高等数学

（下册）

孙立民　汪富泉　林全文
李伟勋　黄寿生　伍思敏　编著

科学出版社

高等数学

（下册）

孙立民　汪富泉　林全文
李伟勋　黄寿生　伍思敏　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是依据教育部颁布的《工科类本科数学基础课程教学基本要求(2014年版)》编写的. 编者改革了高等数学教材传统编写方式, 重背景、重体系、重探究、重体验、重实践、重反思；知识展现通俗、易懂、简洁、形式多样, 便于教师教学和学生自学；每一节设计了一些问题讨论题, 这些问题基本是开放性的, 目的是帮助学生检验学习效果, 引导学生加深对知识的理解, 提高思维深刻性. 每章结尾按基础知识考查和综合能力提高设计了A, B组测试题, 供学生自我检测. 本书分上、下两册, 共11章, 下册包括多元函数的微分及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程、无穷级数等内容.

本书可作为高等学校理工类专业的高等数学教材, 也可作为实际工作者的自学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 孙立民等编著. —北京：科学出版社，2019.1
ISBN 978-7-03-060220-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第292774号

责任编辑：王胡权 李 萍 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：师艳茹 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019年1月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2019年1月第一次印刷 印张：19 1/2
字数：393 000

定价：49.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

大众化高等教育的普及, 使更多的学生有接受高等教育的机会, 为培养更多的高素质人才创造了有利条件. 但高校扩招, 也导致普通高校教学班学生数量增多、师资配备不足、学生学习能力不强等诸多问题, 这给高等数学教学带来重重困难, 学生高等数学学习达不到教学质量要求, 部分学生厌学, 甚至弃学.

传统的高等数学教材注重完备化、形式化、抽象化、逻辑化, 这种教材模式严密抽象、逻辑性强, 有不可替代的优点, 但学生看到的是定义、性质、定理、法则、公式、证明、例题等完美的数学推导过程和结论, 却难以理解其实质. 按这样的教材编写方式, 要想理解、掌握和运用好数学知识, 学生要投入大量精力和时间刻苦钻研, 教师要跟踪指导, 可目前这些很难做到. 因此, 编写一本适应大众化高等教育需要, 通俗、易懂、简洁而又不降低难度的高等数学教材, 是我们不断追求的目标.

本书是我们多年研究与实践的成果, 教材编写改革了传统高等数学教材编写形式, 有鲜明的特色与创新, 主要表现在以下几个方面.

(1) 教材内容编写注重知识的逻辑结构和体系设计, 对传统教材体系结构做了较大调整, 使学生便于理解和记忆, 做到"一通百通". 如对数列极限和函数极限的内容, 我们就是按相似的研究思路设计的.

(2) 在概念、定理引入时, 注重介绍知识产生的背景和实际应用渗透. 对于非数学专业的学生而言, 数学是他们解决本专业问题的工具, 数学思想和方法对他们影响深远, 因此, 在实际应用中产生的数学思想和方法对学生的专业学习和培养高等数学学习兴趣十分重要.

(3) 教材内容编写不拘于形式, 根据每一部分内容特点确定编写思路, 注重探究性. 在内容编写中, 注重培养学生研究性学习能力, 对于能让学生自己探索发现的知识, 设计探索发现过程, 引导学生自己探究得到, 而不是事先将知识表述出来, 如导数的四则运算法则就是这样设计的. 有些定理、例题给出了证明和解答思路, 如极限的性质证明; 有些证明较复杂的定理和证明思路与其他定理证明相似的定理省略了证明过程, 只给予必要的说明; 有些不便引导学生探究或比较容易证明的定理、法则、公式、例题, 直接给予证明和解答. 通过这样的灵活设计, 注重了知识的本质把握, 淡化了形式, 将枯燥的数学表述通俗化, 增强了教材的亲和力, 使读者有"一目了然"之感.

(4) 每一节设计了一些问题讨论题, 这些问题基本都是开放性的, 目的是帮助学生检验学习效果, 引导学生加深知识的理解, 认清知识本质, 澄清易混淆和没有引起注意的问题, 提高学生的思维深刻度. 同时, 还设计了小结, 目的是让学生对本节内容有一个整体把握. 每一节习题设计做到简洁、到位、够用即可, 避免不提高学生能力的低认知水平的重复训练, 给学生留有更多的学习思考空间.

(5) 我们对每章知识的结构体系和重点内容进行了比较详细的总结, 引导学生反思, 建立知识的结构体系. 最后, 按基础知识考查和综合能力提高设计了 A, B 组测试题, 供学生进行自我检测, 做到对自己每章的学习情况心中有数.

(6) 在达到教学大纲要求的前提下, 在编写内容和习题设计上, 增加了拓展内容（书中带*号的部分即是）, 供学有余力的同学作为拓展学习使用.

本书第 1, 2, 3 章由孙立民编写, 第 4, 5 章由林全文编写, 第 6 章由黄寿生编写, 第 7 章由汪富泉编写, 第 8, 9 章由李伟勋编写, 第 10, 11 章由伍思敏编写. 全书由孙立民、汪富泉统稿. 本书插图和配套课件由李伟勋制作. 除书中主要编写教师外, 广东石油化工学院理学院数学系与应用数学系的教师在实践中也提出了许多改进意见, 已融入本书编写中.

尽管本书编写过程中参考了大量中外教材, 但由于编者水平有限, 疏漏之处在所难免, 希望读者批评指正.

孙立民

2018 年 9 月

目　录

第 7 章　多元函数的微分及其应用

在第 1～6 章中，我们讨论了一元函数的性质、极限、连续性、导数、微分、不定积分、定积分、向量代数与空间解析几何，以及微积分在几何、物理等领域的某些应用. 遇到的函数都只有一个自变量，但在许多实际应用问题中，我们往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是要考虑一个变量(因变量)与另外多个变量(自变量)的相互依赖关系. 由此引入了多元函数以及多元函数的微积分问题. 本章将首先介绍多元函数的基本概念、极限、连续等，并在一元函数微分学的基础上，进一步讨论多元函数的微分学，包括多元函数的偏导数、全微分、复合函数和隐函数的求导方法、方向导数、梯度等. 进而探讨多元函数微分学的一些应用，例如，研究几何图形和求函数极值方面的应用等. 在讨论中我们将以二元函数为主要对象，这不仅因为有关的概念和方法大都有比较直观的几何解释，便于理解，而且这些概念和方法大都能自然推广到二元以上的多元函数.

7.0　预 备 知 识

一、平面点集

1. 平面及其表示

由平面解析几何知道，当在平面上引入了一个直角坐标系后，平面上的点 P 与有序二元实数组 (x,y) 之间就建立了一一对应. 于是，我们常把有序实数组 (x,y) 与平面上的点 P 视作是等同的. 这种建立了坐标系的平面称为坐标平面.

二元有序实数组 (x,y) 的全体，即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\left\{(x,y)\middle|x,y\in\mathbf{R}\right\}$ 就表示坐标平面.

2. 平面点集的概念

定义 1　坐标平面上具有某种性质 P 的所有点的集合，称为平面点集，记作

$$E=\left\{(x,y)\middle|(x,y)\text{ 具有性质 }P\right\}.$$

例如，平面上以原点为中心、r 为半径的圆内所有点的集合是

$$C=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<r^2\right\}.$$

如果点 P 的坐标为 (x,y)，以 $|OP|$ 表示点 P 到原点 O 的距离，那么集合 C 也可表成 $C=\{P\,\big|\,|OP|<r\}$.

3. 邻域

定义 2 (1) 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\} \quad 或 \quad U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\Big|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

(2) 点 P_0 的去心 δ 邻域记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，其定义为

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\,|\,0<|P_0P|<\delta\}.$$

注 (1) 邻域具有直观的几何意义，即 $U(P_0,\delta)$ 表示 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体；$\mathring{U}(P_0,\delta)$ 与 $U(P_0,\delta)$ 的区别在于前者不包含圆心，而后者包含圆心.

(2) 如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

4. 内点、外点、边界点

为描述点与点集之间的关系，我们给出如下定义.

定义 3 如图 7.0.1，任取一点 $P\in\mathbf{R}^2$，任给一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$，则

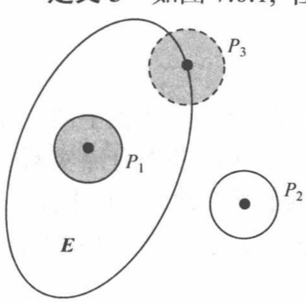

图 7.0.1

(1) 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点；

(2) 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的外点；

(3) 如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的边界点.

E 的边界点的全体，称为 E 的边界，记作 ∂E.

注意，任给一点和一个集合，它们之间必有以上三种关系中的一种. E 的内点必定属于 E；E 的外点必定不属于 E；而 E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E.

5. 聚点、导集

定义 4 如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的

点，则称 P 是 E 的聚点.

由聚点的定义可知，点集 E 的聚点 P 可能属于 E，也可能不属于 E.

例如，设有平面点集 $E=\{(x,y)|1<x^2+y^2\leqslant 2\}$，则满足 $1<x^2+y^2<2$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点；满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的边界点，它们都不属于 E；满足 $x^2+y^2=2$ 的一切点 (x,y) 也是 E 的边界点，它们都属于 E；点集 E 以及它的边界 ∂E 上的一切点都是 E 的聚点.

E 的全体聚点所构成的集称为 E 的导集，记为 E^{d}.

6. 开集、闭集、连通集

平面上不同的点集有不同的特征，为此，我们可引入如下定义.

开集　如果点集 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集.

闭集　如果点集的余集 E^{c} 为开集，则称 E 为闭集.

例如，$E=\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$ 是开集；$E=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭集；而集合 $\{(x,y)|1<x^2+y^2\leqslant 2\}$ 既不是开集，也不是闭集.

连通集　如果点集 E 内任何两点，都可用完全包含于 E 内的有限条折线连接起来，则称 E 为连通集.

7. 开区域、闭区域

为下节讨论多元函数时方便，我们引入区域、闭区域的概念.

开区域　连通的开集称为开区域，简称区域.

闭区域　开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

例如，$E=\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$ 是区域；而 $E=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭区域.

8. 有界集、无界集

有界集　对于平面点集 E，如果存在某一正数 r，使得 $E\subset U(O,r)$，其中 O 是坐标原点，则称 E 为有界点集.

无界集　一个集合如果不是有界集，就称这集合为无界集.

例如，集合 $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是有界闭区域；集合 $\{(x,y)|x+y>1\}$ 是无界开区域；集合 $\{(x,y)|x+y\geqslant 1\}$ 是无界闭区域.

二、n 维空间

设 n 为取定的一个自然数，我们用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体

所构成的集合，即

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\right\}.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有时也用单个字母 x 来表示，即 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．当所有的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零时，称这样的元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元，记为 0 或 O．在解析几何中，通过直角坐标系，$\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^3$)中的元素分别与平面(或空间)中的点或向量建立了一一对应关系，将其进行推广，$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也可称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个 n 维向量，x_i 称为点 x 的第 i 个坐标或 n 维向量 x 的第 i 个分量．特别地，$\mathbf{R}^n$ 中的零元 0 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点或 n 维零向量．

在集合 $\mathbf{R}^n$ 中定义某种运算，可使 $\mathbf{R}^n$ 成为某种空间．

1. n 维线性空间

定义 5 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元素，$\lambda\in\mathbf{R}$ 是一个实数，规定

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)，\ \lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

上述两种运算称为 $\mathbf{R}^n$ 中的线性运算．定义了线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维线性空间．

2. n 维欧氏空间

定义 6 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和点 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离，记作 $\rho(x,y)$，其定义为

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

定义了距离的 n 维线性空间称为 n 维欧氏空间，仍记为 $\mathbf{R}^n$．

注意，我们在第一部分讨论平面点集时，是直接把平面看成 2 维欧氏空间的，即在没有严格定义欧氏空间之前我们就把平面作为欧氏空间了，实际上我们在中学学习平面几何时早就这样做了．

显然，当 $n=1,2,3$ 时，上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离一致．

因为欧氏空间中引入了线性运算和距离，空间中具有代数结构和几何结构，所以我们可以定义向量(或线段)的长度．事实上，$\mathbf{R}^n$ 中元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 $\mathbf{0}$ 之间的距离 $\rho(x,\mathbf{0})$ 即向量 x 的长度，记作 $\|x\|$ (在 $\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$ 中，通常将 $\|x\|$ 记作 $|x|$)，即

$$\|x\| = \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\ .$$

采用这一记号, 结合向量的线性运算, 有

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \rho(x, y)\ .$$

因为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义了距离, 所以还可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中变元的极限.

定义 7　设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. 如果 $\|x - a\| \to 0$, 则称变元 x 在 $\mathbf{R}^n$ 中趋于固定元 a, 记作 $x \to a$.

显然, $x \to a \Leftrightarrow x_1 \to a_1, x_2 \to a_2, \cdots, x_n \to a_n$.

在 $\mathbf{R}^n$ 中, 线性运算和距离的引入, 使得前面讨论过的有关平面点集的一系列概念, 可以方便地引入到 $n(n \geqslant 3)$ 维空间中来, 例如,

设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, δ 是某一正数, 则 n 维空间内的点集

$$U(a, \delta) = \left\{ x \middle| x \in \mathbf{R}^n, \rho(x, a) < \delta \right\}$$

就可定义为 $\mathbf{R}^n$ 中点 a 的 δ 邻域. 以邻域为基础, 可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中点集的内点、外点、边界点和聚点, 以及开集、闭集、区域等一系列概念.

问题讨论

1. 欧氏空间中可以度量向量(线段)夹角的大小和平面图形的面积吗? 如果可以, 应如何引入?

2. 点集的聚点和点列的极限点有什么联系?

小结

本节介绍了平面上各种点集如邻域、开集、闭集、区域、连通集、有界集、无界集以及一个点对一个点集而言何时为内点、外点、边界点、聚点等概念. 然后在集合 $\mathbf{R}^n$ 中引入线性运算和距离, 从而使得 $\mathbf{R}^n$ 中可以讨论与平面上类似的概念与问题.

习　题　7.0

1. 下列各种情形中, P 为 E 的什么点?

(1) 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$, 使得 $U(P) \subset E^c$ (E^c 为 E 的余集);

(2) 如果对点 P 的任意邻域 $U(P)$, 都有 $U(P) \cap E \neq \varnothing, U(P) \cap E^c \neq \varnothing$;

(3) 如果对点 P 的任意邻域 $U(P)$, 都有 $U(P) \cap (E - \{P\}) \neq \varnothing$.

2. 判定下列平面点集的特征(说明是开集、闭集、区域, 还是有界集、无界集等)并分别求出它们的导集和边界.

(1) $\left\{ (x, y) \middle| y \neq 0 \right\}$;

(2) $\{(x,y)|6\leqslant x^2+y^2\leqslant 20\}$;

(3) $\{(x,y)|y\leqslant x^2\}$;

(4) $\{(x,y)|x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)|x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

7.1 多元函数的概念、极限与连续性

一、引例

在自然科学和工程技术中常常遇到一个变量依赖于多个自变量的函数关系，比如下例.

例 1 矩形面积 S 与长 x 、宽 y 有下列依从关系:

$$S=x\cdot y\quad(x>0,y>0),$$

其中, 长 x 与宽 y 是独立取值的两个变量. 在它们变化范围内, 当 x,y 取定值后, 矩形面积 S 有一个确定值与之对应.

例 2 在第 6 章中我们学习了曲面的方程, 例如, 椭圆抛物面的方程为 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, 双曲抛物面的方程为 $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$, 这里的 z 坐标既跟 x 有关, 又跟 y 有关, 它是 x,y 的二元函数.

二、多元函数的基本概念

定义 1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集, 映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的二元函数, 记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D\quad(\text{或 } z=f(P),P\in D),$$

其中, 点集 D 称为该函数的定义域, x,y 称为自变量, z 称为因变量.

上述定义中, 与自变量 x,y 的一对值 (x,y) 相对应的因变量 z 的值, 也称为 f 在点 (x,y) 处的函数值, 记作 $f(x,y)$, 即 $z=f(x,y)$.

函数 $f(x,y)$ 值域: $f(D)=\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$.

函数的其他符号: $z=z(x,y)$, $z=g(x,y)$ 等.

类似地, 可定义三元函数 $u=f(x,y,z),(x,y,z)\in D$ 以及三元以上的函数.

一般地, 把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的点集 D, 映射 f: $D\to\mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的 n 元函数, 通常记为 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$, 或简记为 $u=f(x),x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$, 也可记为 $u=f(P)$, $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$.

关于函数定义域的约定：在一般地讨论用算式表达的多元函数 $u=f(x)$ 时，就以使这个算式有意义的变元 x 的值所组成的点集为这个多元函数的自然定义域. 因而，对这类函数，它的定义域不再特别标出. 例如：

函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为 $\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$ (无界开区域)；

函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ (有界闭区域).

二元函数的图形：点集 $\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形，由第 6 章的学习知，二元函数的图形是一张曲面.

例如，$z=ax+by+c$ 是一张平面，而函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面.

例 3　求二元函数 $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ 的定义域.

解　容易看出，当且仅当自变量 x,y 满足不等式

$$x^2+y^2\leqslant 9,$$

函数 z 才有定义. 其几何表示是 xOy 平面上以原点为圆心、半径为 3 的圆内及圆周边界上点的全体，如图 7.1.1 所示，即函数 z 的定义域为

$$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 9\right\}.$$

例 4　求函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域.

解　函数的定义域为 $\left\{(x,y)\middle|x+y>0\right\}$，其几何图形是 xOy 平面上位于直线 $y=-x$ 上方的半平面，而不包括阴影部分，如图 7.1.2 所示.

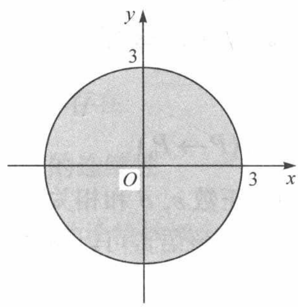

图 7.1.1

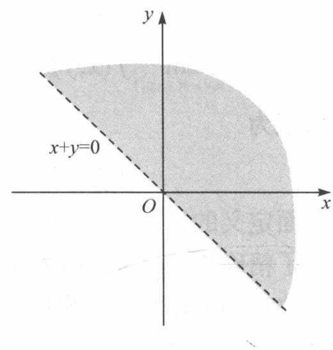

图 7.1.2

例 5　求函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域.

解　函数的定义域为

$$1-(x^2+y^2)>0,$$

即 $\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$. 它的图形是不包括边界的单位圆，如图 7.1.3 所示.

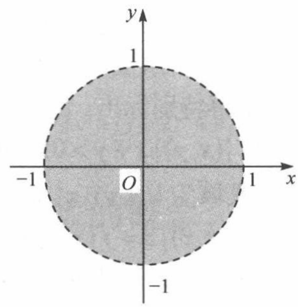

图 7.1.3

三、多元函数的极限

与一元函数的极限概念类似, 如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中, 对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A, 则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.

定义 2 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A, 使得对于任意给定的正数 ε, 总存在正数 δ, 当 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\ \delta)$ 时, 总有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立, 则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限, 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad \text{或} \quad f(x,y)\to A\,((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也可简记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad \text{或} \quad f(P)\to A\,(P\to P_0).$$

上面定义的极限也称为二重极限. 定义用两个正数 ε, δ 和相关距离对极限过程做出了精确描述, 这种描述通常称为“ε-δ”语言, 该语言可以用来验证某个常数是函数在相关过程中的极限.

极限概念的推广: 在定义 2 中将 $P(x,y)$ 改为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 即可得到 n 元函数的极限.

多元函数的极限运算法则与一元函数的运算法则类似.

例 6 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$, 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证明 因为

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta,$$

即 $P(x,y)\in D\cap\overset{\circ}{U}(O,\ \delta)$ 时，总有

$$\left|f(x,y)-0\right|<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

例 7 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明 取 $y=kx$ (k 为常数)，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

易见，所要求的极限值随 k 的变化而变化，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

例 8 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

证明 取 $y=kx^3$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx^3}}\dfrac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}=\dfrac{k}{1+k^2}$，其极限值随 k 的不同而变化，故极限不存在.

四、多元函数的连续性

1. 多元函数连续性概念

定义 3 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，

(1) $P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

(2) 设 D 内的每一点都是 D 的聚点，如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

注 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

二元函数的连续性概念可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去.

一元基本初等函数可看成其中一个自变量不出现的二元函数, 很容易证明, 一元基本初等函数看成二元函数时, 在它们的定义域都是连续的.

例 9　设 $f(x,y)=\cos x$, 证明 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数.

证明　对于任意的 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$, 因为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\cos x=\cos x_0=f(x_0,y_0),$$

所以, 函数 $f(x,y)=\cos x$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续, 由 P_0 的任意性知, $\cos x$ 作为 x,y 的二元函数, 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

类似的讨论可知, 一元基本初等函数看成二元函数或二元以上的多元函数时, 它们在各自的定义域内都是连续的.

可以证明, 多元连续函数的和、差、积仍为连续函数, 连续函数的商在分母不为零处的点仍连续; 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

多元初等函数: 与一元初等函数类似, 多元初等函数是指可用一个解析式所表示的多元函数, 这个解析式是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的.

例如, $\dfrac{x+x^2-y^2}{1+y^2}, \cos(x+y+z), \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$ 都是多元初等函数.

一切多元初等函数在其定义域内是连续的. 所谓定义域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元连续函数的连续性, 如果要求多元连续函数 $f(P)$ 在点 P_0 处有极限, 而该点又在此函数的定义域内, 则

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

例 10　讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的连续性.

解　由 $f(x,y)$ 表达式的特征, 利用极坐标变换: 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=0=f(0,0),$$

所以, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续.

例 11　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\mathrm{e}^x+y}{x+y}$.