

高等學校教學用書

解析幾何學

第一卷 第二分冊

Б. Н. ДЕЛОНЕ, Д. А. РАЙКОВ 著
北京大學數學力學系幾何教研組譯

商務印書館

高等學校教學用書



解 析 幾 何 學

第一卷 第二分冊

В. Н. 狄隆涅, Л. А. 拉伊可夫著
北京大學數學力學系幾何教研組譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико—теоретической литературы)出版的狄隆涅(Б. Н. Делоне)和拉伊可夫(Д. А. Райков)合著“解析幾何學”第一卷(Аналитическая Геометрия I)1948年版譯出。在蘇聯高等教育部1952年批准的大學數學力學系數學和力學專業一年級解析幾何學大綱裏,本書是主要參考書之一。

本書(第一卷)中譯本分第一·二分冊出版。第一分冊是全書的緒論,內容包括向量,笛卡兒坐標,仿射映射和交映射等。第二分冊講平面上的解析幾何,內容包括平面上的直線,橢圓、雙曲線、拋物線,二階曲線的一般理論。

本書(第一卷)由北京大學數學力學系幾何教研組諸同志集體翻譯。

解 析 幾 何 學

第一卷 第二分冊

北京大學數學力學系幾何教研組譯

★ 版權所有 ★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷

(13017·76)

1953年11月初版

開本 850×1168 1/32

1956年8月4版

字數 272,000

1956年11月上海第2次印刷

印數 11,001—12,500

印張 9 12/16

定價 (8) 洋 1.10

第二分冊目次

第二部分 平面解析幾何 165

引言 165

§ 37 關於在笛卡兒坐標中用有兩個變數的方程表示的曲線。曲線的參數方程...165

1. 解析幾何的基本觀念(165)
2. 在笛卡兒坐標中用方程表示的曲線。例子(166)
3. 曲線的參數方程(169)
4. 曲線的交點(170)
5. 在笛卡兒坐標變換下曲線方程的變換(170)

§ 38 代數曲線和超越曲線.....171

1. 代數曲線和超越曲線(171)
2. 代數曲線的方程的次數(172)

第三章 平面上的直線 173

第一篇 平面上直線的方程 173

§ 39 直線,作為一階曲線 173

§ 40 表示同一條直線的一次方程 175

§ 41 直線按它的方程的作圖 177

§ 42 按各種已知條件求直線的方程 178

1. 已知斜率和縱軸上的截距。線性函數(179)
2. 已知一個點和方向向量。直線的參數方程(179)
3. 已知一個點和斜率(180)
4. 已知兩個點。三個點共線的條件(180)
5. 已知兩條坐標軸上的截距(182)

§ 43 把點的坐標代入直線方程左邊的結果 182

1. 三項式 $Ax + By + C$ 的正負號的幾何意義(183)
2. 線性不等式的幾何意義(184)
3. 三項式 $Ax + By + C$ 的絕對值的幾何意義(185)
4. 線段被直線所分成的比值。已知新笛卡兒坐標軸的方程求坐標變換(185)
5. 直線方程法化的問題(187)

§ 44a 直線的法化方程。從點到直線的距離(第一種講法) 187

1. 法化因子(187)
2. 直線的法化方程。從點到直線的距離(188)
- **3. 向量 (A, B) , 作為線性函數 $Ax + By + C$ 的梯度(189)
- **4. 在一般笛卡兒坐標系統的情形中,直線方程的法化(189)
5. 直線方程的海色法線式(189)

§ 44b 直線的法化方程。從點到直線的距離(第二種講法) 191

1. 直線方程的度量解釋(191)
2. 法化因子。直線的法化方程。直線方程的

海色法線式(192) 3. 從點到直線的距離(193) **4. 在一般的笛卡兒坐標系統的情形中,直線方程的法化(194)

第二篇 平面上兩條直線的相互位置..... 194

§ 45 平面上兩條直線相互位置的三種可能情形。平行的條件。兩條直線的交點.....194

1. 兩條直線重合的條件(194) 2. 兩條直線平行的條件(195) 3. 平面上區別兩條直線相互位置的三種可能情形的普遍規則(195) 4. 兩條直線的交點(196)

§ 46 平面上有順序的一對方向中間的角.....196

1. 平面上兩個方向中間的角和有順序的一對方向中間的角(196) 2. 有順序的一對由向量規定的方向中間的角;它的公式(197) 3. 兩個方向的垂直條件(198)

§ 47 平面上有順序的一對直線中間的角。兩條直線的垂直條件..... 193

1. 平面上有順序的一對直線中間的角;它用正切的規定法(198) 2. 有順序的一對直線中間角的正切,用這些直線在直角坐標裏的斜率表達的公式(199) 3. 兩條直線的垂直條件,用這兩條直線在直角坐標裏的斜率來表達的式子(199) 4. 有順序的一對由普遍方程規定的直線中間的角,它的正切的公式和這樣兩條直線的垂直條件(200)

第三篇 直線束。縮短記號的方法..... 202

§ 48 直線束的方程.....202

1. 直線束(202) 2. 包含着兩條已知直線的直線束的方程(202) 3. 直線束方程的研究(203)

**§ 49 平面上三條直線相互位置的七種可能情形.....204

**§ 50 平面上的直線和空間中的向量的對比.....205

§ 51 關於平面上的直線的縮短記號的方法。平面上任意直線的方程,作為組成三角形的三條直線方程的線性組合.....206

第四篇 凸集合。線性不等式..... 207

§ 52 凸集合。線性不等式組.....207

1. 凸集合的定義和例子(207) 2. 關於凸集合的交的定理(209) 3. 凸外蓋(209) **4. 有限的點集合的凸外蓋(210) 5. 線性不等式組的幾何意義(211)

**§ 53 三個線性不等式規定三角形的必要和充分的條件.....213

第四章 橢圓,雙曲線,拋物線..... 217

第一篇 橢圓	219
*§ 54 橢圓的仿射性質	219
1. 圖形的仿射和度量性質 (219) 2. 任意的圓周, 作為橢圓的特別情形 (220)	
3. 圖形的對稱中心 (221) 4. 橢圓的中心 (221) 5. 橢圓與直線的相交 (222)	
6. 橢圓的直徑 (222) 7. 共軛直徑 (223)	
*§ 55 橢圓的對稱軸. 橢圓, 作為圓周壓縮的結果和作為圓周的正射影	225
1. 圖形的對稱軸 (225) 2. 橢圓的兩條對稱軸的存在 (225) 3. 橢圓作為圓周壓縮的結果 (225)	
4. 在不是圓周的橢圓中只有兩條對稱軸 (226) 5. 橢圓的半軸 (227) **6. 平面仿射變換的立方向 (227)	
7. 橢圓作為圓周的正射影 (228)	
*§ 56 關於橢圓的阿坡隆尼亞定理	229
1. 關於橢圓的第一個阿坡隆尼亞定理 (229) 2. 關於橢圓的第二個阿坡隆, 尼亞定理 (229)	
✓ **§ 57 橢圓旋轉、變換的誘發	230
1. 平面上把橢圓變成自己的仿射變換用平面上把圓周變成自己的仿射變換來誘發 (230)	
2. 橢圓旋轉 (230) 3. 橢圓旋轉的角 (231) 4. 平面上把橢圓變成自己的所有仿射變換的決定 (231)	
5. 變換誘發的普遍方法 (232) 6. 橢圓旋轉的公式 (233)	
§ 58 橢圓的標準方程和普遍形狀	234
1. 橢圓的標準方程 (234) 2. 橢圓作為圓周壓縮的結果 (234) 3. 橢圓的中心、軸線和頂點 (235)	
**4. 橢圓的面積 (236)	
§ 59 橢圓的直徑 (解析法)	236
1. 橢圓與直線的相交 (236) 2. 橢圓的直徑 (238) 3. 共軛直徑 (239)	
§ 60 橢圓的焦點、離心率、準線和焦參數	240
1. 橢圓的焦點和離心率 (240) 2. 橢圓的準線 (241) 3. 橢圓的焦參數 (241)	
§ 61 橢圓的焦點性質	242
§ 62 橢圓的準線性質	244
§ 63 橢圓的切線	245
1. 曲線的切線 (245) 2. 標準坐標裏橢圓切線的方程 (246) 3. 橢圓切線作為角的平分線的性質 (248)	
§ 64 橢圓的主要作圖	251
*1. 仿射作圖 (251) **2. 用仿射方法來完成仿射作圖 (251) *3. 橢圓按着兩個共軛半徑的仿射作圖 (252)	
4. 橢圓按着軸線的作圖 (253) 5. 橢圓按着軸線的第二種作圖 (254)	
6. 橢圓規 (255) **7. 雷翁那陀·達·芬奇的	

鐵床頭(256) 8. 橢圓的參數方程(256) 9. 橢圓按着焦點和長軸的作圖(256) **10. 橢圓用紙片摺疊的作圖(257) 11. 橢圓的中心、軸線、焦點和準線按着它的周線的作圖(258) 12. 已知切點的橢圓切線的作圖(259) 13. 橢圓切線從橢圓外的點的作圖(260)

第二篇 雙曲線..... 260

§ 65 等邊雙曲線..... 260

1. 等邊雙曲線的定義(260) 2. 等邊雙曲線對於漸近線的方程(261) 3. 等邊雙曲線對於漸近線的方程的幾何意義(263)

*§ 66 雙曲線的仿射性質: 兩個幾何的定義, 漸近線和中心..... 264

1. 一般雙曲線的兩個幾何的定義(264) 2. 雙曲線的漸近線(264) 3. 雙曲線只有兩條漸近線(264) 4. 雙曲線的中心(265) 5. 共軛雙曲線(265) 6. 共漸近線的雙曲線族(266)

*§ 67. 雙曲線的對稱軸作為等邊雙曲線壓縮結果的一般雙曲線..... 267

1. 雙曲線的對稱軸(267) 2. 頂點, 實軸和虛軸(268) 3. 雙曲線的“外切長方形”(268) 4. 作為等邊雙曲線壓縮結果的一般雙曲線(269)

✓*§ 68 雙曲旋轉..... 270

1. 雙曲旋轉的定義和總的描述(270) **2. 夾在雙曲線和它的漸近線中間的面積的無限性(272) **3. 把雙曲線變成自己的任意仿射變換(272)

*§ 69 雙曲線的仿射性質: 與直線的相交, 直徑..... 273

1. 關於在雙曲旋轉下直線的變換的引理(273) 2. 雙曲線與直線的相交(274) 3. 雙曲線的直徑(275) 4. 共軛直徑(277) 5. 共軛方向的作圖(278)

*§ 70 關於雙曲線的阿坡隆尼亞定理..... 279

1. 關於雙曲線的第一個阿坡隆尼亞定理(279) 2. 關於雙曲線的第二個阿坡隆尼亞定理(279)

✓***§ 71 雙曲旋轉的係數和角。雙曲函數..... 280

1. 雙曲旋轉的係數(280) 2. 雙曲旋轉的角(280) 3. 在雙曲旋轉的角和係數中間的函數關係(281) 4. 雙曲函數(283) 5. 正雙曲旋轉的公式。用指數表示雙曲函數的式子(234) 6. 一般雙曲旋轉的公式(285) 7. 羅倫茲變換(286)

§ 72 雙曲線的標準方程和普遍形狀..... 286

1. 雙曲線的標準方程(286) 2. 雙曲線的中心和軸線(287) 3. 雙曲線的分支和漸近線(288)

§ 73 雙曲線的直徑(解析法)..... 290

1. 雙曲線與直線的相交(290) 2. 雙曲線的直徑(292) 3. 共軛直徑(294)	
§ 74 雙曲線的離心率、焦點、準線和焦參數.....	295
1. 雙曲線的離心率(295) 2. 雙曲線的焦點和準線(295) 3. 雙曲線的焦參數(296)	
§ 75 雙曲線的焦點性質.....	296
§ 76 雙曲線的準線性質.....	298
§ 77 雙曲線的切線.....	299
1. 標準坐標裏雙曲線切線的方程(299) **2. 漸近線是雙曲線的切線當切點遠在無窮遠處時的極限位置(301) 3. 雙曲線切線作為平分線的性質(302)	
✓**4. 雙曲線的切線從漸近線中間的角所截下的面積(303)	
§ 78 雙曲線的主要作圖.....	303
*1. 雙曲線按着漸近線和一個點的仿射作圖(303) 2. 雙曲線按着焦點和實軸的作圖(304) **3. 雙曲線用紙片摺疊的作圖(305) 4. 雙曲線的中心、軸線、焦點、漸近線和準線按着它的周線的作圖(306) 5. 已知切點的雙曲線切線的作圖(308) 6. 雙曲線切線從雙曲線外一個點的作圖(308)	
第三篇 拋物線.....	308
§ 79 拋物線的普遍形狀.....	308
§ 80 拋物線的平行移動.....	311
1. 從拋物線 $y=kx^2$ 經過平行移動而得到的拋物線的普遍方程(311) 2. 通過三個點的拋物線的引進法(311)	
✓*§ 81 拋物旋轉.....	313
*§ 82 拋物線與直線的相交。拋物線的直徑.....	315
1. 拋物線與直線的相交(315) 2. 拋物線的直徑(316) 3. 與拋物線的直徑共軛的方向(316)	
*§ 83 任意拋物線的對稱軸。所有拋物線的相似.....	317
1. 任意拋物線的對稱軸的存在(317) 2. 在以任意拋物線的頂點為原點、以對稱軸為縱軸的直角坐標系統裏,這個拋物線的方程(317) 3. 所有拋物線的相似(319)	
**§ 84 把拋物線變成自己的仿射變換.....	319
§ 85 拋物線的標準方程。焦點、準線和焦參數.....	320
1. 拋物線的標準方程(321) 2. 焦點、準線和焦參數(322)	
§ 86 拋物線的直徑(解析法).....	322
1. 拋物線與直線的相交(323) 2. 拋物線的直徑(323)	
§ 87 拋物線的準線性質.....	325

§ 88 拋物線的切線.....	326
1. 標準坐標裏拋物線切線的方程 (326) 2. 拋物線切線作為平分線的性質 (328)	
§ 89 拋物線的主要作圖.....	329
*1. 拋物線按着切線、通過切點的直徑和一個點的作圖 (329) 2. 拋物線按焦點和準線的作圖 (331) **3. 拋物線用紙片摺疊的作圖 (331) 4. 拋物線的對稱軸、焦點和準線按着它的周線的作圖 (332) 5. 已知切點的拋物線切線的作圖 (333) 6. 拋物線切線從拋物線外一個點的作圖 (333)	
**第四篇 橢圓、雙曲線和拋物線的族.....	334
**§ 90 共焦點的橢圓和雙曲線.....	334
1. 共焦點的橢圓和雙曲線的族的方程 (334) 2. 共焦點的橢圓族和共焦點的雙曲線族的正交性 (334)	
**§ 91 同位相似的橢圓、雙曲線和拋物線的族.....	335
1. 兩個變數函數的平準線 (335) 2. 同位相似的橢圓族的方程 (335) 3. 共漸近線的雙曲線族的方程 (336) 4. “同位相似”的拋物線 (336)	
**§ 92 橢圓、雙曲線和拋物線對於頂點和通過焦點的軸線說的方程.....	337
第五篇 橢圓、雙曲線和拋物線在極坐標裏的方程.....	338
§ 93. 極坐標.....	338
1. 極坐標的定義 (338) 2. 連繫極坐標和直角坐標的公式 (339) **3. 在極坐標裏的曲線方程的例子 (340)	
§ 94 橢圓、雙曲線和拋物線在極坐標裏的焦點方程.....	340
**第六篇 橢圓、雙曲線和拋物線作為圓錐截線.....	341
**§ 95 圓錐截線.....	341
1. 正圓錐曲面 (341) 2. 圓錐與不同傾斜度的平面相交 (341) 3. 橢圓作為圓錐截線 (342) 4. 雙曲線作為圓錐截線 (343) 5. 拋物線作為圓錐截線 (344) 6. 橢圓和雙曲線的準線 (344)	
**§ 96 二階錐面.....	345
**§ 97 橢圓、雙曲線和拋物線作為圓周的透視.....	345
第五章 二階曲線的一般理論.....	347
*第一篇 二階曲線利用雅可比的配平方法的仿射分類.....	348
*§ 98 曲線的仿射分類的原則.....	348
1. 圖形的仿射類 (348) 2. 由已知次數的代數方程表達的曲線的仿射分類問	

題 (349)

*§ 99	用配平方的方法把帶兩個變數的二次多項式引向最簡單的形狀.....	350
1.	仿射等價的多項式 (350)	
2.	用配平方的方法把帶兩個變數的二次多項式引向最簡單的形狀 (351)	
*§ 100	二階曲線的仿射分類	355
1.	二階曲線的八個仿射類 (355)	
2.	最簡單的多項式的仿射不等價性 (359)	
**§ 101	從二階曲線的方程應用配平方的方法求它的仿射類和它在平面上的位置的一些例子	359
第二篇	二階曲線的歸範方程、標準方程和仿射分類	365
§ 102	利用變數的正交變換把二元二次形式變成平方和	366
§ 103	利用變數的正交變換把帶兩個變數的二次多項式變成歸範多項式和標準多項式	367
1.	變成歸範多項式的變換 (367)	
2.	整理成標準形狀 (369)	
§ 104	二階曲線的仿射分類	372
1.	在直角坐標裏由標準方程表達的曲線 (372)	
2.	由同樣形狀的標準方程表達的二階曲線的仿射等價性 (373)	
3.	由不同形狀的標準方程表達的二階曲線的仿射不等價性 (376)	
4.	二階曲線的仿射類 (376)	
第三篇	二階曲線標準方程的參數利用不變量的計算法	377
§ 105	關於二次形式的變換的定理	377
1.	二次形式的矩陣 (377)	
2.	在變數的齊次線性變換下二次形式的變換 (378)	
3.	在變數的齊次線性變換下二次形式的行列式的改變 (380)	
§ 106	帶兩個變數的二次多項式的前兩個不變量	381
§ 107	帶兩個變數的二次多項式的第三個不變量	384
✓ § 108	半不變量	385
✓ § 109	帶兩個變數的二次多項式的歸範類型通過不變量和半不變量的檢驗法 ...	389
✓ § 110	歸範多項式的係數通過不變量和半不變量的計算法	390
§ 111	二階曲線的類和它的標準方程利用不變量的決定法·總表	394
§ 112	特別情形:圓周、等邊雙曲線和一對垂直線的方法的檢驗法	400
1.	表達圓周的二次方程的檢驗法 (400)	
2.	表達等邊雙曲線的二次方程的檢驗法 (402)	
3.	表達一對互相垂直的直線的二次方程的檢驗法 (402)	
**§ 113	對於一般的笛卡兒坐標系統而言,帶兩個變數的二次多項式的度量不變量	403
1.	度量不變量 (403)	
2.	前兩個度量不變量 (405)	
3.	第三個度量不變量	

(406) 4. 度量半不變量(407)

**§ 114 在已知度量的任意標架裏,從二階曲線的已知方程求它的標準方程.....408

第四篇 在原来的直角坐標系統的標架裏,二階曲線的位置.....409

§ 115 二階中心曲線位置問題的解決 410

1. 把坐標原點平行移動到中心(410) 2. 橢圓和雙曲線的軸線(412) 3. 一對相交的直線(414) 4. 雙曲線的漸近線(415) **5. 例子(415)

§ 116 拋物線位置問題的解決 418

§ 117 一對平行直線位置問題的解決 424

第五篇 在複二維空間裏的二階曲線..... 428

§ 118 關於複二維空間 428

1. 定義(428) 2. 直線的參數方程(429) 3. 平面上用方向向量的坐標來規定方向(430) 4. 變換成新的笛卡兒坐標(431)

§ 119 二階曲線與直線的交點 432

§ 120 二階曲線的漸近方向。橢圓型、雙曲型和拋物型曲線.....435

1. 漸近方向(435) **2. 關於首項係數趨向於零的二次方程的根的引理(435) **3. 二階曲線的“無窮遠點”(436) 4. 橢圓型、雙曲型和拋物型曲線(437)

§ 121 二階曲線的中心 439

1. 決定中心的方程(439) 2. 中心的和非中心的二階曲線(440) 3. 把坐標原點移到中心(441)

§ 122 二階曲線的直徑 443

1. 與已知的非漸近方向共軛的直徑(443) 2. 直徑的方程(443) 3. 二階中心曲線的直徑(444) 4. 漸近線(446) 5. 二階非中心曲線的直徑(447) 6. 主直徑(448) 7. 二階中心曲線對於共軛直徑說的方程(450) 8. 二階非中心曲線對於直徑和共軛方向的軸線說的方程(450) 9. 把實二階曲線的方程引向標準形狀(451)

§ 123 二階曲線的切線 452

1 二階曲線切線的代數形式上的定義(452) 2. 切線的方程(453) 3. 一對不重合直線的情形(454) 4. 切線和直徑中間的關係(454) 5. 不可分解的二階曲線、對於切線和通過切點的直徑說的方程(454)

索引..... 456

第二部分 平面解析幾何

引 言

§ 37 關於在笛卡兒坐標中用有兩個變數的方程

表示的曲線。曲線的參數方程

1. 解析幾何的基本觀念 笛卡兒^①創立的解析幾何的根據是下面的想法。設給了有兩個未知數的一個方程：

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

這樣的方程到笛卡兒時代為止在代數上叫做不定的，因為一般說來，適合它的不是 x, y 的一對確定的值，而是這種數偶的無窮集合。可以令 $x = x_0$ 是任意的值，得到只有一個未知數 y 的方程

$$F(x_0, y) = 0, \quad (2)$$

然後對這個未知數求解。由此得到的值 $y = y_0$ ，與 $x = x_0$ 合成適合方程 (1) 的一對數目 x_0, y_0 。〔當然，方程 (2) 並非常常有解或者只有一個解，但是問題的實質不變。〕可是笛卡兒以及和他同時的其他數學家（例如弗兒馬）注意到，從幾何方面去討論方程 (1) 的解 x, y 的問題是有意義的。那就是，若認為 x 是一個點的橫坐標，而 y 是縱坐標，則上面所說的就有下面的幾何意義：與每一個給定的橫坐標 x 對應，方程 (1) 給出一個完全確定的縱坐標 y 〔或者幾個縱坐標，假若給定 x 時方程 (2) 有幾個解 y ；或者沒有一個，假若給定 x 時方程 (2) 沒有實解 y 〕，這說明它規定了平面 x, y 上的一條曲線（圖 78）。這樣，當取定一個笛卡兒坐標系統時，在所說的意義下，與每個有兩個變數的方程對應的是

①笛卡兒的書“幾何學”是 1637 年出版的。有俄文譯本：Рене Декарт, Геометрия. ОНТИ, Москва 1938。

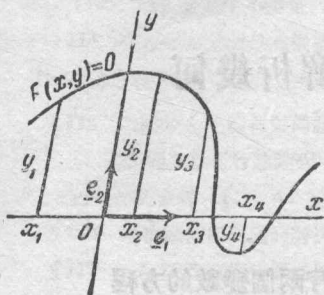


圖 78

平面 x, y 上一條完全確定的曲線。同時，就像坐標的方法在使點與數偶 x, y ——它們的坐標對應時把點算術化了一樣，所說的有兩個變數的方程和曲線的對應也把平面上的曲線算術化了，或者不如說，代數化了。這時曲線的幾何性質的問題就化為它們方程的解析性質的問題。這個美妙的觀念也

就是解析幾何的開端。

一開始就提出了解析幾何的兩個不同的，可以說是相反的，基本問題。一方面，可以取最簡單的，然後是比較複雜的方程，來研究它們表示怎樣的曲線。另一方面，可以取各種正規曲線，來研究它們對應於怎樣的方程。沿第一個方向的研究引到下面的重要事實。發現了，一次方程表示直線，二次方程，若除去某些特別情形，表示所謂圓錐截線——橢圓（特別情形是圓周），雙曲線和拋物線，它們是古代希臘數學家詳細研究過的，並且在力學、天文、物理、技術中有很大的價值。也發現了，曲線方程的代數性質的研究，常常引到它的重要的幾何性質的獲得。例如，所有那些早已獲得的圓錐截線的幾何性質，後來就從它們方程的代數的研究推出。

沿第二個方向的研究給出詳細研究在實際中遇到的各種比較複雜的曲線的可能。

2. 在笛卡兒坐標中用方程表示的曲線。例子 現在讓我們來確切地弄清楚所謂用已知方程表示的曲線。

定義 在笛卡兒坐標 x, y 中間的方程 $F(x, y) = 0$ 所表示的曲線，是指平面上坐標適合這個方程的所有點的集合。

因此，要證明某條曲線由已知方程表示，必須證明兩件事情：1° 曲線上所有的點都適合這個方程，和 2° 不在曲線上的點不適合這個方程

(即所有適合方程的點都在曲線上)。

讓我們察看幾個例子；這時爲了簡單起見我們總假定 x, y 是直角坐標。

例子 1. 方程 $x^2 + y^2 - 9 = 0$ 或者 $x^2 + y^2 = 9$ 。因爲 $x^2 + y^2$ 是從點 (x, y) 到坐標原點距離的平方，所以適合這個方程的是而且只是平面上與原點的距離等於 3 的點。因此，所討論的方程表示中心在坐標原點而半徑爲 3 的圓周(圖 79)。

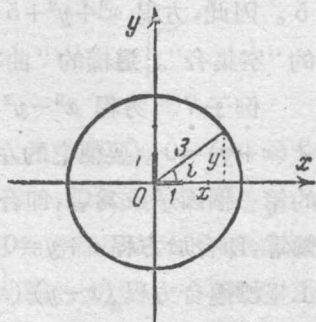


圖 79

例子 2. 方程 $x - y = 0$ 或者 $x = y$ 。容易看出，所有而且只有那些落在奇數坐標角的平分線上的點，才有 $x = y$ 。因此，方程 $x - y = 0$ 表示這條平分線(圖 80)。

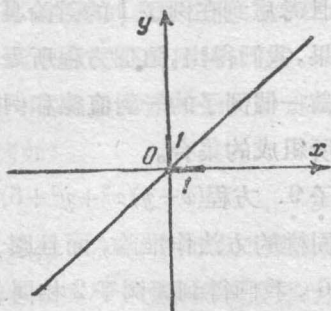


圖 80

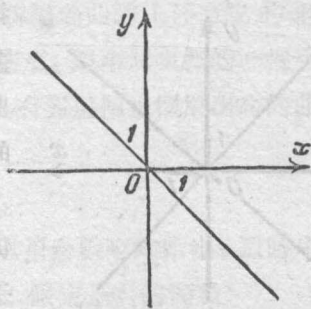


圖 81

例子 3. 方程 $x + y = 0$ 或者 $x = -y$ 。容易看出，所有而且只有那些落在偶數坐標角的平分線上的點，才有 $x = -y$ 。因此，方程 $x + y = 0$ 表示這條平分線(圖 81)。

例子 4. 方程 $x^2 + y^2 = 0$ 。適合這個方程的只有 x, y 的一對值，即 0, 0，因爲假若數目 x, y 中的一個不等於零，則 $x^2 + y^2$ 就大於零。因此，方程 $x^2 + y^2 = 0$ 所表示的“曲線”只由一個點，就是坐標原點，組成。

例子 5. 方程 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 0$ 。與前一個例子中的論斷一樣，要適合這個方程，只有使 $x-4=0$, $y-5=0$, 即 $x=4$, $y=5$ 。因此，這個方程所表示的“曲線”只由一個點 $(4,5)$ 組成。

例子 6. x, y 的任何一對實數值都不適合方程 $x^2 + y^2 + 5 = 0$, 因為對於任何實數 x, y , 數目 $x^2 + y^2$ 都是非負的，以致這個數目不小於 5。因此，方程 $x^2 + y^2 + 5 = 0$ 所表示的“曲線”沒有一個點，也就是點的“空集合”。這樣的“曲線”叫作零曲線。

例子 7. 方程 $x^2 - y^2 = 0$ 。這個方程可以另外寫成 $(x-y) \cdot (x+y) = 0$ 。要使它的左邊成為零，明顯地，必要而且只要，或者使它的第一個因子成為零，即合於方程 $x-y=0$, 或者使它的第二個因子成為零，即合於方程 $x+y=0$ (或者使兩個因子同時成為零)。因此，平面上坐標適合方程 $(x-y)(x+y)=0$ 的所有點的集合，就由奇數和偶數坐標角的平分線上所有的點的集合組成，而沒有任何其他的點(看例子 2 和 3)。這樣，方程 $x^2 - y^2 = 0$ 所表示的曲線是一對直線(圖 82)。

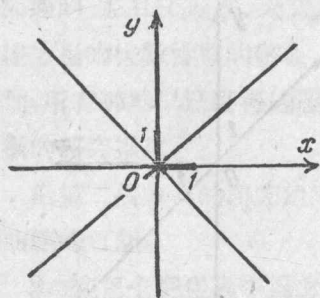


圖 82

例子 8. 方程 $(x^2 + y^2 - 9)(x^2 - y^2) = 0$ 。像前一個例子一樣地作推論而且考慮到在例子 1 的討論裏所得到的結果，我們得出，這個方程所表示的曲線是前一個例子的一對直線和例子 1 的圓周所組成的集合。

例子 9. 方程 $(x-y)(x^2 + y^2 + 5) = 0$ 。仍舊用同樣的方法作推論，而且應用例子 2 和 6，我們得到與例子 2 相同的曲線，即奇數坐標角的平分線。實際上，左

邊第二個因子 $x^2 + y^2 + 5$ 對於任何 x, y 都不能成為零，因此，使左邊成為零的是而且只是使第一個因子成為零的那些點。

例子 10. 方程 $(x^2 + y^2 - 9)[(x-4)^2 + (y-5)^2] = 0$ 。應用例子 1 和 5，我們得到，這個方程所表示的曲線由中心在原點半徑為 3 的圓

周和點(4,5)組成(圖 83)。

例子 11. 方程 $(x^2+y^2)[(x-4)^2+(y-5)^2]=0$ 。同樣地作推論,我們得到,這個方程所表示的曲線由兩個而且只由兩個點,就是坐標原點和點(4,5),組成。

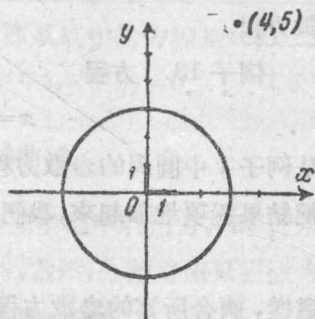


圖 83

例子 12. 方程 $(x-y)^2=0$ 。它顯然等價於方程 $x-y=0$, 即表示奇數坐標角的平分線(看例子 2)。有時爲了方便,把方程 $(x-y)^2=0$ 看作“一對重合直線”的方程,它們每一條都是方程 $x-y=0$ 所表示的。

我們現在已經考察了一系列如何求得已知方程所表示的曲線的例子。解決反面問題——如何求得表示已知曲線的方程——的例子,我們將在下列各節裏見到: §§ 39, 42 和 446 (直線方程的導出), §§ 61 和 62 (橢圓方程的導出), §§ 75 和 76 (雙曲線方程的導出), 以及 § 87 (拋物線方程的導出)。

3. 曲線的參數方程 方程(1)是聯繫着曲線上任意點的坐標 x 和 y 的函數關係的解析寫法。在特別情形,這兩個坐標的一個可以作爲另一個的顯函數來給定。那時我們就有對這個坐標解出來的曲線方程;例如:

$$y=f(x)。$$

坐標 x 和 y 中間的函數關係也可以用參數形式給出,這時坐標 x 和 y 都表成叫作參數的第三個補助變數,假定是 t , 的函數:

$$x=\varphi(t), y=\psi(t)。 \quad (3)$$

實際上,一般說來,只對於 t 的一個或者幾個值, x 可以取得給定的特殊值;這樣,對於 x 的每個給定的值,一般說來,只有 y 的一個或者幾個值與它對應,而這也就是說, x 和 y 被函數關係所聯繫。從方程(3)中消去 t , 我們就把這個關係表成(1)的形狀。方程(3)叫作曲線的參數方程。

數方程。

例子 13. 方程

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t$$

是例子 1 中圓周的參數方程。實際上，把兩個方程的左右兩邊平方再把結果逐項地加起來，我們得到：

$$x^2 + y^2 = 9。$$

這樣，適合所寫的參數方程的每個點，也適合例子 1 的方程。容易看出，反過來，適合例子 1 的方程的每個點，都可以由參數 t 的一個值得到。這時 t 在這裏有簡單的幾何意義：它是 x 軸和引向圓周上點 (x, y) 的半徑中間的角（看圖 79）。當 t 從 0 變到 2π 時，點 (x, y) 繞行整個圓周。

4. 曲線的交點 兩條曲線的每一個交點（也就是公共點）的坐標，顯然應該同時滿足這兩條曲線的方程。而且反過來，如果一個點的坐標滿足兩條曲線的方程，則它顯然是這兩條曲線的公共點。因此，要找出曲線的交點，只需要聯立地解這些曲線的方程：這些方程的組的每個解，都給出它們所表達的曲線的一個交點，反之亦然。

5. 在笛卡兒坐標變換下曲線方程的變換 在變到新的坐標系統時，一般說來，曲線方程的形狀就變了。曲線方程變換的公式與坐標變換的公式有着顯然的聯繫。設

$$F(x, y) = 0 \quad (4)$$

是已知曲線在一個笛卡兒坐標系統中的方程。那麼要得到同一條曲線在另一個笛卡兒坐標系統中的方程，只須在方程 (4) 中把 x 和 y 換成它們用新坐標 x' 和 y' 表示的式子。我們在 § 7 裏看到過，點的新笛卡兒坐標用同一個點的新笛卡兒坐標來表示的公式是

$$x = a_1 x' + b_1 y' + \xi,$$

$$y = a_2 x' + b_2 y' + \eta,$$

其中 ξ, η 是新坐標原點的舊坐標，而 a_1, a_2 和 b_1, b_2 是新坐標向