



“十三五”国家重点图书出版规划项目
电子与信息工程系列

Electromagnetic Field and Microwave Technology

电磁场与微波技术

● 朱磊 题原 陈晚 主编

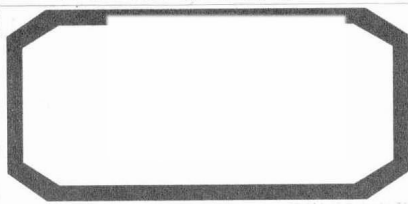
● 吴群 主审



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



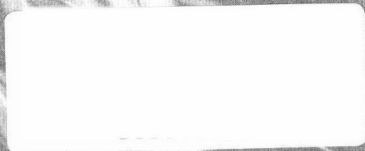
“十三五”国家重点图书出版规划项目
电子与信息工程系



Electromagnetic Field and Microwave Technology

电磁场与微波技术

● 朱 磊 题 原 陈 晚 主 编
● 周喜权 董 亮 副主编
● 吴 群 主 审



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书以麦克斯韦方程组为研究基础,按照静态场、动态场、电磁场在空间的传播规律及微波技术、微波应用的思路进行讨论,最后结合 ADS 仿真软件平台,将理论与实际应用联系起来。本书各章内容环环相扣,叙述由浅入深、循序渐进,体系结构注重基础性,尽量避免复杂的公式推导,应用实例和实验能够反映工程应用中的热点和难点问题。

本书可作为高等学校电子科学与技术、电子信息工程、通信工程、电磁场与电磁波等专业的本科生、硕士研究生及博士研究生教材,也可作为工程技术人员的参考用书。

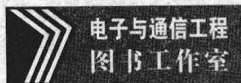
图书在版编目(CIP)数据

电磁场与微波技术/朱磊,题原,陈晚主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.3

ISBN 978-7-5603-7842-8

I. 电… II. ①朱…②题…③陈… III. ①电磁场-高等学校-教材
②微波技术-高等学校-教材 IV. ①O441.4②TN015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 266152 号



策划编辑 许雅莹 杨 桦 张秀华

责任编辑 李长波 张艳丽

封面设计 高永利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 21 字数 500 千字

版 次 2019 年 3 月第 1 版 2019 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-7842-8

定 价 44.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

PREFACE

“电磁场与微波技术”是通信与电子信息类专业的基础课程。随着计算机技术、微电子技术、集成电路技术、通信技术的不断发展,以及它们与电磁场与微波技术的交叉融合越来越显著,“电磁场与微波技术”已成为广大电类专业学生应该掌握的一门重要的专业基础课程。本书运用“场”的思维方法来进行相关问题的分析与研究,旨在提高学生的科学研究能力和解决实际问题的能力。本书实验部分内容结合 ADS 仿真软件平台,将理论与实际应用联系起来,将复杂、抽象、难懂的公式转变为实际的电路模型,通过电路模型的仿真计算,将场的各种参量以图形化的形式展示给学生,使得枯燥乏味的数学公式模型化、参量数值图像化。通过本书的学习,读者可在掌握电磁场与电磁波、微波技术理论知识的同时,学会电磁仿真的基本方法,并在学习过程中收获成功的喜悦。

本书由电磁场与电磁波、微波技术、电磁场与微波实验三大部分构成,电磁场与电磁波部分计划学时为 48 学时,微波技术部分计划学时为 32 学时,电磁场与微波实验部分计划学时为 12 学时。本书在编写过程中注重培养学生知识体系的完整性,能够将电磁场理论、微波技术及电磁仿真技术有机地结合起来。全书共 12 章,第 1 章矢量分析,介绍标量场、矢量场,以及通量、散度、环量、旋度等物理概念,为后续章节的学习打下良好的数学、物理基础;第 2 章静电场,介绍静电场的基本理论,包括高斯定理、环路定理、泊松方程、拉普拉斯方程、静电场的边界条件及恒定电场等内容;第 3 章恒定磁场,介绍恒定磁场的基本定律、方程及恒定磁场的边界条件等内容;第 4 章时变电磁场,介绍麦克斯韦方程组及时变电磁场的边界条件等内容;第 5 章平面波在无界空间的传播,介绍均匀平面波在不同介质空间中的传播特点;第 6 章平面电磁波在分界面的反射与折射,介绍均匀平面波对平面边界的垂直入射和斜入射的情况;第 7 章传输线理论,介绍微波传输线、史密斯圆图及阻抗匹配的方法;第 8 章规则金属波导,介绍矩形波导、圆波导等内容;第 9 章微波网络基础,介绍二端口微波网络的性质及各参数之间的关系;第 10 章微波元器件,介绍常用微波连接匹配元件和功率分配元器件;第 11 章微波应用系统,介绍微波系统的一些典型应用,包括雷达系统、微波中继通信系统及微波遥感等;第 12 章综合实验,介绍微波阻抗匹配电路、微带滤波器、定向耦合器等微波电路与器件的仿真设计方法,并结合微波分光仪测试验证电磁波的反射定律和电磁波的极化特性。上述内容既相互联系又相对独立,使用时可以根据教学任务量的情况进行适当的选取和调整。

本书由齐齐哈尔大学朱磊、题原和哈尔滨工业大学陈晚任主编,齐齐哈尔大学周喜

权、董亮任副主编。具体分工为：朱磊编写第 3、6、11、12 章，并完成全书统稿；题原编写第 7、8、9、10 章及对应的习题答案；陈晚编写第 2、4、5 章；周喜权编写第 1 章；董亮编写第 1~6 章习题答案。本书由哈尔滨工业大学吴群教授主审，并提出了宝贵的修改意见和建议，在此表示衷心感谢。本书在编写过程中得到了齐齐哈尔大学通信与电子工程学院、哈尔滨工业大学电子与信息工程学院领导和同志的关心和支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，加之电磁场与微波技术的发展迅速，书中难免会出现一些疏漏和不足，恳请广大读者提出宝贵意见。

编 者

2018 年 6 月

目 录

CONTENTS

第 1 章 矢量分析	1
1.1 三种常用坐标系	1
1.2 标量场与矢量场	3
1.3 描述标量场分布和变化规律的物理量	5
1.4 描述矢量场分布和变化规律的物理量	9
1.5 亥姆霍兹定理	15
本章小结	16
习 题	17
第 2 章 静电场	19
2.1 电场强度	19
2.2 静电场的高斯定理和散度	22
2.3 静电场的环路定理、旋度和电位	28
2.4 泊松方程和拉普拉斯方程	32
2.5 静电场的边界条件	33
2.6 导体系统的电容	36
2.7 静电场能量与能量密度	38
2.8 恒定电场	40
本章小结	43
习 题	45
第 3 章 恒定磁场	48
3.1 恒定磁场的基本定律	48
3.2 真空中的恒定磁场方程	50
3.3 磁偶极子与磁介质的磁化	54
3.4 恒定磁场的边界条件	59
3.5 电感	63
本章小结	67
习 题	69
第 4 章 时变电磁场	72
4.1 麦克斯韦方程组	72

4.2	时变电磁场的边界条件	78
4.3	复数形式的麦克斯韦方程组	81
4.4	波动方程	85
4.5	电磁场能量与能流	87
	本章小结	93
	习 题	95
第 5 章	平面波在无界空间的传播	96
5.1	理想介质中的均匀平面波	96
5.2	电磁波的极化	103
5.3	均匀平面波在导电介质中的传播	107
5.4	色散、相速和群速	112
	本章小结	114
	习 题	114
第 6 章	平面电磁波在分界面的反射与折射	118
6.1	均匀平面波对平面边界的垂直入射	118
6.2	均匀平面波对平面边界的斜入射	124
6.3	全透射与全反射	130
	本章小结	132
	习 题	134
第 7 章	传输线理论	137
7.1	微波传输线	137
7.2	均匀传输线方程及其解	138
7.3	无耗传输线的状态分析	149
7.4	史密斯圆图	155
7.5	阻抗匹配	163
	本章小结	168
	习 题	169
第 8 章	规则金属波导	173
8.1	导行波的传输特性	173
8.2	矩形波导	177
8.3	矩形波导中的 TE_{10} 波	187
	本章小结	190
	习 题	191
第 9 章	微波网络基础	192
9.1	微波网络概述	192
9.2	微波传输线的等效	194

9.3 微波元件的等效	198
9.4 二端口微波网络	201
9.5 多端口微波网络	217
本章小结	219
习 题	221
第 10 章 微波元器件	225
10.1 连接匹配元件	225
10.2 功率分配元器件	232
本章小结	239
习 题	241
第 11 章 微波应用系统	244
11.1 雷达	244
11.2 微波中继通信系统	253
11.3 毫米波应用	259
11.4 微波遥感	265
本章小结	268
习 题	268
第 12 章 综合实验	269
12.1 微波仿真软件的熟悉使用	269
12.2 阻抗匹配电路的仿真设计	277
12.3 Lange 耦合器的仿真设计	287
12.4 微带低通滤波器的设计	296
12.5 电磁波反射实验	310
习题参考答案	313
参考文献	327

第 1 章

矢量分析

熟练掌握矢量分析可以让学生在大学物理电磁学的基础上对电磁场理论有更多的认识。发表在《电磁学通论》中的麦克斯韦方程多达十几个,外表相似,让人很难理解,现在利用矢量分析把这些方程压缩为四个,让人容易理解和记忆。

本章从电磁场理论中常用的坐标系入手,在学习矢量的表示和运算的基础上,分析描述标量场和矢量场分布及变化规律的物理量。这些物理量包括标量场的等值面、方向导数、梯度以及矢量场的通量、散度、环量、旋度。学习这些物理量的定义和物理意义的同时,引入了高斯定理、斯托克斯定理和亥姆霍兹定理,为后续章节的学习奠定基础。

1.1 三种常用坐标系

直角坐标系(Rectangular Coordinate System)、圆柱坐标系(Cylindrical Coordinate System)和球坐标系(Spherical Coordinate System)是三种最常用的正交曲线坐标系,是分析场在空间中分布和变化规律的基础。根据被研究对象的几何形状不同采用不同的坐标系,可以使问题得到简化。

1.1.1 坐标系构成

1. 直角坐标系

直角坐标系是最常见的坐标系,广泛应用于多数常见电磁场及电磁波的分析过程中。直角坐标系的三个坐标变量是 x 、 y 、 z , 它们的变化范围是

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty$$

如图 1.1 所示,点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 是 $x=x_1$ 、 $y=y_1$ 、 $z=z_1$ 三个坐标曲面的交点。在直角坐标系中,可以通过 x 、 y 、 z 的值寻找到空间中任意点 M 的位置。注意: x 、 y 、 z 所对应的三个坐标轴的方向一定是互相正交的。互相正交表明这三个坐标轴彼此之间均相互独立,且其中任意一个坐标无法被另外二者替代,这一特点与线性代数中的矩阵秩的概念相类似。事实上, x 、 y 、 z 可以看作是用来描述某三维空间的一个三维矩阵的基向量。

2. 圆柱坐标系

对于圆柱波导、光纤及同轴线,圆柱坐标系可以更好地描述其场分布情况,因此在分析上述电磁结构时往往采用圆柱坐标系。与直角坐标系类似,圆柱坐标系的三个坐标方向也是彼此正交的。圆柱坐标系的三个坐标变量是 ρ 、 φ 、 z , 它们的变化范围是



$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

圆柱坐标系有时简称为柱坐标系, φ 坐标称为方位角, z 坐标与直角坐标系中 z 的名称、定义和值完全相同。

如图 1.2 所示, 任意一点 M 的位置用 ρ_1 、 φ_1 、 z_1 三个量来确定, 其中, ρ_1 表示 M 到 Oz 轴的距离; φ_1 表示过 M 且以 Oz 轴为界的半平面与 xOz 平面之间的夹角; z_1 表示同直角坐标系中 z 的坐标。

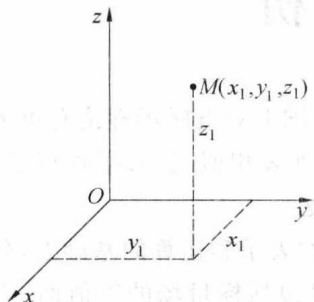


图 1.1 直角坐标系

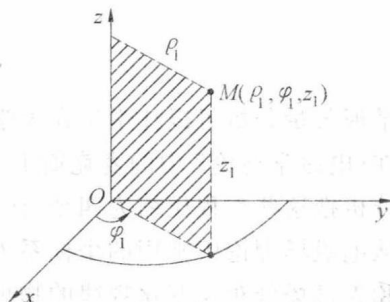


图 1.2 圆柱坐标系

从而, 当 ρ = 常数, φ 、 z 任意变化时, 表示以 Oz 为轴的圆柱; 当 φ = 常数, ρ 、 z 任意变化时, 表示以 Oz 轴为界的半平面; 当 z = 常数, ρ 、 φ 任意变化时, 表示平行于 xOy 面的平面。

3. 球坐标系

球坐标系主要用于描述球面波及天线的电磁场分布情况, 球坐标系的三个坐标方向同样是彼此正交的。球坐标系的三个坐标变量是 r 、 θ 、 φ , 它们的变化范围是

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

如图 1.3 所示, 任意一点 M 的位置用 r_1 、 θ_1 、 φ_1 三个量来确定, 其中 r_1 表示 M 到原点 O 的距离, 称为矢径长度; θ_1 表示矢径与 z 轴的夹角, 称为高低角, φ_1 与对应的圆柱坐标变量 φ_1 名称、定义和值完全相同, 也称方位角。

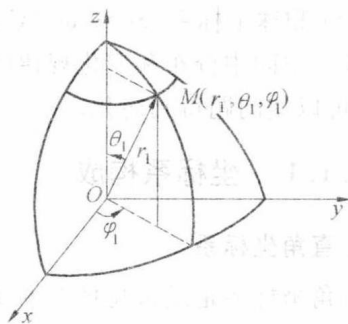


图 1.3 球坐标系

1.1.2 坐标变量代换

根据三种坐标系的图, 可得三种坐标系的坐标变量之间的关系。

1. 直角坐标系与圆柱坐标系的关系

(1) 圆柱坐标 $\rightarrow$ 直角坐标。

$$x = \rho \cos \varphi \quad (1.1a)$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (1.1b)$$

$$z = z \quad (1.1c)$$



(2) 直角坐标 $\rightarrow$ 圆柱坐标。

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.2a)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.2b)$$

$$z = z \quad (1.2c)$$

2. 直角坐标系与球坐标系的关系

(1) 球坐标 $\rightarrow$ 直角坐标。

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (1.3a)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (1.3b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (1.3c)$$

(2) 直角坐标 $\rightarrow$ 球坐标。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.4a)$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.4b)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.4c)$$

3. 圆柱坐标系与球坐标系的关系

(1) 球坐标 $\rightarrow$ 圆柱坐标。

$$\rho = r \sin \theta \quad (1.5a)$$

$$\varphi = \varphi \quad (1.5b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (1.5c)$$

(2) 圆柱坐标 $\rightarrow$ 球坐标。

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (1.6a)$$

$$\theta = \arcsin \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (1.6b)$$

$$\varphi = \varphi \quad (1.6c)$$

利用坐标变量的代换关系可以解决下面的问题: 已知点 M 的圆柱坐标或球坐标, 求该点的直角坐标; 已知点 M 的直角坐标, 求该点的圆柱坐标或球坐标; 同一点 M 的圆柱坐标与球坐标的相互换算等。

1.2 标量场与矢量场

在许多科学问题中, 常常需要研究某种物理量在某一空间区域的分布情况和变化规律, 为此, 在数学上引入了场的概念。

在某一时刻, 如果在某一空间区域 Ω 内的每一点都对应着某个物理量 A 的一个确定的值, 则称此区域内确定了该物理量的一个场(Field)。可以用更数学化的语言来描述场, 即场是某个物理量 A 关于空间区域 Ω 和时间 t 的函数。场是物质的存在形态, 它有别



于实物粒子。在空间同一点上,允许同时存在多种场,或者一种场的多种模式,但与实物粒子具有不可入性和排他性有天壤之别。

1.2.1 标量场

只有大小而没有方向的物理量是标量(Scalar)。质量 M 、体积 V 、功 W 、功率 P 、能量 E 、电压 U 、电流强度 I 、电量 Q 等都是标量。需要注意的是:一部分标量是算术量,如质量 M 、体积 V 均大于等于零;另一部分标量是代数量,如电量 Q 等可正、可负。在研究问题时,如果只存在两种对立的广义方向,可以使用标量进行描述。

根据场的定义,如果物理量 A 是标量,则说明空间区域 Ω 内存在标量场(Scalar Field)。标量场的运算为算术运算和代数运算。

1.2.2 矢量场

矢量(Vector)是既有大小又有方向的物理量,例如电场强度(场强) E 、磁场强度 H 等。在本书中矢量用黑体字母表示,如用 $\mathbf{A}$ 来表示一个矢量。如果物理量 $\mathbf{A}$ 是矢量,则说明空间区域 Ω 内存在矢量场(Vector Field)。

1. 单位矢量

单位矢量是长度为1的矢量,在本书中用 $\mathbf{a}_n$ 表示法向单位矢量, $\mathbf{a}_t$ 表示切向单位矢量;在直角坐标系中,坐标单位矢量用 $\mathbf{a}_x$ 、 $\mathbf{a}_y$ 、 $\mathbf{a}_z$ 表示;在圆柱坐标系中,坐标单位矢量用 $\mathbf{a}_\rho$ 、 $\mathbf{a}_\varphi$ 、 $\mathbf{a}_z$ 表示;在球坐标系中,坐标单位矢量用 $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 、 $\mathbf{a}_\varphi$ 表示;其他单位矢量用右上方带“0”的黑体字母表示,如 $\mathbf{l}^0$ 。

2. 矢量坐标分量表示

在直角坐标系中,若沿三个相互垂直的坐标单位矢量方向的三个分量都给定,分别是 A_x 、 A_y 、 A_z ,则矢量 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (1.7)$$

3. 矢量的模

矢量 $\mathbf{A}$ 的大小(即模)用符号 $|\mathbf{A}|$ 或 A 表示。在直角坐标系中,直接得出

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.8)$$

4. 方向余弦

如果矢量 $\mathbf{A}$ 与坐标轴 Ox 、 Oy 、 Oz 的正向之间的夹角(方向角)分别为 α 、 β 、 γ ,则 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 称为矢量 $\mathbf{A}$ 的方向余弦,于是有

$$A_x = A \cos \alpha, \quad A_y = A \cos \beta, \quad A_z = A \cos \gamma \quad (1.9)$$

所以式(1.7)又可写成

$$\mathbf{A} = (A \cos \alpha) \mathbf{a}_x + (A \cos \beta) \mathbf{a}_y + (A \cos \gamma) \mathbf{a}_z \quad (1.10)$$

5. 矢量的三种乘法运算

若已知矢量 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$, 矢量 $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$ 以及标量 u , 则有以下定律:



(1) 标乘。

矢量 $\mathbf{A}$ 与标量 u 之间的乘法称为矢量的标乘。

$$u\mathbf{A} = \mathbf{A}u = uA_x\mathbf{a}_x + uA_y\mathbf{a}_y + uA_z\mathbf{a}_z$$

(2) 点乘。

矢量 $\mathbf{A}$ 点乘矢量 $\mathbf{B}$ 的结果是标量, 又称为标量积。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.11)$$

从上式可以看出, 点乘满足交换律, 即 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ 。

点乘的几何意义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) \quad (1.12)$$

式中, $\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})$ 表示矢量 $\mathbf{A}$ 和矢量 $\mathbf{B}$ 的夹角余弦。若矢量 $\mathbf{A}$ 和矢量 $\mathbf{B}$ 夹角为 90° , 则 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, 两矢量是否正交, 常用此式判断。

(3) 叉乘。

矢量 $\mathbf{A}$ 叉乘矢量 $\mathbf{B}$ 的结果仍然是矢量, 又称为矢量积。矢量积为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

由行列式的性质得知, 叉乘不满足交换律, 而是满足

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

矢量积的几何意义为

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})$$

$\mathbf{A}$ 叉乘 $\mathbf{B}$ 的积是一矢量, 模等于 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 的模的乘积再乘上矢量 $\mathbf{A}$ 和矢量 $\mathbf{B}$ 的夹角的正弦值; 矢量积的方向用右手螺旋定则确定。若 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 相互平行, 则 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, 反之亦然; 矢量积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 既与 $\mathbf{A}$ 矢量正交, 也与 $\mathbf{B}$ 矢量正交。

对于一个特定点 (x, y, z) 处的电场强度 $\mathbf{E}$ 而言, 可用 (E_x, E_y, E_z) 表示, 因此对于三维空间内的一个特定点处的矢量场, 需要 6 个维度即 (x, y, z, E_x, E_y, E_z) 来描述。由此可见矢量场的复杂性, 随着学习的深入, 还将接触到更为复杂的矢量场描述形式, 如用于描述电磁场力学效应的张量 (Tensor)。

1.3 描述标量场分布和变化规律的物理量

1.3.1 等值面

研究场的特性时, 以场图表示场变量在空间逐点分布的情况有很大意义。对于标量场而言, 二维空间用等值线 (Contour Line) 描述, 如地图上的等高线。三维空间常用等值面 (Contour Plane) 描述。等值面是指在标量场 $\varphi(x, y, z)$ 中, 使其函数 φ 取相同数值的所有点组成的曲面。标量场 $\varphi(x, y, z)$ 的等值面方程为



$$\varphi(x, y, z) = \text{常数} \quad (1.14)$$

例 1.1 求数量场 $\varphi = \ln(x^2 + y^2 - z)$ 通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面方程。

解 由于点 M 的坐标是 $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3$, 则该点的数量场值为

$$\varphi = \ln(x_0^2 + y_0^2 - z_0) = \ln 2$$

其等值面方程为

$$\ln(x^2 + y^2 - z) = \ln 2$$

即

$$x^2 + y^2 - z = 2$$

1.3.2 方向导数

标量场中, 标量 $\varphi = \varphi(M)$ 的分布情况可由等值面或等值线来描述, 但这只能了解标量场的整体分布情况。若要对标量场的局部状态深入分析, 就要考查标量 φ 在场中各点处的邻域内沿每一方向的变化情况。为此, 引入方向导数的概念。

设 M_0 是标量场 $\varphi = \varphi(M)$ 中的一个已知点, 从 M_0 出发沿某一方向引一条射线 l , 在 l 上 M_0 的邻近取一点 M , 令 $\overline{MM_0} = \rho$, 如图 1.4 所示。当 M 趋于 M_0 时 (即 ρ 趋于 0 时), 若

$$\frac{\Delta\varphi}{\rho} = \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\rho}$$

的极限存在, 则称此极限为函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 处沿 l 方向的方向导数 (Directional Derivative), 记为

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\rho} \quad (1.15)$$

可见, $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0}$ 是函数 φ 在点 M_0 处沿 l 方向对距离的变化率。当 $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$ 时, 表示在点 M_0 处函数 φ 沿 l 方向是增加的, 反之减小。

在直角坐标系中, 方向导数可按下述公式计算。

若函数 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为沿 l 方向的方向余弦, 则函数 φ 在点 M_0 处沿 l 方向的方向导数必定存在, 且为

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.16)$$

证明过程, 请读者自行查阅相关资料。

例 1.2 求数量场 $\varphi = 3x^2y - y^3z^2$ 在点 $M(1, -2, -1)$ 处沿 $l = yz\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y + xy\mathbf{a}_z$ 方向的方向导数。

解 矢量 l 在 M 处的值为

$$l|_M = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$$

其方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}$$

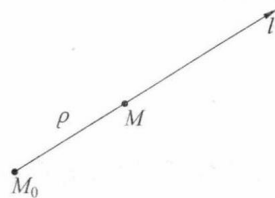


图 1.4 方向导数的定义



而

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_M = 6xy \Big|_M = -12$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_M = 3x^2 - 3y^2 z^2 \Big|_M = -9$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_M = -2y^3 z \Big|_M = -16$$

则数量场 φ 在 l 方向的方向导数为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_M = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_M = \frac{17}{3}$$

1.3.3 梯度

方向导数可以描述标量场中某点处标量沿某方向的变化率,但从场中沿任一点出发有无穷多个方向,不可能研究所有方向的变化率,因而只关心沿哪一个方向的变化率最大,此变化率是多少。

标量场 $\varphi(x, y, z)$ 在 l 方向上的方向导数为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma$$

在直角坐标系中,令

$$l^0 = (\cos \alpha) a_x + (\cos \beta) a_y + (\cos \gamma) a_z$$

$$G = \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_z$$

则

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = G \cdot l^0 = |G| \cos(\widehat{G, l^0}) \quad (1.17)$$

式中, l^0 是 l 方向的单位矢量; G 是在给定点处的一常矢量。由上式可见,当 l 与 G 的方向一致时,即 $\cos(\widehat{G, l^0}) = 1$ 时,标量场在点 M 处的方向导数最大,也就是说沿矢量 G 方向的方向导数最大,此最大值为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_{\max} = |G|$$

这样,就找到了一个矢量 G ,其方向是标量场在 M 点处变化率最大的方向,其模即为最大的变化率。

在标量场 $\varphi(x, y, z)$ 中的一点 M 处存在一矢量 G ,其方向为函数 $\varphi(x, y, z)$ 在 M 点处变化率最大的方向,其模又恰好等于最大变化率,则该矢量称为标量场 $\varphi(x, y, z)$ 在 M 点处的梯度(Gradient),用 $\text{grad } \varphi(x, y, z)$ 表示。

在直角坐标系中,梯度的表达式为

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_z \quad (1.18)$$

梯度用哈密顿(Hamilton)微分算子 ∇ 表示,其表达式为

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi \quad (1.19)$$



在直角坐标系中,哈密顿微分算子为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (1.20)$$

哈密顿微分算子必须与某些函数或其他标识符配合使用才有实际意义。运算过程中,哈密顿微分算子通常表现出矢量和微分的性质。圆柱坐标系和球坐标系中哈密顿微分算子的表达式,请读者自行查阅相关资料。

由分析可知,在 M 点处沿任意方向的方向导数等于该点处的梯度在此方向上的投影,因此只需要研究并确定 M 点的梯度, M 点沿任意方向的方向导数就可通过梯度方向与其他任意方向的夹角求得;标量场 $\varphi(x, y, z)$ 中某一点 M 处的梯度垂直于过该点的等值面,且指向函数 $\varphi(M)$ 增大的方向。因为 M 点处梯度的坐标 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ 恰好是过 M 点的等值面 $\varphi(x, y, z) = c$ 的法线方向的方向导数,即梯度为其法向矢量,所以梯度垂直于该等值面。由上述分析可以发现,描述一个标量场最关键的指标是等值线/面及梯度。等值线/面与梯度呈正交关系,一组描述具有正交关系的特殊矢量往往可以体现出该物理场的性质。

设 c 为一常数, $u(M)$ 和 $v(M)$ 为数量场,很容易证明下面的梯度运算法则成立。

$$\text{grad } c = 0 \text{ 或 } \nabla c = 0 \quad (1.21)$$

$$\text{grad}(cu) = c \text{grad } u \text{ 或 } \nabla(cu) = c \nabla u \quad (1.22)$$

$$\text{grad}(u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v \text{ 或 } \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \quad (1.23)$$

$$\text{grad}(uv) = v \text{grad } u + u \text{grad } v \text{ 或 } \nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v \quad (1.24)$$

$$\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v \text{grad } u - u \text{grad } v) \text{ 或 } \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v \nabla u - u \nabla v) \quad (1.25)$$

$$\text{grad}[f(u)] = f'(u) \text{grad } u \text{ 或 } \nabla[f(u)] = f'(u) \nabla u \quad (1.26)$$

例 1.3 产生场的源所在的空间位置点称为源点,记为 $\mathbf{r}'(x', y', z')$ 或 $\mathbf{r}'$;场所在的空间位置点称为场点,记为 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 或 $\mathbf{r}$ 。从源点指向场点的矢量记为 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$,源点到场点的距离记为 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$,如图 1.5 所示。求 $\nabla \frac{1}{R}$ 及 $\nabla' \frac{1}{R}$, 其中 ∇ 表示对 (x, y, z) 运算, ∇' 表示对 (x', y', z') 运算。

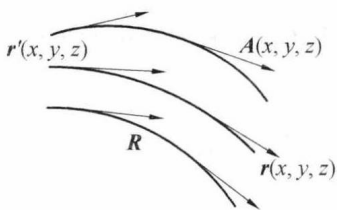


图 1.5 矢量场的矢量线

解 根据已知条件

$$\mathbf{r} = xa_x + ya_y + za_z, \quad \mathbf{r}' = x'a_x + y'a_y + z'a_z$$

$$\mathbf{R} = (x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

由于

$$\nabla \frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \mathbf{a}_z$$

其中



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\right) = -\frac{x-x'}{R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\right) = -\frac{y-y'}{R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\right) = -\frac{z-z'}{R^3}$$

则

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{x-x'}{R^3} \mathbf{a}_x - \frac{y-y'}{R^3} \mathbf{a}_y - \frac{z-z'}{R^3} \mathbf{a}_z = -\frac{R}{R^3}$$

同理得

$$\nabla' \frac{1}{R} = \frac{R}{R^3}$$

从而发现, $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$, 这个关系在以后的矢量证明中将直接引用。

1.4 描述矢量场分布和变化规律的物理量

1.4.1 矢量线

对于矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 来讲, 可用一些有向矢量线表示矢量 $\mathbf{A}$ 在空间的分布, 称为矢量线 (Vector Line), 其中 $\mathbf{A}(x, y, z) = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ 。矢量线上任一点的切线方向必定与该点的矢量 $\mathbf{A}$ 的方向相同。直角坐标系中, 矢量线方程可写成

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1.27)$$

可根据矢量线确定矢量场中各点矢量的方向, 又可根据矢量的疏密程度判别矢量场中各点矢量的大小和变化趋势。

例 1.4 求矢量场 $\mathbf{A} = xy^2 \mathbf{a}_x + x^2 y \mathbf{a}_y + zy^2 \mathbf{a}_z$ 的矢量线方程。

解 矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} = \frac{dz}{y^2 z}$$

从而有

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y}$$

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dz}{y^2 z}$$

解之即得矢量方程为

$$\begin{cases} z = c_1 x \\ x^2 - y^2 = c_2 \end{cases}$$

式中, c_1 和 c_2 是积分常数。