普通高等院校保险专业“十三五”规划教材

SHOUXIAN
JINGSUAN SHUXUE

寿险精算数学

张 琳 主编

湖南大學出版社

普通高等院校保险专业"十三五"规划教材

SHOUXIAN
JINGSUAN SHUXUE

寿险精算数学

张 琳 主编

湖南大学出版社

内 容 简 介

本书从概率统计的基本原理出发，研究风险事件、索赔和损失等的概率分布情况，进而研究保费和准备金的计算，可以直接应用于寿险产品的开发、定价、负债评估、资产评估和负债管理等方面. 本书力求把寿险精算的数学理论和保险实践有机融合起来，以使学习者相对容易地掌握基本理论和实务技能，并有效地应用到寿险业务实践中.

本书可作为高校精算专业寿险精算课程的教学用书，也可作为中国精算师考试的辅助用书.

图书在版编目（CIP）数据

寿险精算数学/张琳主编．—长沙：湖南大学出版社，2019.4
（普通高等院校保险专业“十三五”规划教材）
ISBN 978-7-5667-1674-3

Ⅰ.①寿… Ⅱ.①张… Ⅲ.①人寿保险—精算学 Ⅳ.①F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 247408 号

寿险精算数学

SHOUXIAN JINGSUAN SHUXUE

主　　编：张　琳
责任编辑：谌鹏飞　刘非凡　**责任校对：**尚楠欣
印　　装：长沙市昱华印务有限公司
开　　本：787×1092　16 开　**印张：**20.75　**字数：**493 千
版　　次：2019 年 4 月第 1 版　**印次：**2019 年 4 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5667-1674-3
定　　价：60.00 元

出 版 人：雷　鸣
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南·长沙·岳麓山　**邮　　编：**410082
电　　话：0731－88822559(发行部),88821327(编辑室),88821006(出版部)
传　　真：0731－88649312(发行部),88822264(总编室)
网　　址：http://www.hnupress.com
电子邮箱：presschenpf@163.com

编写说明

寿险精算数学是关于人寿保险保费计算和准备金评估的一门专业课程.它是寿险精算教育体系的核心课程,更是寿险精算必备的技术.本书在2006年中国精算师考试用书《寿险精算数学》的基础上进行修订,并引入了新会计准则下准备金计量,使其更贴近实务教学.

全书共有十个章节.通过本书的学习,读者可以系统掌握寿险精算的基础知识,包括:生存分布与生命表、人寿保险的趸缴纯保费、生存年金的精算现值、均衡纯保费、均衡纯保费责任准备金、总保费与修正准备金、多元生命函数、多元风险模型、养老金计划的精算方法、新会计准则下准备金计量.本书每章都提出了主要学习内容,并尽可能多地提供例题,以加深读者的学习和理解能力.

由于相应的参考资料很多,我们进行了大量的梳理并使之符合教材要求的严密逻辑关系.本书原版本由卢仿先、张琳编著,邓庆彪、张宁、王奕渲、尹莎参与编写.本版由周锋和杨楠负责第一、五、八章的修订,戴世鼎和陈卓负责第二、六、九章的修订,顾添翼和李婉玉负责第三、四、七章的修订,班莹莹和袁月负责第十章的编写,由本人负责全书编写思路、提纲的拟定以及全书各章节内容的审定、把关.

本书肯定存在很多不足,希望能在今后的教学中不断改进,也希望此书的读者提供宝贵的意见.

湖南大学金融与统计学院　张琳

2019年3月

目　次

第一章　生存分布与生命表

本章以某零岁新生婴儿为例,引入死力的定义,通过该新生婴儿的死亡年龄 X 和其在 x 岁时的未来寿命 $T(x)$ 来建立生存函数 $s(x)$ 和 ${}_tp_x$,并在此基础之上运用概率论的基本方法,对同分布的某组新生婴儿确定生命表的各主要函数,使读者可以了解寿险业的经验生命表及其中的主要函数.生命表既是寿险保单定价的重要基础,也是寿险业务经营和政府实施监督与管理的依据.

[关键词] 死亡年龄　未来寿命　生存函数　死力　均匀分布　生命表

1.1　死亡年龄的概率分布函数

寿险保单的保险金给付是以被保险人的生存或死亡为前提条件的,被保险人在投保时的未来寿命是建立寿险精算数学模型的重要因素之一.本节主要讨论死亡年龄的概率分布.

1.1.1　连续型的死亡年龄概率分布

对于某一个刚出生的婴儿来说,其死亡年龄 X 是一个连续型的随机变量,用 $F(x)$ 表示这个随机变量 X 的分布函数,则

$$F(x) = \Pr(X \leqslant x) \quad (x \geqslant 0). \tag{1.1.1}$$

这里,通常假设 $F(0) = 0$.

假设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是可导的,并用 $f(x)$ 表示随机变量 X 的密度函数,则:

$$f(x) = F'(x) \quad (x \geqslant 0)$$

或

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.1.2}$$

其均值与方差分别是:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_0^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

1.1.2　离散型死亡年龄的有关概率

若将某一个新生婴儿的死亡年龄 x 取整数值(即取周岁数),并用字母 K 表示,则 $K =$

$[X]$,离散型随机变量 K 的概率分布律表述为:

死亡年龄(K)	0	1	2	3	…
概率(q)	q_0	q_1	q_2	q_3	…

其中,

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1, q_i \geqslant 0 \quad (i = 0,1,2,\cdots),$$

其分布函数、均值和方差分别是:

$$F(K) = \sum_{i \leqslant x} q_i \quad (i \geqslant 0);$$

$$E(K) = \sum_{i=0}^{\infty} iq_i; \tag{1.1.4}$$

$$Var(K) = \sum_{i=0}^{\infty} (i - E(K))^2 q_i$$

$$= E(K^2) - (E(K))^2. \tag{1.1.5}$$

1.2 生存分布

1.2.1 生存函数

假设某一新生婴儿的死亡年龄 x 的分布函数为 $F(x)$,则 $s(x) = 1 - F(x)$ 称为该新生婴儿的生存函数,即

$$s(x) = \Pr(X > x), x \geqslant 0. \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1)表示某新生婴儿能活到 x 岁(即 x 岁以后死亡)的概率.

通常假设 $F(0) = 0$,则 $s(0) = 1$,其实际意义是假设新生婴儿以100%的概率保证在出生时是活着的.

对于任意确定的 x,函数 $F(x)$ 与 $s(x)$ 都可以描述某新生婴儿能活到 x 岁的概率.在概率论与统计学中,习惯采用分布函数 $F(x)$ 来描述;而在精算学和人口统计学中,则习惯采用生存函数 $s(x)$ 来描述.

根据分布函数 $F(x)$ 的性质,可以推导出生存函数 $s(x)$ 的一些直观性质:

①$s(0) = 1, \lim_{x \to +\infty} s(x) = 0$;

②$s(x)$ 是单调递减的函数;

③$s(x)$ 是一个右连续的函数.

关于生存函数 $s(x)$ 的一般图形,可用图1-1表示.

通常人的寿命是有限的,不会超过某一特定年龄.也就是说,存在一个正数 ω,当 $x < \omega$ 时,$s(x) > 0$;当 $x \geqslant \omega$ 时,$s(x) = 0$.这时,称正数 ω 为极限年龄.如从图1-1中的曲线可以看出,极限年龄 ω 是100岁.

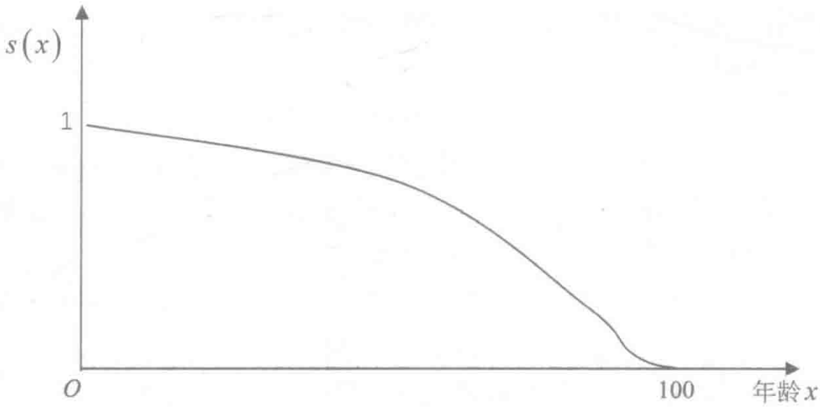

图1-1　生存函数 $s(x)$ 的一般图形

例如,某一个新生婴儿的生存函数

$$s(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{105} & (0 \leqslant x < 105) \\ 0 & (x \geqslant 105)\end{cases}.$$

不难看出,生存者的极限年龄 $\omega = 105$ 岁.

根据概率原理,某新生婴儿在年龄 x 岁与 $z(x < z)$ 岁之间死亡的概率是

$$\begin{aligned}\Pr(x < X \leqslant z) &= F(z) - F(x) \\ &= s(x) - s(z).\end{aligned}$$

类似地,某新生婴儿在 x 岁时仍活着的条件下,于年龄 x 岁与 $z(x < z)$ 岁之间死亡的条件概率是

$$\begin{aligned}\Pr(x < X \leqslant z \mid X > x) &= \frac{\Pr(x < X \leqslant z)}{\Pr(X > x)} \\ &= \frac{s(x) - s(z)}{s(x)} \\ &= 1 - \frac{s(z)}{s(x)}.\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

一般地,新生婴儿在 x 岁时仍生存的条件下,在年龄 y 岁与 $z(x \leqslant y < z)$ 岁之间死亡的条件概率是

$$\begin{aligned}\Pr(y < X \leqslant z \mid X > x) &= \frac{\Pr(y < X \leqslant z)}{\Pr(X > x)} \\ &= \frac{s(y) - s(z)}{s(x)}.\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

为叙述方便,引入符号 (x) 表示年龄为 x 岁的人,X 是某新生婴儿的死亡年龄,则该新生婴儿在 x 岁活着的条件下,未来仍生存的时间(或生存期)是 $X-x$,那么,$X-x$ 称为该新生婴儿在 x 岁时的未来寿命,简称 (x) 的未来寿命(或未来余命),并用称号 $T(x)$ 表示.即该新生婴儿在 x 岁时仍生存的条件下,有 $T(x) = X - x$.

1.2.2　连续型未来寿命的生存分布

用概率来研究生存者的未来寿命 $T(x)$ 是寿险精算学中的一项基本内容,引用一组国际

通用的精算函数符号来描述随机变量 $T(x)$ 的概率分布.这些精算函数符号,在以后的章节中将予以介绍.精算函数符号如下:

$$ {}_tq_x = \Pr(T(x) \leqslant t) \ (t \geqslant 0); \tag{1.2.4} $$

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \Pr(T(x) > t) \ (t \geqslant 0). \tag{1.2.5} $$

符号 ${}_tq_x$ 描述为 (x) 将在未来 t 年内死亡的概率. ${}_tq_x$ 是随机变量 $T(x)$ 的分布函数,而 ${}_tp_x$ 是关于 $T(x)$ 的生存函数,即表述 (x) 将在 $x+t$ 岁时仍生存的概率.

特别地,当 $x=0$ 时, $T(0)=X$,即0岁新生儿的未来寿命就是刚出生婴儿的死亡年龄,且

$$ {}_xp_0 = s(x)(x \geqslant 0). \tag{1.2.6} $$

当 $t=1$ 时,式(1.2.4)与式(1.2.5)所定义符号中的前缀允许省略,即 ${}_1q_x$ 与 ${}_1p_x$ 可简写为 q_x 与 p_x.即 q_x 表示 (x) 在未来一年内死亡的概率, p_x 表示 (x) 在 $x+1$ 岁时仍生存的概率.

另外,用精算函数符号 ${}_{t|\mu}q_x$ 表示 (x) 在生存 t 年后,在 $x+t$ 岁至 $x+t+\mu$ 岁之间死亡的概率,即

$$ \begin{aligned} {}_{t|\mu}q_x &= \Pr(t < T(x) \leqslant t+\mu) \\ &= {}_{t+\mu}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+\mu}p_x. \end{aligned} \tag{1.2.7} $$

当 $\mu=1$ 时,符号 ${}_{t|1}q_x$ 可简写成 ${}_{t|}q_x$.

下面,考察精算函数符号 ${}_tq_x$、${}_tp_x$、${}_{t|\mu}q_x$ 与生存函数 $s(x)$ 之间的关系.

由于 (x) 的未来寿命 $T(x)=X-x$,隐含着新生婴儿在 x 岁时仍生存这一前提条件,所以事件 $\{T(x) \leqslant t\}$ 与事件 $\{0 \leqslant X-x \leqslant t \mid X > x\}$ 是同一事件,从而 $T(x)$ 的分布函数为

$$ {}_tq_x = \Pr(T(x) \leqslant t) = \Pr(x < X \leqslant x+t \mid X > x). $$

运用式(1.2.2),令 $z=x+t$,则

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}, \tag{1.2.8} $$

$$ \begin{aligned} {}_tp_x &= 1 - {}_tq_x \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)}. \end{aligned} \tag{1.2.9} $$

对于 ${}_{t|\mu}q_x$,运用式(1.2.7)、式(1.2.8)和式(1.2.9),可得:

$$ \begin{aligned} {}_{t|\mu}q_x &= \Pr(t < T(x) \leqslant \mu+t) \\ &= {}_{t+\mu}q_x - {}_tq_x \\ &= \frac{s(x+t)-s(x+t+\mu)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t)-s(x+t+\mu)}{s(x+t)} \\ &= {}_tp_x \cdot {}_\mu q_{x+t}. \end{aligned} \tag{1.2.10} $$

式(1.2.10)表明, (x) 在 $x+t$ 岁至 $x+t+\mu$ 岁之间死亡的条件概率,等于 (x) 在 $x+t$ 岁时仍生存的条件概率与 $(x+t)$ 在以后的 μ 年内死亡的条件概率的乘积.

讨论未来寿命 $T(x)$ 的概率分布,在人寿保险业务经营中具有重要的现实意义.这是因为死亡保险的保险金通常是在被保险人死亡时给付的,即被保险人的死亡保险金是在 x 岁

投保后的 $T(x)$ 处给付的.但是,实际的业务运作过程中从计算方法的角度,其可操作性较差.为实现这一现实性意义,引入离散型未来寿命的概率分布.

1.2.3　离散型未来寿命的生存分布

设 $K(x)$ 表示 (x) 未来寿命的周年数或 (x) 在未来生存的整年数,即 $K(x)=[T(x)]$,(其中,[ ] 是取整函数),即 $K(x)$ 是 $T(x)$ 的最大整数部分.例如,若 $T(x)=34.25$,则 $K(x)=34$;若 $T(x)=35.98$,则 $K(x)=35$.

【例 1.2.1】若年龄为 20 岁的人在 67.83 岁时死亡,试求 $T(20)$ 与 $K(20)$.

解:

$$T(20)=X-x=67.83-20=47.83,$$
$$K(20)=[X-x]=47.$$

根据 $K(x)$ 的定义,$K(x)$ 是取值于 $0,1,2,\cdots$ 非负整数集上的一个随机变量,且对于任意非负整数 k,当 $k\leqslant T(x)<k+1$ 时,当且仅当 $K(x)=k$,则随机变量 $K(x)$ 的概率分布率可表示为:

$$\Pr(K(x)=k)=\Pr(k\leqslant T(x)<k+1)\ (k=0,1,2,\cdots).$$

由于连续型随机变量 $T(x)$,有

$$\Pr(T(x)=k)=\Pr(T(x)=k+1)=0\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

故随机变量 $K(x)$ 的概率分布率又可表示为:

$$\begin{aligned}\Pr(K(x)=k)&=\Pr(k<T(x)\leqslant k+1)\\&={}_{k+1}q_x-{}_kq_x={}_kp_x-{}_{k+1}p_x\\&={}_kp_x\cdot q_{x+k}={}_{k|}q_x\quad(k=0,1,2,\cdots).\end{aligned}\tag{1.2.11}$$

在不易发生混淆的情况下,在以后的有关章节中会将符号 $T(x)$ 简写成 T,符号 $K(x)$ 简写成 K.

1.3　死力

上一节所讨论的问题是 (x) 将在某一段时间内死亡的有关精算函数,而本节所讨论的问题是 (x) 将在某一瞬间内死亡的变化情况,即死力.

1.3.1　死力的定义及性质

死力是指在到达 x 岁的人当中,在此一瞬间里死亡的人所占的比率.死力也称瞬间死亡率或死亡密度,通常在 x 岁时的死力用符号 μ_x 表示.其基本关系式是:

$$\begin{aligned}\mu_x&=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{s(x)-s(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{s(x)}\\&=-\frac{s'(x)}{s(x)}=\frac{F'(x)}{1-F(x)}.\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

死力也如同生存函数一样,可以用来确定随机变量 X 的分布.

由式(1.3.1)中可知 $\mu_x \geqslant 0$,并将式(1.3.1)中的 x 改为 y 后可得

$$-\mu_y \mathrm{d}y = \frac{1}{s(y)} \cdot \frac{\mathrm{d}s(y)}{\mathrm{d}y} = \mathrm{d}[\ln s(y)].$$

对上式从 x 到 $x+t$ 进行积分,得

$$-\int_x^{x+t} \mu_y \mathrm{d}y = \int_x^{x+t} \mathrm{d}[\ln s(y)]$$

$$= \ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right) = \ln({}_tp_x),$$

即

$$_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y \mathrm{d}y\right) \tag{1.3.2}$$

或

$$_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} \mathrm{d}s\right). \tag{1.3.3}$$

当 $x=0, t=x$ 时,式(1.3.3)转化为

$$s(x) = {}_xp_0 = \exp\left(-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s\right), \tag{1.3.4}$$

从而随机变量 X 的分布函数与密度函数分别是:

$$F_X(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s\right) \tag{1.3.5}$$

和

$$f_X(x) = -s'(x) = \mu_x \cdot \exp\left(-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s\right)$$

$$= {}_xp_0 \cdot \mu_x. \tag{1.3.6}$$

$T(x)$ 的分布函数与密度函数分别是:

$$F_T(t) = 1 - {}_tp_x = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} \mathrm{d}s\right) \tag{1.3.7}$$

和

$$f_T(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_tp_x) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} (t \geqslant 0). \tag{1.3.8}$$

【例 1.3.1】设死力 $\mu_x = \dfrac{1}{1+x}, x \geqslant 0$.

试求:(1) 随机变量 X 的分布函数与密度函数;

(2) 随机变量 $T(x)$ 的分布函数与密度函数;

(3) $\Pr(10 < X \leqslant 30)$;

(4) ${}_{5|5}q_{20}$.

解:(1) $F_X(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{1+s} \mathrm{d}s\right)$

$$= 1 - \exp(-\ln(1+x))$$

$$= \frac{x}{1+x} (x \geqslant 0),$$

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2}(x \geqslant 0).$$

$$(2)F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{1+x+s}\mathrm{d}s\right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\ln\frac{1+x+t}{1+x}\right)$$

$$= \frac{t}{1+x+t}(x \geqslant 0, t \geqslant 0),$$

$$f_T = F'_T(t) = \frac{1+x}{(1+x+t)^2}(x \geqslant 0, t \geqslant 0).$$

$$(3)\Pr(10 < X \leqslant 30) = F(30) - F(10)$$

$$= \frac{30}{1+30} - \frac{10}{1+10} \approx 0.058\ 65.$$

$$(4)\ {}_{5|5}q_{20} = \frac{s(25)-s(30)}{s(20)} = \frac{F(30)-F(25)}{1-F(20)} \approx 0.130\ 27.$$

死力具有如下性质：

① 当 $x \geqslant 0$ 时，$\mu_x \geqslant 0$；

② 对于任意 $x \geqslant 0$，都有 $\int_x^{+\infty} \mu_x \mathrm{d}s = +\infty$；

③ μ_x 是死力，则 $\int_0^{+\infty} {}_tp_x \mu_{x+t} \mathrm{d}t = 1$.

证：性质 ①、③ 显然成立.

至于性质 ②，由于 ${}_tp_x = \dfrac{s(x+t)}{s(x)}$，且 $\lim\limits_{t\to\infty} s(x+t) = 0$，

故 $\lim\limits_{t\to\infty} {}_tp_x = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{s(x)} \cdot s(x+t) = 0$，$\lim\limits_{t\to\infty} \ln {}_tp_x = -\infty$，

$$\int_x^{+\infty} \mu_s \mathrm{d}s = \lim_{t\to\infty} \int_x^{x+t} \mu_s \mathrm{d}s = \lim_{t\to\infty}(-\ln {}_tp_x) = +\infty.$$

死力 μ_x 的一般图形如图 1-2 所示.

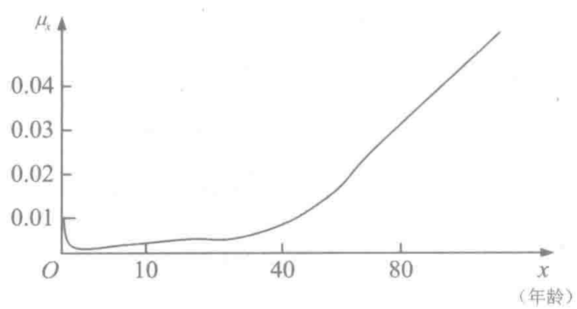

图 1-2　死力 μ_x 的一般图形

在精算学中，μ_x 称为死力，但在部件及系统的可靠性理论中，μ_x 又称为失效率或故障率. 因此，μ_x 在理论研究中是一个很重要的函数.

本节关于死力 μ_x 与分布函数 $F(x)$、密度函数 $f(x)$、生存函数 $s(x)$ 之间的关系，可归纳为表 1-1.

表 1-1　μ_x、$F(x)$、$f(x)$、$s(x)$ 之间的关系

	分布函数 $F(x)$	密度函数 $f(x)$	生存函数 $s(x)$	死力 μ_x
$F(x)$		$F'(x)$	$1-F(x)$	$\dfrac{F'(x)}{1-F(x)}$
$f(x)$	$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$		$1-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$	$\dfrac{f(x)}{1-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$
$s(x)$	$1-s(x)$	$-s'(x)$		$-\dfrac{s'(x)}{s(x)}$
μ_x	$1-\exp\left(-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s\right)$	$\exp\left(-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s\right)\cdot\mu_x$	$\exp\left(-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s\right)$	

从表 1-1 中可以看出，对于四个函数 $F(x)$、$f(x)$、$s(x)$、μ_x，只要已知其中的一个函数，就可以求出另外三个函数.

1.3.2　死力的若干解析形式

下面介绍四种常见的死力解析形式.解析式的名称都是以创建者的名字来命名的.

1. de Moivre 形式

形式如下：

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}(0 \leqslant x < \omega). \tag{1.3.9}$$

其中，ω 是极限年龄.

式(1.3.9)是由 de Moivre 于 1729 年创建的.在 de Moivre 形式下，随机变量的 X 概率分布情况是

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{\omega - t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= 1 - \exp\left(\ln\frac{\omega - x}{\omega}\right) = \frac{x}{\omega}(0 \leqslant x \leqslant \omega),$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\omega}(0 \leqslant x \leqslant \omega),$$

$$s(x) = 1 - F(x) = 1 - \frac{x}{\omega}(0 \leqslant x \leqslant \omega).$$

上述结果表明，在 de Moivre 形式下，死亡年龄 X 在$[0,\omega]$上服从均匀分布.

2. Gompertz 形式

形式如下：

$$\mu_x = BC^x (x \geqslant 0). \tag{1.3.10}$$

其中，$B > 0, C \geqslant 1$.

式(1.3.10)是由 Gompertz 在 1825 年创建的. 在 Gompertz 形式下，随机变量 X 的分布情况是：

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \exp\left(-\int_0^x BC^t \mathrm{d}t\right) \\ &= 1 - \exp[m(1 - C^x)](x \geqslant 0). \end{aligned}$$

其中，$m = \dfrac{B}{\ln C}$,

$$s(x) = 1 - F(x) = \exp[m(1 - C^x)](x \geqslant 0),$$
$$f(x) = F'(x) = BC^x \exp[m(1 - C^x)](x \geqslant 0).$$

3. Makeham 形式

形式如下：

$$\mu_x = A + BC^x (x \geqslant 0). \tag{1.3.11}$$

其中，$B > 0, C \geqslant 1, A \geqslant -B$.

式(1.3.11)是由 Makeham 在 1860 年创建的. 在 Makeham 形式下，随机变量 X 的分布情况是：

$$F(x) = 1 - \exp[-Ax - m(C^x - 1)](x \geqslant 0),$$
$$s(x) = \exp[-Ax - m(C^x - 1)](x \geqslant 0),$$
$$f(x) = (A + BC^x)\exp[-Ax - m(C^x - 1)](x \geqslant 0).$$

其中，$m = \dfrac{B}{\ln C}$.

特别地，当 $A = 0$ 时，Makeham 形式简化为 Gompertz 形式，即式(1.3.11)是式(1.3.10)的推广.

4. Weibull 形式

形式如下：

$$\mu_x = kx^n (x \geqslant 0). \tag{1.3.12}$$

其中，$k > 0, n > 0$.

式(1.3.12)是由 Weibull 在 1939 年创建的. 在 Weibull 形式下，随机变量 X 的分布情况是：

$$F(x) = 1 - \exp(-bx^{n+1})(x \geqslant 0),$$
$$s(x) = \exp(-bx^{n+1})(x \geqslant 0),$$
$$f(x) = kx^n \exp(-bx^{n+1})(x \geqslant 0).$$

其中，$b = \dfrac{k}{(n+1)}$.

以上四种形式的死力解析式 μ_x 与其对应的生存函数 $s(x)$ 归纳于表 1-2.

表 1-2　四种死力解析形式以及 μ_x 对应生存函数 $s(x)$

	μ_x	$s(x)$	条件限制
de Moivre	$(\omega-x)^{-1}$	$1-\dfrac{x}{\omega}$	$0\leqslant x\leqslant\omega$
Gompertz	BC^x	$\exp[m(1-C^x)]$	$B>0, C\geqslant1, x\geqslant0$
Makeham	$A+BC^x$	$\exp[-Ax+m(1-C^x)]$	$A\geqslant -B, B>0, C\geqslant1, x\geqslant0$
Weibull	kx^n	$\exp(-bx^{n+1})$	$k>0, n>0, x\geqslant0$

1.4　生命表

生命表是描述人的寿命或(x)的未来寿命的概率分布的一种表示形式.它是寿险公司计算纯保险费的重要依据之一.生命表通常含有基本函数 q_x、l_x、d_x 数值,并按各年龄排列成表格,如需要的话,还会增加某些衍生函数,如 L_x、T_x.在正式介绍生命表之前,我们有必要介绍生命表的一些函数.

1.4.1　生命表函数

由于生命表是通过某一特定数目的生存群体来反映的,因此,我们有必要从一组特定数目为 l_0 的零岁新生婴儿出发考虑生命表各主要函数.

1. 生存人数(l_x)与死亡人数(d_x)

考虑一组数目为 l_0(例如 $l_0=100\ 000$)的零岁新生婴儿群体,且这一组中每一个新生婴儿的死亡年龄的概率分布均可以由同一个生存函数 $s(x)$ 来描述(即同分布).记 $L(x)$ 表示该组新生婴儿群体中能生存到 x 岁的总人数,则

$$L(x)=\sum_{j=1}^{l_0} I_j(x).$$

其中:

$$I_j(x)=\begin{cases}1 & \text{当第 } j \text{ 个新生婴儿在 } x \text{ 岁时仍活着}, j=1,2,\cdots,l_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

根据上述假设,则

$$E(I_j(x))=1\cdot s(x)+0\cdot(1-s(x))=s(x)(j=1,2,\cdots,l_0),$$

故

$$E[L(x)]=E\Big(\sum_{j=1}^{l_0} I_j(x)\Big)=\sum_{j=1}^{l_0} E(I_j(x))$$
$$=\sum_{j=1}^{l_0} s(x)=l_0 s(x).$$

记 $l_x=E[L(x)]$,则 $l_x=l_0 s(x)$,即 l_x 表示数目为 l_0 个零岁新生婴儿能活到 x 岁的期望