高等學校教學用書

解析幾何學

第一卷 第二分册

Б. Н. ДЕЛОНЕ, Д. А. РАЙКОВ著
北京大學數學力學系幾何教研組譯

商務印書館

高等學校教學用書

解析幾何學

第一卷 第二分册

Б. Н. 狄隆涅, Д. А. 拉伊可夫著
北京大學數學力學系幾何教研組譯

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико—теоретической литературы)出版的狄隆涅(Б. Н. Делоне)和拉伊可夫(Д. А. Райков)合著"解析幾何學"第一卷(Аналитическая Геометрия I)1948年版譯出。在蘇聯高等教育部1952年批准的大學數學力學系數學和力學專業一年級解析幾何學大綱裏,本書是主要參考書之一。

本書(第一卷)中譯本分第一·二分册出版。第一分册是全書的緒論,內容包括向量,笛卡兒坐標,仿射映射和交映射等。第二分册講平面上的解析幾何,內容包括平面上的直線,橢圓、雙曲線、拋物線,二階曲線的一般理論。

本書(第一卷)由北京大學數學力學系幾何教研組諸同志集體翻譯。

解 析 幾 何 學

第一卷 第二分册

北京大學數學力學系幾何教研組譯

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷

(13017·76)

1953年11月初版	開本850×1168 1/32
1956年8月4版	字數272,000
1956年11月上海第2次印刷	印數11,001—12,500
印張9 12/16	定價(8)¥1.10

第二分冊目次

第二部分　平面解析幾何

引　言

§37　關於在笛卡兒坐標中用有兩個變數的方程表示的曲線。曲線的參數方程

1. 解析幾何的基本觀念　笛卡兒❶創立的解析幾何的根據是下面的想法。設給了有兩個未知數的一個方程：

$$F(x, y)=0\ 。\tag{1}$$

這樣的方程到笛卡兒時代爲止在代數上叫做不定的，因爲一般說來，適合它的不是 x, y 的一對確定的值，而是這種數偶的無窮集合。可以令 $x=x_0$ 是任意的值，得到只有一個未知數 y 的方程

$$F(x_0, y)=0,\tag{2}$$

然後對這個未知數求解。由此得到的值 $y=y_0$，與 $x=x_0$ 合成適合方程(1)的一對數目 x_0, y_0。〔當然，方程(2)並非常常有解或者只有一個解，但是問題的實質不變。〕可是笛卡兒以及和他同時的其他數學家(例如弗兒馬)注意到，從幾何方面去討論方程(1)的解 x,y 的問題是有意義的。那就是，若認爲 x 是一個點的橫坐標，而 y 是縱坐標，則上面所說的就有下面的幾何意義：與每一個給定的橫坐標 x 對應，方程(1)給出一個完全確定的縱坐標 y〔或者幾個縱坐標，假若給定 x 時方程(2)有幾個解 y；或者沒有一個，假若給定 x 時方程(2)沒有實解 y〕，這說明它規定了平面 x,y 上的一條曲線(圖 78)。這樣，當取定一個笛卡兒坐標系統時，在所說的意義下，與每個有兩個變數的方程對應的是

❶笛卡兒的書"幾何學"是 1637 年出版的。有俄文譯本：Ренэ Декарт, Геометрия. ОНТИ, Москва 1938。

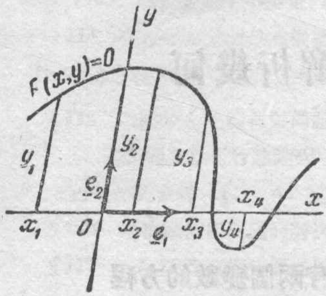

圖 78

平面 x, y 上一條完全確定的曲線。同時，就像坐標的方法在使點與數偶 x, y ——它們的坐標對應時把點算術化了一樣，所說的有兩個變數的方程和曲線的對應也把平面上的曲線算術化了，或者不如說，代數化了。這時曲線的幾何性質的問題就化爲它們方程的解析性質的問題。這個美妙的觀念也就是解析幾何的開端。

一開始就提出了解析幾何的兩個不同的，可以說是相反的，基本問題。一方面，可以取最簡單的，然後是比較複雜的方程，來研究它們表示怎樣的曲線。另一方面，可以取各種正規曲線，來研究它們對應於怎樣的方程。沿第一個方向的研究引到下面的重要事實。發現了，一次方程表示直線，二次方程，若除去某些特別情形，表示所謂圓錐截線——橢圓（特別情形是圓周），雙曲線和拋物線，它們是古代希臘數學家詳細研究過的，並且在力學、天文、物理、技術中有很大的價值。也發現了，曲線方程的代數性質的研究，常常引到它的重要的幾何性質的獲得。例如，所有那些早已獲得的圓錐截線的幾何性質，後來就從它們方程的代數的研究推出。

沿第二個方向的研究給出詳細研究在實際中遇到的各種比較複雜的曲線的可能。

2. 在笛卡兒坐標中用方程表示的曲線。例子 現在讓我們來確切地弄清楚所謂用已知方程表示的曲線。

定義 在笛卡兒坐標 x, y 中間的方程 $F(x, y)=0$ 所表示的曲線，是指平面上坐標適合這個方程的所有點的集合。

因此，要證明某條曲線由已知方程表示，必須證明兩件事情：1° 曲線上所有的點都適合這個方程，和 2° 不在曲線上的點不適合這個方程

(即所有適合方程的點都在曲線上)。

讓我們察看幾個例子；這時爲了簡單起見我們總假定 x, y 是直角坐標。

例子 1. 方程 $x^2+y^2-9=0$ 或者 $x^2+y^2=9$。因爲 x^2+y^2 是從點 (x, y) 到坐標原點距離的平方，所以適合這個方程的是而且只是平面上與原點的距離等於 3 的點。因此，所討論的方程表示中心在坐標原點而半徑爲 3 的圓周(圖 79)。

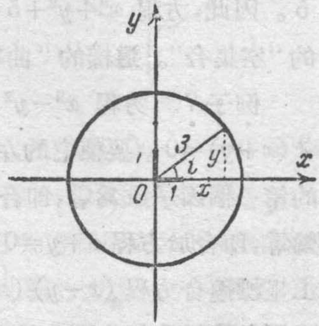

圖 79

例子 2. 方程 $x-y=0$ 或者 $x=y$。容易看出，所有而且只有那些落在奇數坐標角的平分線上的點，才有 $x=y$。因此，方程 $x-y=0$ 表示這條平分線(圖 80)。

例子 3. 方程 $x+y=0$ 或者 $x=-y$。容易看出，所有而且只有那些落在偶數坐標角的平分線上的點，才有 $x=-y$。因此，方程 $x+y=0$ 表示這條平分線(圖 81)。

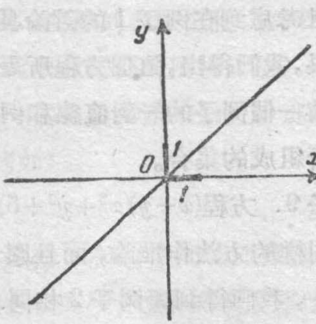

圖 80

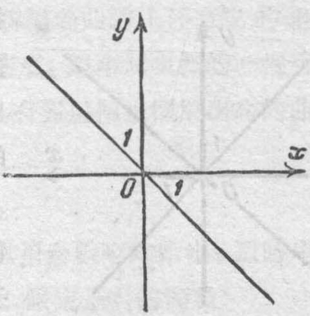

圖 81

例子 4. 方程 $x^2+y^2=0$。適合這個方程的只有 x, y 的一對值，即 0, 0，因爲假若數目 x, y 中的一個不等於零，則 x^2+y^2 就大於零。因此，方程 $x^2+y^2=0$ 所表示的“曲線”只由一個點，就是坐標原點，組成。

例子5．方程 $(x-4)^2+(y-5)^2=0$。與前一個例子中的論斷一樣,要適合這個方程,只有使 $x-4=0$, $y-5=0$, 即 $x=4$, $y=5$。因此,這個方程所表示的"曲線"只由一個點(4,5)組成。

例子6．x, y 的任何一對實數值都不適合方程 $x^2+y^2+5=0$, 因爲對於任何實數 x, y, 數目 x^2+y^2 都是非負的, 以致這個數目不小於5。因此,方程 $x^2+y^2+5=0$ 所表示的"曲線"沒有一個點,也就是點的"空集合"。這樣的"曲線"叫作零曲線。

例子7．方程 $x^2-y^2=0$。這個方程可以另外寫成 $(x-y)\cdot(x+y)=0$。要使它的左邊成爲零,明顯地,必要而且只要,或者使它的第一個因子成爲零,即合於方程 $x-y=0$, 或者使它的第二個因子成爲零,即合於方程 $x+y=0$ (或者使兩個因子同時成爲零)。因此,平面上坐標適合方程 $(x-y)(x+y)=0$ 的所有點的集合, 就由奇數和偶數坐標角的平分線上所有的點的集合組成,而沒有任何其他的點(看例子2和3)。這樣,方程 $x^2-y^2=0$ 所表示的曲線是一對直線(圖82)。

例子8．方程 $(x^2+y^2-9)(x^2-y^2)=0$。像前一個例子一樣地作推論而且考慮到在例子1的討論裏所得到的結果,我們得出,這個方程所表示的曲線是前一個例子的一對直線和例子1的圓周所組成的集合。

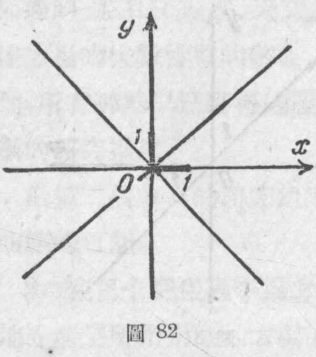

圖 82

例子9．方程 $(x-y)(x^2+y^2+5)=0$。仍舊用同樣的方法作推論, 而且應用例子2和6, 我們得到與例子2相同的曲線,即奇數坐標角的平分線。實際上,左邊第二個因子 x^2+y^2+5 對於任何 x, y 都不能成爲零,因此,使左邊成爲零的是而且只是使第一個因子成爲零的那些點。

例子10．方程 $(x^2+y^2-9)\,[(x-4)^2+(y-5)^2]=0$。應用例子1和5,我們得到,這個方程所表示的曲線由中心在原點半徑爲3的圓

周和點(4,5)組成(圖 83)。

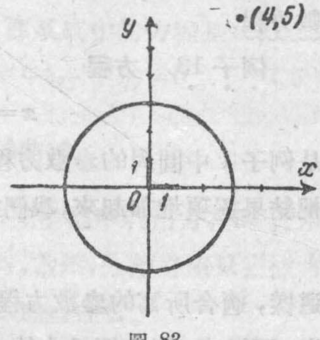

圖 83

例子 11. 方程$(x^2+y^2)[(x-4)^2+(y-5)^2]=0$。同樣地作推論，我們得到，這個方程所表示的曲線由兩個而且只由兩個點,就是坐標原點和點(4,5),組成。

例子 12. 方程 $(x-y)^2=0$。它顯然等價於方程 $x-y=0$，即表示奇數坐標角的平分線（看例子2）。有時為了方便，把方程 $(x-y)^2=0$ 看作"一對重合直線"的方程，它們每一條都是方程 $x-y=0$ 所表示的。

我們現在已經考察了一系列如何求得已知方程所表示的曲線的例子。解決反面問題——如何求得表示已知曲線的方程——的例子，我們將在下列各節裏見到：§§ 39,42 和 44б（直線方程的導出），§§ 61 和 62（橢圓方程的導出），§§ 75 和 76（雙曲線方程的導出），以及 § 87（拋物線方程的導出）。

3. 曲線的參數方程 方程（1）是聯繫着曲線上任意點的坐標 x 和 y 的函數關係的解析寫法。在特別情形，這兩個坐標的一個可以作為另一個的顯函數來給定。那時我們就有對這個坐標解出來的曲線方程；例如：

$$y=f(x)。$$

坐標 x 和 y 中間的函數關係也可以用參數形式給出，這時坐標 x 和 y 都表成叫作參數的第三個補助變數，假定是 t，的函數：

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)。\tag{3}$$

實際上，一般說來，只對於 t 的一個或者幾個值，x 可以取得給定的特殊值；這樣，對於 x 的每個給定的值，一般說來，只有 y 的一個或者幾個值與它對應，而這也就是說，x 和 y 被函數關係所聯繫。從方程（3）中消去 t，我們就把這個關係表成（1）的形狀。方程（3）叫作曲線的參

數方程。

例子 13. 方程

$$x=3\cos t,\quad y=3\sin t$$

是例子 1 中圓周的參數方程。實際上,把兩個方程的左右兩邊平方再把結果逐項地加起來,我們得到:

$$x^2+y^2=9\text{。}$$

這樣,適合所寫的參數方程的每個點,也適合例子 1 的方程。容易看出,反過來,適合例子 1 的方程的每個點,都可以由參數 t 的一個值得到。這時 t 在這裏有簡單的幾何意義:它是 x 軸和引向圓周上點(x,y)的半徑中間的角(看圖 79)。當 t 從 0 變到 2π 時,點(x, y)繞行整個圓周。

4. 曲線的交點 兩條曲線的每一個交點(也就是公共點)的坐標,顯然應該同時滿足這兩條曲線的方程。而且反過來,如果一個點的坐標滿足兩條曲線的方程,則它顯然是這兩條曲線的公共點。因此,要找出曲線的交點,只需要聯立地解這些曲線的方程:這些方程的組的每個解,都給出它們所表達的曲線的一個交點,反之亦然。

5. 在笛卡兒坐標變換下曲線方程的變換 在變到新的坐標系統時,一般說來,曲線方程的形狀就變了。曲線方程變換的公式與坐標變換的公式有着顯然的聯繫。設

$$F(x, y)=0 \tag{4}$$

是已知曲線在一個笛卡兒坐標系統中的方程。那麼要得到同一條曲線在另一個笛卡兒坐標系統中的方程,只須在方程(4)中把 x 和 y 換成它們用新坐標 x' 和 y' 表示的式子。我們在 § 7 裏看到過,點的舊笛卡兒坐標用同一個點的新笛卡兒坐標來表示的公式是

$$x=a_1x'+b_1y'+\xi,$$
$$y=a_2x'+b_2y'+\eta,$$

其中 ξ, η 是新坐標原點的舊坐標,而 a_1, a_2 和 b_1, b_2 是新坐標向