154)
第 4 章 线性方程组	(159)
第 5 章 特征值和特征向量	(164)
第 6 章 二次型	(168)

强化习题详解篇

高等数学部分	(176)
第 1 章 函数、极限、连续	(176)
第 2 章 导数与微分	(180)
第 3 章 导数的应用	(184)
第 4 章 不定积分	(191)
第 5 章 定积分	(195)
第 6 章 常微分方程	(202)
第 7 章 多元函数微分	(207)
第 8 章 二重积分	(210)
线性代数部分	(215)
第 1 章 行列式	(215)
第 2 章 矩阵	(219)
第 3 章 向量	(223)
第 4 章 线性方程组	(227)
第 5 章 特征值和特征向量	(233)
第 6 章 二次型	(240)

拔高习题详解篇

高等数学部分	(248)
第 1 章 函数、极限、连续	(248)
第 2 章 一元函数微分	(250)
第 3 章 导数应用	(252)
第 4 章 不定积分	(253)
第 5 章 定积分	(256)
第 6 章 常微分方程	(258)
第 7 章 多元函数微分	(260)
第 8 章 二重积分	(263)
线性代数部分	(264)
第 1 章 行列式	(264)
第 2 章 矩阵	(268)
第 3 章 向量	(269)
第 4 章 线性方程组	(271)
第 5 章 特征值和特征向量	(274)
第 6 章 二次型	(276)

基础习题篇

高等数学部分

第1章 函数、极限、连续

【1】 下列题中,函数 $f(x), g(x), h(x)$ 是否相同?

$$f(x)=x, \quad g(x)=\ln e^x, \quad h(x)=e^{\ln x}$$

【2】 $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}, h(x)=\sqrt[3]{x^3}$ 是否相同?

【3】 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & e^{-1}<x<1, \\ x, & 1\leq x\leq e, \end{cases} g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)]$.

【4】 判断函数的奇偶性.

$$(1) y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}); \quad (2) y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}.$$

【5】 函数 $f(x), g(x)$ 定义在区间 $[-1, 1]$ 上, 下列命题正确的个数有().

① 若 $f(x), g(x)$ 均为奇(偶)函数, 则 $f(x)+g(x)$ 仍为奇(偶)函数;

② 若 $f(x), g(x)$ 均为奇(偶)函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数;

③ $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 为奇函数;

④ 任意一个函数 $h(x)$, 均可以表示成 $h(x)=f(x)+g(x)$, 其中 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【6】 下列函数中, 周期函数的个数有()个.

$$\textcircled{1} y=\sin^2 x; \quad \textcircled{2} y=\sin x+\cos x; \quad \textcircled{3} y=x\cos x; \quad \textcircled{4} y=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【7】 设函数 $f(x)=x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是().

(A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

【8】 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -1, & |x|>1 \end{cases}$ 和 $g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$ 的表达式.

【9】 设 $f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, f_2(x)=f_1(f_1(x)), f_{k+1}(x)=f_1(f_k(x)), k=1, 2, \dots$, 则当 $n>1$ 时, $f_n(x)=()$.

$$(A) \frac{nx}{\sqrt{1+x^2}} \quad (B) \frac{nx}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (C) \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (D) \frac{x}{\sqrt{n+x^2}}$$

【10】 数列 $x_n=(-1)^n$ 的极限为().

(A) -1 (B) 1 (C) 不存在 (D) 存在

【11】 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n=0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n=1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n=\infty$. 下列选项正确的个数有().

- ① $a_n < b_n, n \in \mathbf{N}$; ② $b_n < c_n, n \in \mathbf{N}$;
 ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在; ④ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【12】对于数列 $\{u_n\}$, $\{u_{n_i}\}$ 是其任意子列. 下列命题:

- ① 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_i} = A$;
 ② 若数列 $\{u_n\}$ 的某子列 $\{u_{n_k}\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = A$, 且 $\{u_n\}$ 单调, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$;
 ③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$.

其中正确的个数为().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【13】证明: 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$ 的极限存在.

【14】设数列极限 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$ ().

- (A) 不存在且不为零 (B) 不存在
 (C) 不存在且为无穷 (D) 存在且为零

【15】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+n})$.

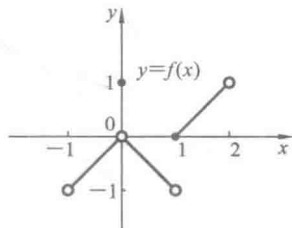
【16】极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【17】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n^2+e} + \frac{1}{2n^2+2e} + \dots + \frac{1}{2n^2+ne} \right)$.

【18】已知正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2, 3, \dots)$. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

【19】如图所示, 正确的是().

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$
 (C) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ (D) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$



【20】下列命题正确的个数有().

- ① 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 不存在;
 ② 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 不存在;
 ③ 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ 不存在;
 ④ 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ 不存在.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【21】已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} < 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得(用极限的局部保号性求)

- (1) 对于任意的 $x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) \underline{\hspace{1cm}} f(0)$;
 (2) 对于任意的 $x \in (-\delta, 0)$, 有 $f(x) \underline{\hspace{1cm}} f(0)$.

【22】当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x - 5x^2$ 是 $4x^2 - 5x^3$ 的().

- (A) 等价无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 低阶无穷小 (D) 同阶无穷小

【23】下列命题正确的是().

- (A) 无穷小的倒数是无穷大

- (B) 有限个无穷小的和是无穷小
(C) 无界函数与无穷小的乘积仍是无穷小
(D) 无穷小的商是无穷小

【24】 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x) = x \cos x$ 为().

- (A) 无穷大量 (B) 有界函数 (C) 无穷小量 (D) 无界函数

【25】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

【26】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \arcsin x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

【27】 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$ 为().

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $-\frac{1}{6}$

【28】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

【29】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

【30】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]^n =$ _____.

【31】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x + 4^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$.

【32】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^3}-1) \ln(1+2x)}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$.

【33】 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ 与 $\left(\frac{1}{n} \right)^3$ 为().

- (A) 等价无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 低阶无穷小 (D) 同阶无穷小

【34】 设 $\alpha_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $\alpha_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是_____.

【35】 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) + \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x}$.

【36】 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【37】 下列命题正确的是().

- (A) 如果函数 $f(x)$ 在 a 处连续, 那么 $|f(x)|$ 在 a 处连续
(B) 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 处连续, 那么 $f(x)$ 在 a 处连续
(C) 如果函数 $f(x)$ 在 a 处连续, 那么 $|f(x)|$ 不在 a 处连续
(D) 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 处连续, 那么 $f(x)$ 不在 a 处连续

【38】 $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{\sin \pi x}$ 的可去间断点个数为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 无穷个

【39】 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有().

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点 (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点

(C) 2 个跳跃间断点

(D) 2 个无穷间断点

【40】 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则().(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数(D) 当 $f(x)$ 是单调递增函数时, $F(x)$ 必是单调递增函数【41】 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有().(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小(B) $f(x)$ 与 x 同阶非等价无穷小(C) $f(x)$ 是 x 高阶的无穷小(D) $f(x)$ 是 x 低价的无穷小【42】 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^a(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 a 的取值范围为().(A) $(2, +\infty)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(0, \frac{1}{2})$ 【43】 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.【44】 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.【45】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.【46】 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.【47】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}$.【48】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$ 【49】 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ a+x^2, & x \leq 0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 应当怎样选取数 a ?【50】 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 求 $f(x)$ 的间断点, 并说明所属类型.【51】 确定常数 a, b , 使 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-2)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 与可去间断点 $x=2$.【52】 证明: 方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.【53】 设 $b > a > 0$, $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 单调递增, 且 $f(x) > 0$. 证明: 存在 $f(x) > 0$, $\xi \in (a, b)$, 使得 $a^2 f(b) + b^2 f(a) = 2\xi^2 f(\xi)$.

第2章 导数与微分

【1】 下列各选项中为 $f'(x_0)$ 存在的充要条件的个数为().

① $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A;$

② $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = A;$

③ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + e^h - 1) - f(x_0)}{h} = A.$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

【2】 已知 $f(x) = (e^x - 1)e^x(e^x + 1) \cdots (e^x + n - 1)$, 则 $f'(0) =$ _____.

【3】 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f(x) = (a^x - 1)g(x)$, 其中 a 为任意正数, 则 $f'(0) =$ _____.

【4】 设 $f'(x_0) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} =$ _____.

【5】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是().

(A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$ 存在

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在

【6】 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的().

(A) 左、右导数都存在

(B) 左导数存在, 右导数不存在

(C) 左导数不存在, 右导数存在

(D) 左、右导数都不存在

【7】 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax+b, & x > 1, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

【8】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处().

(A) 可导

(B) 不可导

(C) 不一定可导

(D) 不连续

【9】 下列函数在 $x=0$ 处可导的是().

(A) $y = |\sin x|$

(B) $y = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(C) $y = \sin |x|$

(D) $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

【10】 求曲线 $y = \cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线和法线方程.

【11】 设曲线 $y = ax^2$ 与 $y = \ln x$ 相切, 求 a 的值及其公共切线.

【12】 求曲线 $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

【13】 已知物体的运动规律为 $s = t^3$ (m), 求物体在 $t=2$ (s) 时的速度.

- 【14】求 $y=5x^3-2^x+3e^x$ 的导数.
- 【15】求 $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$ 的导数.
- 【16】求 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的导数.
- 【17】求 $y=\arctan e^x$ 的导数.
- 【18】求 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-9})$ 的导数.
- 【19】已知 $y=f\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$, $f'(x)=\arctan x^2$, 则 $y'(0)=$ _____.
- 【20】已知 $e^{x+y}-\cos(xy)=0$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.
- 【21】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定, 则 $y''(0)=($ _____).
- (A) $\frac{1}{e^2}$ (B) $-\frac{1}{e^2}$ (C) $\frac{1}{e}$ (D) $\frac{2}{e^2}$
- 【22】求 $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数.
- 【23】求 $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 的导数.
- 【24】求 $y=\sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x+2)}{(x^2+1)(e^x+x)}}$ ($x>0$) 的导数.
- 【25】已知 $\begin{cases} x=\theta(1-\sin\theta), \\ y=\theta\cos\theta, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$.
- 【26】求由方程 $y=1+xe^y$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.
- 【27】求由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{t^2}{2}, \\ y=1-t \end{cases}$ 所确定函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.
- 【28】已知函数 $y=f(x)$ 是单调可导的函数, 经过点 $(2,3)$, 函数 $y=g(x)$ 是由 $y=f(x)$ 确定的反函数, 若 $f'(2)=4$, 求 $g'(3)$.
- 【29】已知 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$, 求 $f^{(n)}(x)$.
- 【30】已知 $y=x\ln(1+x)$, 求 $y^{(10)}=$ _____.
- 【31】设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, 其中 $\Delta x<0$, 则 ().
- (A) $\Delta y>dy>0$ (B) $dy<\Delta y<0$ (C) $dy>\Delta y>0$ (D) $\Delta y<dy<0$
- 【32】设函数 $y=f(x)$ 可导, 已知 $y=f(x^4)$ 在 $x_0=-1$ 处取得增量 $\Delta x=0.05$, 函数值的增量为 Δy , 其线性主部为 0.2 , 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的法线斜率为_____.
- 【33】求 $y=x^2e^{2x}$ 的微分.
- 【34】求 $y=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的微分.
- 【35】若函数 $f(x), g(x)$ 均可导, 用导数的定义证明: $[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$.
- 【36】设 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f'(-1)=2$, 则 $\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(1+2h)-f(-1-3h)}{h}=$ _____.
- 【37】已知 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x [5f(t)-2]dt=f(x)-e^{5x}$, 则 $f''(0)=$ _____.