



新编初中

同步指导 强化训练

教与学丛书

主编 张敏

初二数学

天津教育出版社

新编初中教与学 丛书

初二数学

丛书主编: 严治理 于孝连 李志强

编委: 于孝连 王春利 王乐瑞

~~王春雷~~ ~~李志强~~ 孙晶煜

本册主编: 张 敏

副主编: 房 勇 王清华 贾 波

天津教育出版社

新编初中教与学丛书

严治理 于孝连 李志强 主编

天津教育出版社出版、发行

(天津市张自忠路 189 号)

山东省滨州师专印刷厂印刷

*

880×1230 毫米 32 开 136 印张 3500 千字

1998 年 8 月第 1 版

1998 年 8 月第 1 次印刷 1999 年 6 月第 2 次印刷

印数 5001—11000 册

ISBN 7—5309—2973—9
G·2455 (全套定价):138.00 元

目 录

第八章 因式分解	(1)
8.1 提公因式法	(1)
8.2 运用公式法	(4)
8.3 分组分解法	(10)
8.4 十字相乘法	(14)
单元总结	(19)
参考答案	(31)
第九章 分式	(36)
9.1 分式	(36)
9.2 分式的基本性质	(40)
9.3 分式的乘除法	(45)
9.4 分式的加减法	(51)
9.5 含有字母系数的一元二次方程	(58)
9.6 可化为一元二次方程的分式方程及其应用	(62)
单元总结	(70)
参考答案	(82)
第十章 数的开方	(92)
10.1 平方根	(92)
10.2 平方根表	(96)
10.3 用计算器进行数的简单计算	(99)
10.4 立方根	(99)
10.5 立方根表	(103)
10.6 用计算器求数的立方根	(105)
10.7 实数	(106)
单元总结	(110)
参考答案	(116)
第十一章 二次根式	(119)
11.1 二次根式	(119)
11.2 二次根式的乘法	(122)

11.3 二次根式的除法	(126)
11.4 最简二次根式	(131)
11.5 二次根式的加减法	(135)
11.6 二次根式的混合运算	(140)
11.7 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的化简	(145)
单元总结	(150)
参考答案	(161)
第三章 三角形	
3.1 关于三角形的一些概念	(167)
3.2 三角形三条边的关系	(170)
3.3 三角形的内角和	(172)
单元总结	(175)
3.4 全等三角形	(180)
3.5 三角形全等的判定(一)	(181)
3.6 三角形全等的判定(二)	(185)
3.7 三角形全等的判定(三)	(188)
3.8 直角三角形全等的判定	(190)
3.9 角的平分线	(192)
单元总结	(195)
3.10 基本作图	(199)
3.11 作图题举例	(201)
单元总结	(203)
3.12 等腰三角形的性质	(204)
3.13 等腰三角形的判定	(208)
3.14 线段的垂直平分线	(211)
3.15 轴对称和轴对称图形	(213)
单元总结	(217)
3.16 勾股定理	(221)
3.17 勾股定理的逆定理	(224)
单元总结	(227)
参考答案	(232)

第四章 四边形	(241)
4.1 四边形	(241)
4.2 多边形的内角和	(242)
4.3 平行四边形及其性质	(245)
4.4 平行四边形的判定	(247)
4.5 矩形 菱形	(251)
4.6 正方形	(254)
4.7 中心对称和中心对称轴图形	(259)
单元总结	(261)
4.8 梯形	(266)
4.9 平行线等分线段定理	(270)
4.10 三角形 梯形的中位线	(273)
单元总结	(277)
参考答案	(285)
第五章 相似形	(291)
5.1 比例线段	(291)
5.2 平行线分线段成比例定理	(294)
单元总结	(299)
5.3 相似三角形	(303)
5.4 三角形相似的判定	(304)
5.5 相似三角形的性质	(309)
5.6 相似多边形	(314)
单元总结	(318)
参考答案	(326)

第八章 因式分解

8.1 提公因式法

基础知识导学

1. 因式分解的概念

把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做把这个多项式因式分解,也叫做把这个多项式分解因式。正确理解因式分解的意义是学习因式分解的基础和前提。

2. 提公因式法

一般地,如果一个多项式的各项有公因式,可以把这个公因式提到括号外面,将多项式写成因式乘积的形式,这种分解因式的方法叫做提公因式法。此法是因式分解的最基本也是最重要的方法,只要多项式的各项有公因式,就应首先把它提出来。

重点难点突破

1. 学习多项式的因式分解,要注意它与整式乘法的区别与联系。整式乘法是把几个整式相乘,化为一个多项式,而因式分解则是把一个多项式化为几个整式的乘积,因此,因式分解是整式乘法的逆变形。例如,把 $m(a+b+c)$ 写成 $ma+mb+mc$ 是整式乘法,而把 $ma+mb+mc$ 写与 $m(a+b+c)$ 则是因式分解。即 $m(a+b+c)$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{整式乘法}} \\ \xleftarrow{\text{因式分解}} \end{array} ma+mb+mc$$

2. 提公因式法是因式分解的首选方法,提取的公因式的系数应是各项系数的最大公约数,字母取各项相同的字母,且各字母的指数要取最低次的,同时还要注意提取的公因式可能是单项式,也可能是多项式或单项式与多项式的乘积,提公因式时一定要提取完全。

解题方法指导

【例1】把下列各式分解因式

$$(1) -4a^3b^3 + 6a^2b - 2ab^2$$

$$(2) a(a-b)^3 + 2a^2(a-b)^2 - 2ab(b-a)^2$$

听课记录

$$(3) a^{m+1}b^{n-1} + a^mb^n$$

$$【解】(1) -4a^3b^3 + 6a^2b - 2ab^2 = -(4a^3b^3 - 6a^2b + 2ab^2)$$

$$= -(2ab \cdot 2a^2b^2 - 2ab \cdot 3a + 2ab \cdot b)$$

$$= -2ab(2a^2b^2 - 3a + b)$$

$$(2) a(a-b)^3 + 2a^2(a-b)^2 - 2ab(b-a)^2$$

$$= a(a-b)^3 + 2a^2(a-b)^2 - 2ab(a-b)^2$$

$$= a(a-b)^2 \cdot (a-b) + a(a-b)^2 \cdot 2a - a(a-b)^2 \cdot 2b$$

$$= a(a-b)^2(a-b+2a-2b) = a(a-b)^2(3a-3b)$$

$$= 3a(a-b)^3$$

$$(3) a^{m+1}b^{n-1} + a^mb^n = a^mb^{n-1} \cdot a + a^mb^{n-1} \cdot b = a^mb^{n-1}(a+b)$$

指导:(1)当多项式中恰好有一项是各项的公因式(或仅差一个符号),在提公因式时一定要补上“1”或“-1”,否则就会漏项,就不是恒等变形了。检查是否漏项的方法最好是用单项式乘以多项式的方法验证,也可以看提公因式后,括号内的项数是否与原多项式的项数一致,若不一致则说明漏项了。

(2)当遇到第一项系数是负数时,可先提出负号,使括号内的第一项的系数为正,在提出负号时,要注意正确运用添括号法则,即括到括号里的各项都变号。

(3)公因式要提尽,提公因式后,剩下的另一个因式必须加以整理,并且有公因式时,还要继续提取。

(4)公因式还可以是多项式,这里要注意正确使用符号法则:当 n 是偶数时, $(x-y)^n = (y-x)^n$, 当 n 是奇数时, $(x-y)^n = -(y-x)^n$ 。一般是1°改变偶次方项,2°尽量使首项系数为正,3°尽量避免负号过多的情况出现,4°改变的项数越少越好,少数服从多数。

(5)对于幂的运算要熟练掌握,不要出现负指数幂。

课后习题解答

习题8.1 A 组

$$1. (1)(m+4)(m-4) \quad (2)(x+2)(x+3)$$

$$(3) (y-3)^2 \quad (4)(p-2)(p^2+2p+4)$$

$$2. (1)c(x-y+z) \quad (2)x(p-q-r) \quad (3)5a^2(3a-2)$$

$$(4)3bc(4a-c) \quad (5)xy(4x-y) \quad (6)7pq(q+2q)$$

$$(7)6a^2m(4a-3m) \quad (8)x^4(x^2y-z)$$

$$3. (1)7b-4b^2+1 \quad (2)1+2x-7y$$

听课记录

4. (1) $5x^2y(3xy+1-4xy^2)$ (2) $3mn(2m-5n+10mn)$

(3) $-8x^2(2x^2+4x-7)$ (4) $-2ab(2a^2b-3a+1)$

5. (1) $(a+b)(x-y)$ (2) $(x-y)(5x+2y)$

(3) $2(p+q)(3q-2p)$ (4) $2q(m+n)$

(5) $(a-b)(2a-b)$ (6) $(x-y)(x^2-xy-y)$

(7) $-(2a+b)(a+3b)$ (8) $-2xy(x+y)$

6. (1) $(x-y)(p+q)$ (2) $(a-3)(m-2)$

(3) $(a+b)(a-b-1)$ (4) $(x-a)(a-b-c)$

(5) $5(x-y)(2ax-2ay+b)$ (6) $(x-1)^3(3y+z)$

(7) $(a-x)(a-y)(x-y)$ (8) $-a(a-b)^2(b-1+c)$

B 组

1. (1) 314 (2) 1.237

2. $V = I(R_1 + R_2 + R_3) = 2.5 \times (19.7 + 32.4 + 35.9)$

$= 2.5 \times 88.0 = 220$

目标跟踪训练

A 组

1. 填空题

(1) 多项式 $3xy + 21axy - 18a^2xy$ 中的公因式是_____。

(2) 在多项式 $-6m^3n^2 - 3m^2n^2 + 12m^2n^3$ 中公因式是_____。

(3) $-\frac{8}{27}a^3b^2 + \frac{4}{9}ab^3 = \underline{\hspace{2cm}} (\frac{2}{3}a^2 - b)$ 。

(4) $-3ab^3 + 12a^3b + 15a^2b^2 = -3ab(\underline{\hspace{2cm}})$ 。

(5) 若 $am + bm + cm = 0$, 且 $m \neq 0$, 则 $a + b + c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(6) $x(x-3) - 3(x-3) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(7) $a(x-y) - b(x-y) - c(y-x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(8) $2x(y-x)^3 - (x-y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(9) 如果 $a + b = 1$, $x - y = 5$, 则 $a(x-y) - b(y-x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(10) $-23.7 \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times 1.3 - 2 \frac{3}{5} \times 0.8 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 判断题(下列各式中是正确的因式分解的打“√”, 不是的打“×”)

(1) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ()

(2) $3x^3 - 6x^2 - 3x = 3x(x^2 - 2x - 1)$ ()

听课记录

(3) $m^3 - m^2 + m = m(m^2 - m)$ ()

(4) $x^2 + 2x - 3 = x(x + 2) - 3$ ()

3. 把下列各式分解因式

(1) $nx - ny + nz$ (2) $4ab^2 - 8a^2b$

(3) $8ab^2 + 12a^3b^3$ (4) $15a^3b - 10a^2$

(5) $-m^2n + mn^2 - mn$ (6) $-3a^2 + 6a - 12$

(7) $x^3y^2 + x^2y^3 - 3xy$

(8) $m(a - 2) - (2 - a)m$ (9) $a(x - y) + b(y - x)$

(10) $(a - b)^2 - (b - a)^3$

B 组

把下列各式分解因式

(1) $-x^3y^3 - x^2y^2 - xy$ (2) $9x^2y^3z^4 - 21x^3y^5 + 42x^2y^2$

(3) $-12x^3y^3z^3 - 18x^3y^2z^4 + 24x^2y^4z^3 - 6x^2y^3z^4$

(4) $(b - a)(z - y - x) - (a - b)(2x + y - z) - (a - b)$

$(y - 2x)$

(5) $8(2x + y)^3 - 12x(2x + y)^2$

(6) $xy(x - y)^2 - y(y - x)^2 + xz(x - y)^2$

(7) $12x^{2n+1}y^{n+2} - 24x^{n+1}y^{2n+4}$

8.2 运用公式法

基础知识导学

把整式相乘的乘法公式反过来,就得到因式分解的五个公式:

平方差公式: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

完全平方公式: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

立方和、立方差公式: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

上述公式中的字母均可表示单项式(包括数)或多项式。

重点难点突破

运用公式法的关键是熟悉公式并掌握每一公式特点。(1)平方差公式特点:①多项式为二项式;②两项符号相反;③每项都可化为某数或某式的完全平方式。(2)完全平方公式特点:①多项式为三项式;②两项同号且能写成某数或某式的完全平方式,另一项是两项写

听课记录

成的某数或某式的积的2倍。(3)立方和、立方差公式特点:①多项式为二项式;②两项符号相同或相反;③每项都可化为某数或某式的完全立方式。

运用公式法分解因式时,首先进行观察,判断所要分解的多项式是否符合某个公式的特点,其次,把要分解的多项式的各项与相应公式中的各项分别对应,认清所要分解的多项式中的各项如果用公式中的项分别表示,把这个多项式变为完全符合公式的形式,然后再进行因式分解。其中立方和、立方差公式易出现符号错误和把第二个因式中的 ab 写成 $2ab$ 的错误,大家要特别注意。

解题方法指导

【例1】把下列各式分解因式

$$(1) 4x^2 - \frac{1}{9}y^2 \quad (2) (a+2b)^2 - (a-2b)^2$$

$$(3) 12a^2x^2 - 27a^4y^2 \quad (4) a^4(a^4-1) - a^4+1$$

【解】(1) $4x^2 - \frac{1}{9}y^2 = (2x)^2 - (\frac{1}{3}y)^2 = (2x + \frac{1}{3}y)(2x - \frac{1}{3}y)$

$$(2) (a+2b)^2 - (a-2b)^2$$

$$= [(a+2b) + (a-2b)][(a+2b) - (a-2b)]$$

$$= (a+2b+a-2b)(a+2b-a+2b) = 2a \cdot 4b = 8ab$$

$$(3) 12a^2x^2 - 27a^4y^2 = 3a^2(4x^2 - 9a^2y^2)$$

$$= 3a^2[(2x)^2 - (3ay)^2]$$

$$= 3a^2(2x+3ay)(2x-3ay)$$

$$(4) a^4(a^4-1) - a^4+1 = a^4(a^4-1) - (a^4-1)$$

$$= (a^4-1)^2 = [(a^2)^2 - 1^2]^2$$

$$= [(a^2+1)(a^2-1)]^2$$

$$= [(a^2+1)(a+1)(a-1)]^2$$

$$= (a^2+1)^2(a+1)^2(a-1)^2$$

指导:(1)要分解的因式是二项式,且都可以写成一个单项式的平方的形式,中间符号是“-”号因此可套用平方差公式。

(2)当要分解的因式中各项有公因式,应先提公因式,再观察各因式能否再分解因式,分解到不能分解为止。

(3)在许多情况下,不一定能直接使用公式,需要经过适当组合、变形后,方可使用公式分解因式。

听课记录

【例2】把下列各式分解因式：

$$(1) x^n + 6x^{n-1} + 9x^{n-2} \quad (n \text{ 为整数且 } n > 2)$$

$$(2) 8xy - 4x^2 - 4y^2 \quad (3) 4ab(ab + 3cd) + 9c^2d^2$$

$$(4) a^4 - 2a^2(b^2 + 2bc + c^2) + (b + c)^4$$

$$\begin{aligned} \text{【解】}(1) x^n + 6x^{n-1} + 9x^{n-2} &= x^{n-2}(x^2 + 6x + 9) \\ &= x^{n-2}(x + 3)^2 \end{aligned}$$

$$(2) 8xy - 4x^2 - 4y^2 = -4(x^2 - 2xy + y^2) = -4(x - y)^2$$

$$\begin{aligned} (3) 4ab(ab + 3cd) + 9c^2d^2 &= 4a^2b^2 + 12abcd + 9c^2d^2 \\ &= (2ab)^2 + 2 \cdot 2ab \cdot 3cd + (3cd)^2 = (2ab + 3cd)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) a^4 - 2a^2(b^2 + 2bc + c^2) + (b + c)^4 &= a^4 - 2a^2(b + c)^2 + (b + c)^4 \\ &= (a^2)^2 - 2 \cdot a^2(b + c)^2 + [(b + c)^2]^2 = [a^2 - (b + c)^2]^2 \\ &= [(a + b + c)(a - b - c)]^2 = (a + b + c)^2(a - b - c)^2 \end{aligned}$$

指导：当要分解的多项式有三项(或经过适当变形后有三项)，可以考虑是否能套用完全平方公式。第(1)题，首先观察到各项有公因式，提出公因式后，括号内恰好可套用和的完全平方公式。第(2)题，观察原多项式有三项且平方项 $-4x^2$ ， $-4y^2$ 的符号相同，只需各项提取一个“-”号，即可套用公式，但要注意提取“-”号后，各项都要变号。第(3)题，观察原多项式各项无公因式可提，但经过适当变形后，有三项且恰好符合完全平方公式。第(4)题，观察原多项式，中间项中 $b^2 + 2bc + c^2$ 可先运用完全平方公式变为 $(b + c)^2$ ，此时，又看到正好又构成完全平方方式，进行因式分解后，再继续观察底数又可用平方差公式，继而才能分解完全。因此，大家需特别注意检查分解的结果，看是否还可以继续分解，一定要分解到不能分解为止。

【例3】把下列各式分解因式

$$(1) -\frac{1}{3}x^4y + 9xy \quad (2) 64a^6 + 16a^3b^3 + b^6$$

$$\begin{aligned} \text{【解】}(1) \text{原式} &= -\frac{1}{3}xy(x^3 - 27) = -\frac{1}{3}xy(x^3 - 3^3) \\ &= -\frac{1}{3}xy(x - 3)(x^2 + 3x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= (8a^3)^2 + 2 \cdot 8a^3 \cdot b^3 + (b^3)^2 = (8a^3 + b^3)^2 \\ &= [(2a^3) + b^3]^2 = [(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)]^2 \\ &= (2a + b)^2(4a^2 - 2ab + b^2)^2 \end{aligned}$$

听课记录

指导:(1)要分解的多项式有公因式,要先提出来,再观察到第二个因式正好符合立方差公式,继而分解完全,(2)首先观察到要分解的多项式恰好符合完全平方公式,分解后,底数又恰好可用立方和公式,在写最终结果时,千万不要漏写各因式的指数2。

课后习题解答

习题 8.2 A 组

$$(1)(a+7)(a-7) \quad (2)(8+x)(8-x)$$

$$(3)(1+6b)(1-6b) \quad (4)(m+9n)(m-9n)$$

$$(5)(0.7p+12q)(0.7p-12q) \quad (6)(11x+2y)(11x-2y)$$

$$(7)(ap+bq)(ap-bq) \quad (8)\left(\frac{5}{2}a+xy\right)\left(\frac{5}{2}a-xy\right)$$

$$2. (1)m(m+2n) \quad (2)-(27a+b)(a+27b)$$

$$(3)3(x+y)(x-y) \quad (4)4c(a+b)$$

$$(5)(7p+5q)(p+7q) \quad (6)(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

$$3. (1)(9a^2+b^2)(3a+b)(3a-b) \quad (2)2y^2(2y+1)(2y-1)$$

$$(3)3a(x+y^2)(x-y^2) \quad (4)(m^2+1)(m+1)(m-1)$$

$$4. (1)(x-1)^2 \quad (2)(a+4)^2 \quad (3)(1-2t)^2$$

$$(4)(m-7)^2 \quad (5)(b-11)^2 \quad (6)\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$5. (1)(5m-8)^2 \quad (2)(2a+9)^2$$

$$(3)(2p-5q)^2 \quad (4)\left(\frac{x}{2}+y\right)^2$$

$$6. (1)(5a^2-4b^2)^2 \quad (2)(6x^2-y^2)^2$$

$$(3)(ab-2)^2 \quad (4)(4-xy)^2$$

$$7. (1)(x+y+3)^2 \quad (2)(a-b-c)^2$$

$$(3)(2-3x+3y)^2 \quad (4)(3m+n)^2$$

$$8. (1)-(x-y)^2 \quad (2)-y(2x-y)^2$$

$$(3)3(1-x)^2 \quad (4)-a(1-a)^2$$

$$9. (1)(x-y)(x^2+xy+y^2) \quad (2)(x+5)(x^2-5x+25)$$

$$(3)(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$$

$$(4)(3m-n)(9m^2+3mn+n^2)$$

$$10. (1)\left(1-\frac{1}{2}a\right)\left(1+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a^2\right)$$

$$(2)(0.4p+1)(0.16p^2-0.4p+1)$$

听课记录

(3) $(xy-3)(x^2y^2+3xy+9)$ (4) $(p-q^2)(p^2+pq^2+q^4)$

11. (1) $(a+b+c)(a^2+b^2+2ab-ca-cb+c^2)$

(2) $(x+1)(7x^2+5x+1)$

(3) $-a(1+a)(1-a+a^2)$ (4) $3(x+2)(x^2-2x+4)$

12. (1) $x^3(x+y)(x-y)$ (2) $x(4x^2+y^2)^2$

(3) $x(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(4) $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$

B 组

1. (1) 508000 (2) 154800

2. 128.0 cm^2

3. $1.8 \times 10^2 \text{ cm}^2$

4. $m = \pm 1$

5. (1) $(x+2y)(x-2y)$, $(x+2y)^2$ 公因式为 $(x+2y)$

(2) $(3x-4)^2$, $(3x-4)(9x^2+12x+16)$, $(3x+4)(3x-4)$, 公因式为 $(3x-4)$

目标跟踪训练

A 组

1. 填空题

(1) $36(x-y)^2 - 9(x+y)^2$ 分解因式的结果是_____。

(2) $-a^2 - 4b^2 + 4ab$ 分解因式的结果是_____。

(3) $x^3y^3 - 8$ 分解因式的结果是_____。

(4) 如果 $4a^4 - (b-c)^2$ 有一个因式是 $2a^2 + b - c$, 则另一个因式为_____。

(5) 如果 $100x^2 + kxy + 49y^2$ 能分解因式为 $(10x - 7y)^2$, 那么 k 的值为_____。

(6) 如果 $9x^2 + mxy + 4y^2$ 是一个完全平方式, 则 m 的值是_____。

(7) $x^2(x+1)^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1)^2$ 分解因式的结果是_____。

(8) $64x^2 - (\quad)^2 = [8x + (\quad)][(\quad) - 3y]$ 。

(9) 分解因式 $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

听课记录

(10) 已知 $x + y = 19$, $y - x = 7$, 则 $x^2 - y^2 =$ _____。

2. 判断题(正确的打“√”号,错误的打“×”号)

(1) 分解因式 $x^2 - 4 + 3x = (x + 2)(x - 2) + 3x$ ()

(2) 分解因式 $a^4 - 1 = (a^2 + 1)(a^2 - 1)$ ()

(3) 分解因式 $-x^2 + x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(2x - 1)^2$ ()

(4) $9x^2 + kxy + 25y^2$ 是一个完全平方式, 则 $k = 30$ ()

(5) $27x^3 + 1 = (3x + 1)(9x^2 - 6x + 1)$ ()

(6) $x^2 + 16 = (x + 4)(x - 4)$ ()

(7) $1 - \frac{1}{8}x^3 = 8 - x^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$ ()

(8) $a + a^4 = a(1 + a)(1 + a + a^2)$ ()

(9) $-b^2 + a^2$ 不能分解因式 ()

(10) $a^2 - 6a + 1 = a(a - 6 + 1) = a(a - 5)$ ()

3. 把下列各式分解因式

(1) ① $-6\frac{1}{4}x^2 + 121y^2$ ② $4a - a^5$

③ $25m^2 - (4m - 3n)^2$ ④ $0.01x^2 - \frac{64}{81}y^2$

⑤ $758^2 - 242^2$ ⑥ $(a + 2)^2 - (3a - 1)^2$

(2) ① $48a^3b^3 - 120a^2b^2 + 75ab$ ② $14x - 1 - 49x^2$

③ $m^2 + 4m + 4 - 25n^2$ ④ $\frac{m^2}{9} + \frac{2}{3}mn + n^2$

⑤ $1 + 2m^3 + m^6$ ⑥ $y^{n+2} + 2y^{n+1} + y^n$

(3) ① $27a^3 - 8b^3$ ② $a^3(x^3 - y^3) + 8b^3(x^3 - y^3)$

③ $a^6 - 2a^3b^3 + b^6$ ④ $(m + n)^3 - (m - n)^3$

⑤ $8a^3 - 125b^6x^3$ ⑥ $x^{3n} + y^{6n}$

B 组

把下列各式分解因式

1. $x^2(a - b) + y^2(b - a)$ 2. $-(a + b)^2 + 2(a + b) - 1$

3. $84x^2y^3 + 63xy^4 + 28x^3y^2$

4. $-27a^3x^3 + 36a^3x^2y - 12a^3xy^2$

5. $(a^2 + 1)^2 - 4a^2$ 6. $x^4 - 8x^2(x - 1) + 16(x - 1)^2$

7. $a^4(a - 2) + a(a - 2)$ 8. $x^3y^6 + x^6y^3$

9. $64a^6 - 16a^3b^3 + b^6$ 10. $-\frac{1}{4}x^2 + xy - y^2$

11. $(3a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 3b^2)^2$ 12. $8a^3 + 64$

听课记录

8.3 分组分解法

基础知识导学

分组分解法是利用分组来分解因式的方法。这种方法不是一种独立的分解因式的方法,多项式经过适当的分组后,转化为用已经学过的提公因式法或运用公式法来进行因式分解。分组分解法无固定的形式,但需掌握一个原则,就是分组后可以直接提公因式或分组后可以直接运用公式。因此,在分组时,要预先考虑到分组后能否继续进行因式分解,由此可知,合理选择分组方法是关键。

重点难点突破

分组分解法的重点是掌握分组原则。我们主要研究四项式的分组分解法。四项式一般只能分成两组,分组的方法有两种:二、二分组;每组两项,即等项分组;三、一分组:一组有三项,一组有一项,即不等项分组。分组的原则是选择系数成比例的各项分组或选择符合公式条件的各项分组。

解题方法指导

【例1】把下列各式因式分解

$$(1) ab + cd - bc - ad \quad (2) 3x^2 + 3xy - 2xz - 2yz$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= (ab - bc) + (cd - ad) \\ &= b(a - c) - d(a - c) \\ &= (a - c)(b - d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{另法:原式} &= (ab - ad) + (cd - bc) \\ &= a(b - d) - c(b - d) \\ &= (b - d)(a - c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= (3x^2 + 3xy) - (2xz + 2yz) \\ &= 3x(x + y) - 2z(x + y) \\ &= (x + y)(3x - 2z) \quad (\text{按相同系数分组}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{另法:原式} &= (3x^2 - 2xz) + (3xy - 2yz) \\ &= x(3x - 2z) + y(3x - 2z) \\ &= (3x - 2z)(x + y) \quad (\text{按相同系数比分组}) \end{aligned}$$

听课记录

指导:当要进行因式分解的多项式是四项式时,先观察各项系数之间有无内在联系,对应项系数是否成比例,这往往可以启示我们对下一步分解的预测,如下一步是提公因式还是运用公式等,这也是分组中必须遵循的规律之一。对于此例,分组的方法不只一种,可以是一、三项与二、四项组合,一、四项与二、三项组合,也可以是一、二项与三、四项组合,虽是不同途径,但殊途同归。在考虑分组时,最好能选择方法较简便的一种。

【例2】把下列各式分解因式

$$(1) a^2 - b^2 - a + b \quad (2) a^2 - b^2 - 4c^2 + 4bc$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) a^2 - b^2 - a + b &= (a^2 - b^2) - (a - b) \\ &= (a + b)(a - b) - (a - b) \\ &= (a - b)(a + b - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) a^2 - b^2 - 4c^2 + 4bc &= a^2 - (b^2 - 4bc + 4c^2) = a^2 - (b - 2c)^2 \\ &= (a + b - 2c)(a - b + 2c) \end{aligned}$$

指导:当要进行因式分解的多项式各项有公因式时,应先提取公因式,提公因式后再观察各项特点。本例各题是提醒大家,要注意联想乘法公式,因此要求大家对乘法公式要掌握得特别好,运用自如。有些题目有多种方法分组,但结果相同,平时练习时,要多想几种办法,这样能开阔思路,提高解题速度。在书写结果时,要注意把相同的因式写成幂的形式。检查是否分解彻底,一定要分解到不能分解为止。

【例3】把下列各式分解因式

$$(1) a^2(a+1) - b^2(b+1) \quad (2) ab(c^2+d^2) + cd(a^2+b^2)$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= a^3 + a^2 - b^3 - b^2 \\ &= (a^3 - b^3) + (a^2 - b^2) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a + b)(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd \\ &= (abc^2 + b^2cd) + (abd^2 + a^2cd) \\ &= bc(ac + bd) + ad(bd + ac) \\ &= (ac + bd)(bc + ad) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{法2:原式} &= abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd \\ &= (abc^2 + a^2cd) + (abd^2 + b^2cd) \end{aligned}$$