“十三五”移动学习型规划教材

线性代数

马锐　罗兆富　主编 / 董晓波　主审

LINEAR ALGEBRA

知识点微课视频
习题详解
发展历程阅读材料
数学家简介
自主学习平台

PPT 向教师提供PPT课件

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十三五"移动学习型规划教材

线性代数

主　编　马　锐　罗兆富
副主编　陈　斌　宗　琮
参　编　蒋　辉　尹　光　成蓉华　葛兴会　张雪琳
主　审　董晓波

机械工业出版社

本书是传统课本与“移动互联网”相结合的新型立体教材，为适应“应用型本科”及部分“高职高专”学生学习“线性代数”课程的需求而编写.本书力求突出以下特点：一是概念准确，题型简练，难度适中，尽量避免烦琐的理论推导，便于学生掌握基础知识；二是应用部分取材适当，言简意赅，来源于实际生产和生活，便于学生学以致用；三是提供MATLAB软件运算实验，便于学生利用计算机学习线性代数；四是“移动互联网”与传统纸质教材相结合，充分调动学生学习线性代数的积极性.

本书共5章，分别为：行列式、矩阵、向量组与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型.

“移动互联网”支持的教学资源包括：部分习题详解和线性代数发展历程及与线性代数相关的部分数学家简介.

本书可作为“应用型本科”及部分“高职高专”学校“线性代数”课程的教材，也可用于教师教学参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 马锐，罗兆富主编. —北京：机械工业出版社，2019.1
“十三五”移动学习型规划教材
ISBN 978-7-111-61520-0

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①马…　②罗…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第001060号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
策划编辑：韩效杰　　责任编辑：韩效杰　张　超
责任校对：樊钟英　　封面设计：鞠　杨
责任印制：孙　炜
天津嘉恒印务有限公司印刷
2019年1月第1版第1次印刷
184mm×260mm・13.25印张・334千字
标准书号：ISBN 978-7-111-61520-0
定价：34.90元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

前　言

本书主要是为适应“应用型本科”及部分“高职高专”学生学习“线性代数”课程的教学需要而编写.本书的出发点是，既能让学生学好“线性代数”理论知识，为后续课程打好基础，又能了解相关知识点的实际应用.因此，在编写本书时，尽量减少抽象理论推导及烦琐的计算，同时增加实际应用案例和 MATLAB 软件运算实验.本书结合“移动互联网”，通过“书伴 APP”将大部分习题的详解链接在相应页面对应的网络空间中，学生利用手机扫描即可学习，期望能为学生课后练习、复习提供方便.同时还增加了线性代数的发展历程及相关数学家的简介，希望充分调动学生学习线性代数的积极性.

本书第 1、2 章由云南财经职业学院陈斌副教授完成第一稿；第 3 章由云南财经职业学院蒋辉副教授完成第一稿；第 4、5 章由云南财经大学罗兆富副教授完成第一稿.第 1、2、3 章由云南财经大学宗琮副教授完成第二稿；第 4、5 章由罗兆富副教授完成第二稿.云南财经大学成蓉华、葛兴会、张雪琳，云南铁道职业学院尹光主要完成部分习题详解及对线性代数的发展历程及相关数学家简介的编写.全书由云南财经大学马锐教授，罗兆富副教授定稿，淮海工学院董晓波教授审稿.

特别感谢全书的主审董晓波教授，本书的许多想法都来自董晓波教授主编的《线性代数(修订版)》.同时在编写的过程中，机械工业出版社的编辑们对书稿进行了耐心细致的审阅，提出了很多宝贵的建议，给予了很大的帮助，在此表示衷心感谢.

由于编者水平有限，本书难免存在不足及疏漏之处，我们衷心地希望各位专家、同行和读者批评指正，以便我们不断改进和完善.

全体编者

目　录

第1章 行列式

行列式是线性代数的一个基本概念,是线性代数的基本工具之一,它不仅是研究线性方程组和矩阵的有力工具,而且在许多理论与实际问题研究中具有十分重要的作用.

行列式最早作为一种速记表达式,出现在求解线性方程组的问题中,后来从方程组理论的发展中分离出来,形成了独立的理论.行列式的应用比较广泛,现在已经成为数学中一种非常有用的工具.

本章主要介绍行列式的概念、性质与计算方法,以及线性方程组的克拉默(Cramer)法则等内容.

1.1 二阶、三阶行列式

本节主要介绍二阶、三阶行列式的定义以及计算二、三阶行列式的对角线法则.

1.1.1 二阶行列式

二阶行列式产生于求解二元线性方程组的问题中.利用消元法求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, & (1.2) \end{cases}$$

将式(1.1)$\times a_{22}$-式(1.2)$\times a_{12}$,可消去x_2,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2; \tag{1.3}$$

将式(1.2)$\times a_{11}$-式(1.1)$\times a_{21}$,可消去x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \tag{1.4}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时,由式(1.3)、式(1.4)得方程组的唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

注意到,此时方程组的解完全由它的系数和常数项所决定,并且解的分子、分母具有一定的规律.为了便于记忆,给出了所谓的"二阶行列式"来记录,下面给出二阶行列式的定义.

定义1 记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称为二

阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**. 位于第 i 行第 j 列的元素称为**行列式的(i,j)元**. 二阶行列式由 2^2 个元素组成.

如图 1-1-1，将 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，主对角线上的元素称为**主对角元**，将 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**.

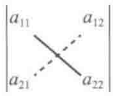

图 1-1-1

行列式的对角线法则：二阶行列式等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

利用二阶行列式的定义，二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中分母 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二元线性方程组的**系数行列式**. 事实上，二元线性方程组的解 x_1,x_2 的分母是系数行列式，而分子由常数项分别替换系数行列式的一、二两列构成.

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ x_1 - 2x_2 = -3. \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times(-2) - 3\times 1 = -7 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -7, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14,$$

因 $D\neq 0$，故该方程组有唯一解：$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2.$ ■

1.1.2 三阶行列式

类似于二阶行列式定义的方法，下面给出三阶行列式的定义.

定义 2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由上述定义可见，三阶行列式有 3! 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号(其中三项附有“＋”号，三项附有“－”号)，其运算的规律性可用“对角线法则”(如图 1-1-2)或“沙路法则”(如图 1-1-3)来表述.

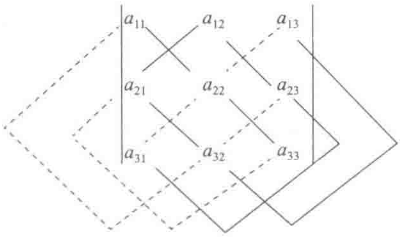

图　1-1-2

(1) 对角线法则

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

即行列式的值这样确定：平行于主对角线、以实线连接的三个元素乘积是代数和的正项，平行于副对角线、以虚线连接的三个元素乘积是代数和的负项.

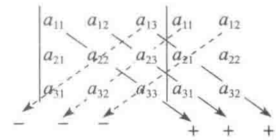

图　1-1-3

(2) 沙路法则

将行列式的第 1 列和第 2 列元素写在行列式的右侧，则行列式的值这样确定：平行于主对角线、以实线连接的三个元素乘积是代数和的正项，平行于副对角线、以虚线连接的三个元素乘积是代数和的负项.

例 2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-3&2\\2&4&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}.$$

解　根据三阶行列式的对角线法则，

$$\begin{aligned}D&=1\times4\times1+(-1)\times(-1)\times(-3)+2\times\\&\quad(-1)\times2-(-1)\times4\times2-2\times(-3)\times1-1\times\\&\quad(-1)\times(-1)=10.\end{aligned}$$

■

例 3　a,b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix}a&b&0\\b&a&0\\1&0&1\end{vmatrix}=0$$

解　如图 1-1-4，按沙路法则，有

$$\begin{vmatrix}a&b&0\\b&a&0\\1&0&1\end{vmatrix}=a\times a\times1+b\times0\times1+0\times b\times0-0\times a\times1-a\times0\times0-b\times b\times1=a^2-b^2,$$

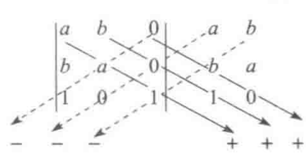

图　1-1-4

所以当 $a^2-b^2=0$,即 $a+b=0$ 或 $a-b=0$ 时,给定行列式等于零. ■

类似于二元线性方程组的讨论,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则当系数行列式 $D\neq0$ 时,三元线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq0.$$

所以线性方程组有解. 再计算

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5, \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5.$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=2, \quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$ ■

练习 1.1

一、选择题

1. 下面哪个行列式的值为 1? (   ).

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$;　　(B) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$;

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;　　(D) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 与行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ 相等的是(　　).

(A) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$;　　(B) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(C) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$;　　(D) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 等于(　　).

(A) 1;　　(B) -1;　　(C) 0;　　(D) 2.

4. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ 的值为(　　).

(A) -1;　　(B) 0;　　(C) 1;　　(D) $\cos 2\alpha$.

5. 已知二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2=0 \end{cases}$ 的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$,则 $x_1=$(　　).

(A) $\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$;　　(B) $\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$;

(C) $\dfrac{\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ -b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$;　　(D) $\dfrac{\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$.

6. 方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0$ 的根是(　　).

(A) $x_1=1, x_2=3$;　　(B) $x_1=2, x_2=3$;

(C) $x_1=0, x_2=1$;　　(D) $x_1=-1, x_2=1$.

二、填空题

7. 二阶行列式的代数和共________项,每一项是________个元素乘积. 三阶行列式的代数和共________项,每一项是________个元素乘积.

8. $\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=$ ________; $\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=$ ________; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$ ________; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=$ ________; $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$ ________.

9. 已知二元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$是方程组的________行列式.

10. 已知行列式$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$,则数$a=$________.

三、计算题

11. 计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

12. 求解方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

1.2 n 阶行列式

本节主要介绍排列、逆序和对换,并给出n阶行列式的定义.

1.2.1 排列、逆序和对换

定义 3 将n个不同的元素排成一列,叫作这n个元素的**全排列**.所有全排列共有$n!$个.

定义 4 由1,2,…,n这n个自然数组成的所有$n!$个全排列中,每一个全排列称为一个n**级排列**.

例如,由1,2,3可以组成$3!=6$个3级排列,它们分别是:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

再如,由1,2,3,4可以组成$4!=24$个4级排列,它们分别是:

1234，　1243，　1324，　1342，　1423，　1432，
2134，　2143，　2314，　2341，　2413，　2431，
3124，　3142，　3214，　3241，　3412，　3421，
4123，　4132，　4213，　4231，　4312，　4321.

例 1　排列 4213 是由 1,2,3,4 组成的一个 4 级排列，排列 253614 是由 1,2,3,4,5,6 组成的一个 6 级排列. ■

在所有 n 级排列中，有且只有一个排列 $12\cdots n$，具有从小到大的自然顺序的特征，称为**自然排列**，其他的 n 级排列都或多或少地破坏了这个自然顺序.

定义 5 在 n 级排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中，如果 $j_s<j_t$，即 j_sj_t 与自然顺序相一致，则称 j_sj_t 构成一个**顺序**. 如果 $j_s>j_t$，即 j_sj_t 与自然顺序相反，则称 j_sj_t 构成一个**逆序**. 一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序总数，称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数规定为零，即 $\tau(12\cdots n)=0$. 其他排列或多或少都违反了自然顺序，故其逆序数都大于零.

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数的计算方法是：首先数出 j_n 前面大于 j_n 的数的个数，记为 t_n，再数出 j_{n-1} 前面大于 j_{n-1} 的数的个数，记为 t_{n-1}，……，数出 j_2 前面大于 j_2 的数的个数，记为 t_2，这样排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=t_n+t_{n-1}+\cdots+t_2.$$

例 2　求排列 532146 的逆序数.

解　在最后一个数 6 的前面且比 6 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0；在倒数第二个数 4 的前面且比 4 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；在倒数第三个数 1 的前面且比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3；在倒数第四个数 2 的前面且比 2 大的数有 2 个，故其逆序的个数为 2；在倒数第五个数 3 的前面且比 3 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；在倒数第六个（即第一个）数 5 的前面没有数，故其逆序的个数为 0.

所以 532146 的逆序数

$$\tau(532146)=0+1+3+2+1+0=7.$$ ■

定义 6 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

自然排列 $12\cdots n$ 规定为偶排列. 例 2 中的排列 532146 是奇排列.

定义 7 在 n 级排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中，互换 j_s 与 j_t 的位置而其余不变，则称这个交换为对排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 进行了一次对换，记为 (j_s,j_t).

例如，将排列 532146 中的数 3 与 4 作一次对换，得到新的排列 542136.

定理 1 对换改变排列的奇偶性. ■

由于一个奇排列经过一次对换而变成偶排列,一个偶排列经过一次对换而变成奇排列. 故有

定理 2 所有 n 级排列中,奇偶排列各占一半,都是$\frac{n!}{2}$个. ■

1.2.2 n 阶行列式的定义

定义 8 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**,其中横排和纵排分别称为它的**行**和**列**,它表示由所有取自不同行和不同列的 n 个元素乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.5}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列,每一项式(1.5)都按下列规则带有符号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,式(1.5)前面带有"+"号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,式(1.5)前面带有"−"号. 这样,这一定义可写成:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.6}$$

注:(1) 行列式的元素 a_{ij} 表明它位于行列式的第 i 行第 j 列的交叉点上,i 称为 a_{ij} 的行指标,j 称为 a_{ij} 的列指标;

(2) 行列式是一个数;

(3) 特别地,当 $n=1$ 时,$|a|=a$. 此处不要与数的绝对值混淆.

例 3 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

解 在上三角行列式中,第 n 行的元素除了 a_{nn} 以外全为零,因为取第 n 行的其他数做乘积都是 0,故只考虑取 $j_n=n$ 的数 a_{nn} 做出乘积. 第 $n-1$ 行中,除 $a_{n-1,n-1}$,$a_{n-1,n}$ 外,其余元素全为零,那

么乘积一定为零,因此只考虑 $j_{n-1}=n-1,j_n=n$ 两种情况. 由于 a_{nn} 位于第 n 列,所以只能从第 $n-1$ 行中取位于第 $n-1$ 列的数 $a_{n-1,n-1}$. 这样依次类推下去,在 $n!$ 个的乘积中,除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外,其余的项全为零,而这一项列指标的排列 $12\cdots n$ 是偶排列,于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

■

同理,对于下三角行列式和对角行列式,也有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

练习 1.2

一、选择题

1. 下列排列是偶排列的是(　　).

(A) 53214;　(B) 654321;　(C) 12345;　(D) 32145.

2. 已知由 1,2,3,4,5 组成一个偶排列 $32x5y$,则 x,y 分别为(　　).

(A) 1,4;　(B) 4,1;　(C) 1,2;　(D) 3,4.

3. 排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的逆序数为(　　).

(A) $\dfrac{n(n-1)}{2}$;　(B) n;　(C) $n-1$;　(D) 不确定.

4. 判断 4 阶行列式中的项 $a_{11}a_{33}a_{44}a_{22}$ 和 $a_{24}a_{31}a_{13}a_{42}$ 的符号分别为(　　).

(A) 正、正;　(B) 正、负;　(C) 负、正;　(D) 负、负.

二、填空题

5. 排列 213 是由 1,2,3 三个自然数组成的一个________级排列,25314 是由 1,2,3,4,5 五个自然数组成的一个________级排列.

6. 排列 31524 的逆序数为________,该排列为________排列.

7. 在 1,2,3 三个数的排列中,共有________个排列,其中奇排列

________个，偶排列________个.

8. 在六阶行列式中，$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$应取什么符号________.

9. 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项是________和________.

三、计算题

10. 利用 n 阶行列式的定义计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

11. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

四、证明题

12. 证明行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$.

1.3 行列式的性质

本节主要介绍行列式的重要性质，并利用性质来计算行列式.

1.3.1 行列式的性质

定义 9 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，将 D 的行与列互换后得到的行列式称为 D **的转置行列式**，记作 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$. ■

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是对等的，所以凡是有关行的性质，对列也同样成立.

性质 2 若互换行列式的两行(列)，则行列式变号. ■

通常以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列. 互换 i,j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；互换 i,j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$；

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

推论 若行列式 D 中有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

证明 将 D 中相同的这两行互换,根据性质 2,有 $D=-D$,则 $D=0$. ■

性质 3 一个数乘以行列式某一行(列)的所有元素，等于用这个数乘以这个行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad ■$$

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式的外面. ■

推论 2 若行列式有两行(列)的所有元素成比例,则此行列式等于零. ■

推论 3 若行列式的某一行(列) 的所有元素全为零，则行列式为零. ■

例 1 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

$$= -3\times(-2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -3\times(-2)\times 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$=-3\times(-2)\times5\times1=30.$ ■

性质 4 若行列式 D 某一行(列)的每个元素都是两数之和,则 D 可表示成两个行列式 D_1 与 D_2 的和,其中 D_1,D_2 对应的行(列)分别以这两数为元素,其他行(列)的元素与 D 相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如,

$$\begin{vmatrix} 303 & 200 & 204 \\ 599 & 400 & 392 \\ 901 & 600 & 600 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 300+3 & 200 & 204 \\ 600-1 & 400 & 392 \\ 900+1 & 600 & 600 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 300 & 200 & 204 \\ 600 & 400 & 392 \\ 900 & 600 & 600 \end{vmatrix}+$$

$$2\begin{vmatrix} 3 & 100 & 204 \\ -1 & 200 & 392 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix}=3\times2\begin{vmatrix} 100 & 100 & 204 \\ 200 & 200 & 392 \\ 300 & 300 & 600 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & 100 & 200+4 \\ -1 & 200 & 400-8 \\ 1 & 300 & 600+0 \end{vmatrix}$$

$$=0+2\begin{vmatrix} 3 & 100 & 200 \\ -1 & 200 & 400 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -8 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=0+0+200\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=\cdots$$

性质 5 把行列式某一行(列)的各元素乘以同一数加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.