国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

HIPPASUS THEOREM

Hippasus定理

朱尧辰　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

HIPPASUS THEOREM

Hippasus定理

朱尧辰 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书围绕无理数这个主题讲述一些有关数论的基本知识，包括无理数的意义和分类，无理性的判定、刻画及度量，实数的有理逼近和连分数展开，数的线性无关性，正规数和一致分布，一些特殊的无理数（如 Champernowne 数，PV 数，$\zeta(3)$ 等），还涉及超越数论的基本结果，如 Lindemann-Weierstrass 定理，Hilbert 第七问题和数的代数无关性，以及一些无理性或超越性猜想.

本书适合大学理工科学生，数论爱好者等参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

Hippasus 定理/朱尧辰著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.9
（现代数学中的著名定理纵横谈丛书）
ISBN 978-7-5603-7603-5

Ⅰ.①H… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①无理数 Ⅳ.①O122

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 184546 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 20.5 字数 220 千字
版 次 2018 年 9 月第 1 版 2018 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-7603-5
定 价 88.00 元

◎代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量. 书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉. 失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理. 浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭. 吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会. 大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工. 一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了. 屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看. 封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》. 管它呢，且往下看. 第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价，保主跨海去征东.

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）. 那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字. 这是我有生以来独立看的第一本书. 尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:“康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也.”可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即“涉猎”)相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即“始于精于一,返于精于博”.正如中国革命一

样，必须先有一块根据地，站稳后再开创几块，最后连成一片.

丰富我文采，澡雪我精神

辛苦了一周，人相当疲劳了，每到星期六，我便到旧书店走走，这已成为生活中的一部分，多年如此. 一次，偶然看到一套《纲鉴易知录》，编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材. 这部书提纲挈领地讲中国历史，上自盘古氏，直到明末，记事简明，文字古雅，又富于故事性，便把这部书从头到尾读了一遍. 从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说，例如《三国演义》和《东周列国志》. 我常对人说，这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全. 即以近年来极时髦的人质问题（伊朗人质、劫机人质等），这些书中早就有了，秦始皇的父亲便是受害者，堪称“人质之父”.

《庄子》超尘绝俗，不屑于名利. 其中“秋水”“解牛”诸篇，诚绝唱也.《论语》束身严谨，勇于面世，“己所不欲，勿施于人”，有长者之风. 司马迁的《报任少卿书》，读之我心两伤，既伤少卿，又伤司马；我不知道少卿是否收到这封信，希望有人做点研究. 我也爱读鲁迅的杂文，果戈理、梅里美的小说. 我非常敬重文天祥、秋瑾的人品，常记他们的诗句：“人生自古谁无死，留取丹心照汗青”“休言女子非英物，夜夜龙泉壁上鸣”. 唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》，丰富我文采，澡雪我精神，其中精粹，实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》，既叹服其广博，也使我动了写《科学发现纵横谈》的心. 不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信. 以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著.我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择.决不要看坏书，对一般书，要学会速读.

读书要多思考.应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题.

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录.对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”.动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品,都是长期积累和短期突击相结合的产物.涓涓不息,将成江河;无此涓涓,何来江河?

爱好读书是许多伟人的共同特性,不仅学者专家如此,一些大政治家、大军事家也如此.曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷,嗜书如命的人.他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

前　言

本书起名《Hippasus定理》,是遵照策划人的建议,使书名与本套丛书的命名规则保持一致.相传古希腊Pythagoras学派(前582—前497)研究了这样一个问题:求一个正整数,它的平方等于另一个正整数的平方的2倍.历经种种挫折后,他们终于发现不存在平方等于2的有理数,从而揭示了$\sqrt{2}$的无理性.但当时这个发现遭到封杀.据传,Pythagoras的弟子Hippasus因“泄密”被扔进大海.基于这个传说,并且为免得与已有的“Pythagoras定理”重复,我们姑且将“$\sqrt{2}$是无理数”称之为“Hippasus定理”(虽然可能显得有点牵强).

$\sqrt{2}$的无理性的发现也许是无理数研究的开端,当然远不能“覆盖”无理数理论.在现代数学中,关于无理数的研究课题是多种多样的,多数是作为超越数论的重要组成部分.著名的Hilbert第七问题就包含某些数的无理性的判定.R.Apéry关于$\zeta(3)$的无理性的证明(1978年)以及由此引发的一系列研究,至今还吸引着人们的眼球.此外,还有一些无理性结果散见于各种刊物中.本书围绕无理数这个主题,讲述一些有关数论的知识,涉及无理数的意义和分类,无理性的度量,实数的有理逼近和连分数展开,数的无理性的初等证明方法和判别法则,数的线性无关性,一致分布和正规数,一些特殊的无理数(如Champernowne数,PV数,$\zeta(3)$等),以及超越数论的一些基本结果,如Lindemann-Weierstrass定理, Hilbert 第七问题和数的代数无关性, 等等.此外,本书正文以几道大学生数学竞赛题作为引言,以一些无理性或超越性猜想作为结束语. 正文后还安排了少量练习题(附解答或提示).本书的参考文献做了极小化处理,只给出最基本的原始资料.书中还包含作者过去从未公开发表的一些结果或证明(例如,§9.4,§13.3等).

本书初稿成于2007年底.原来设想是作为涉及数学文化的小册子,但因不尽如人意而被搁置多年,后应哈尔滨工业大学出版社之约,将原稿修改补充,拟作为大学生数学读物.但限于笔者的水平和经验,恐未必能如所愿,在论述和取材等方面,本书难免存在不妥甚至疏漏,欢迎读者和同行批评指正.

朱尧辰

2018年6月

于北京

符号说明

1° $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ (依次) 正整数集,整数集,有理数集,实数集,复数集.

$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

$\mathbb{A}$ 代数数集.

$|S|$ 有限集S所含元素的个数.

$|J|$ 区间J的长度.

2° $[a]$ 实数a的整数部分,即不超过a的最大整数.

$\{a\}=a-[a]$ 实数a的分数部分(也称小数部分).

$\|a\|=\min\{a-[a],[a]+1-a\}$ 实数a与最靠近它的整数间的距离.

$a|b\,(a\nmid b)$ 整数a整除(不整除)整数b.

$\operatorname{lcm}(a,b,\cdots)$ 整数$a,b,\cdots$的最小公倍数,有时也记作$[a,b,\cdots]$.

$\gcd(a,b,\cdots)$ 整数$a,b,\cdots$的最大公因子,有时也记作$(a,b,\cdots)$.

$d_n=\operatorname{lcm}(1,2,\cdots,n)$.

$\operatorname{Ord}_p(N)$(简记为$O_p(N)$)或$\operatorname{Ord}_k(N)$ 正整数N的标准素因子分解式中素数p或p_k的幂的指数.

$a\equiv b\pmod m$ 整数a,b对于模m 同余,即整数$m|(a-b)$.

F_n Fibonacci数.

$\mathcal{F}_m$ Fermat数,即$\mathcal{F}_m=2^{2^m}+1$.

$\delta_{i,j}$　Kronecker符号(即当$i=j$时其值为1,否则为0).

$[v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n]$和$[v_0,v_1,v_2,\cdots]$　有限和无限连分数(或简单连分数).

$(a)_h=(d_1\cdots d_k)_h$　正整数a的$h(\geqslant 2)$进制表达式(d_j为h进制数字).

3° $\mathbb{Z}[\mathbf{z}]$　变元$\mathbf{z}=(z_1,\cdots,z_s)\,(s\geqslant 1)$的整系数多项式的集合.

$\mathbb{C}(z)$　变元z的复系数有理函数的集合.

$\deg(P)$　多项式P的次数.

$H(P)$　多项式P的高.

$L(P)$　多项式P的长.

$t(P)$　多项式P的规格,即$t(P)=\deg(P)+\log H(P)$.

$\Lambda(P)$　即$2^{\deg(P)}L(P)$.

$\deg(\alpha)$　代数数α的次数.

$H(\alpha)$　代数数α的高.

$L(\alpha)$　代数数α的长.

$\overline{|\alpha|}$　代数数α的尺度.

4° $\log_b a$　实数$a>0$的以b为底的对数.

$\log a$(与$\ln a$同义)　实数$a>0$的自然对数.

$\lg a$　实数$a>0$的常用对数(即以10为底的对数).

$\log z$(与$\ln z$同义)　复数z的自然对数(多值函数)的某个分支.

$f(n)\sim g(n)$　$f(n)/g(n)\to 1\ (n\to\infty)$(其中$f,g>0$).

$f(n)=o(g(n))$　$f(n)/g(n)\to 0\ (n\to\infty)$(其中$g>0$).

$f(n)=O(g(n))$　存在常数$C>0$使$|f(n)|<Cg(n)$(当n充分大).

$o(1)$和$O(1)$　无穷小量和有界量.

$\Gamma(z)$　伽马函数.

${}_{q+1}F_q\left(\left.{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_q \atop \beta_1,\ldots,\beta_q}\right| z\right)$　超几何函数,即级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_q)_k}{k!(\beta_1)_k\cdots(\beta_q)_k}z^k\quad(q\geqslant 1, z\in\mathbb{C}, |z|\leqslant 1).$$

目　录

第 1 章　权当引言:几道大学生数学竞赛题

下面是几道大学水平的数学竞赛题:

1. (美国,1953)　若 $\omega \in (0,1)$是一个无理数,则ω可唯一地表示为收敛的无穷级数形式:

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p_0 p_1 \cdots p_k},$$

其中$p_i\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$是一个严格递增的无穷正整数列.

对于$\omega = 1/\sqrt{2}$,求出前3个p_i.

2. (美国,1954)　证明:每个正有理数都可以由级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

中有限多个相异项的和来表示.

3. (美国,1955)　证明:除了(0,0,0)外,没有其他整数组(m, n, p)使得

$$m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0.$$

4. (美国,1974)　证明:若α是满足

$$\cos \pi\alpha = \frac{1}{3}$$

的实数,则α是无理数.

5. (苏联,1977)　证明:$\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$是无理数.

6. (美国,1980)　证明: