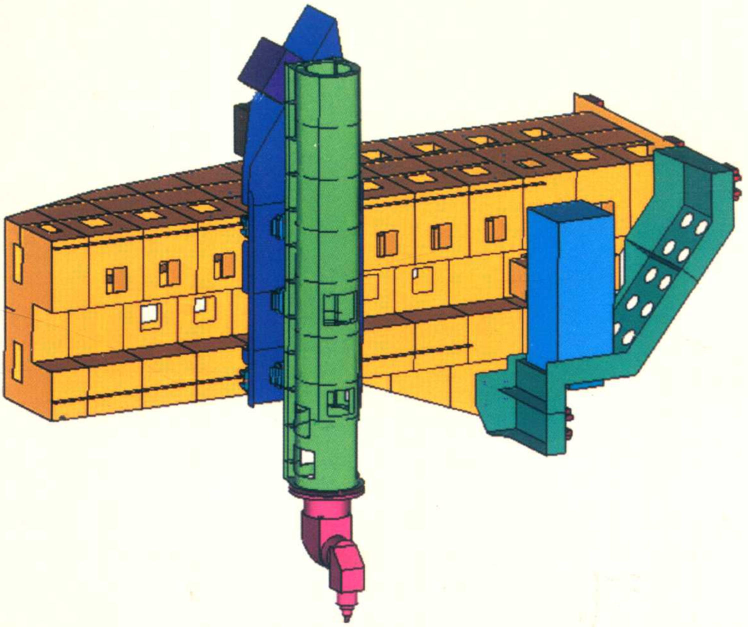
普通高等院校『新工科』创新教育精品课程系列教材

教育部高等学校机械类专业教学指导委员会推荐教材



工程有限元及数值计算

扫码关注数字教学资源

戴宏亮 周加喜 ◎主 编

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等院校“新工科”创新教育精品课程系列教材
教育部高等学校机械类专业教学指导委员会推荐教材

工程有限元及数值计算

主　编　戴宏亮　周加喜

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容简介

本书是普通高等院校“新工科”创新教育精品课程系列教材之一，内容符合教育部高等学校机械类专业教学指导委员会规划教材的基本要求。全书共九章，主要内容包括：有限元概述，平面问题、杆系结构、板壳问题的有限元法，热传导问题的有限元法，动力学问题的有限元法，材料非线性、几何非线性问题的有限元法，接触与碰撞问题的有限元法。

本书可作为高等院校机械、力学、土建类、材料、环境工程和航空航天等专业的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程有限元及数值计算/戴宏亮，周加喜主编．—武汉：华中科技大学出版社，2019.6
普通高等院校“新工科”创新教育精品课程系列教材
教育部高等学校机械类专业教学指导委员会推荐教材
ISBN 978-7-5680-5016-6

Ⅰ．①工…　Ⅱ．①戴…　②周…　Ⅲ．①有限元法-应用-工程技术-高等学校-教材　②数值计算-应用-工程技术-高等学校-教材　Ⅳ．①TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 122699 号

工程有限元及数值计算　　戴宏亮　周加喜　主编
Gongcheng Youxianyuan ji Shuzhi Jisuan

策划编辑：张少奇
责任编辑：刘　飞
封面设计：杨玉凡
责任校对：曾　婷
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)　　电话：(027)81321913
　　　　　武汉市东湖新技术开发区华工科技园　　邮编：430223
录　　排：华中科技大学惠友文印中心
印　　刷：武汉华工鑫宏印务有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：15.5
字　　数：405 千字
版　　次：2019 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：45.00 元

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

普通高等院校“新工科”创新教育精品课程系列教材
教育部高等学校机械类专业教学指导委员会推荐教材

编审委员会

出 版 说 明

为深化工程教育改革，推进“新工科”建设与发展，教育部于 2017 年发布了《教育部高等教育司关于开展新工科研究与实践的通知》，其中指出“新工科”要体现五个“新”，即工程教育的新理念、学科专业的新结构、人才培养的新模式、教育教学的新质量、分类发展的新体系。教育部高等学校机械类专业教学指导委员会也发出了将“新”落实在教材和教学方法上的呼吁。

我社积极响应号召，组织策划了本套“普通高等院校‘新工科’创新教育精品课程系列教材”，本套教材均由全国各高校工作在“新工科”教育一线的专家和老师编写，是全国各高校探索“新工科”建设的最新成果，反映了国内“新工科”教育改革的前沿动向。同时，本套教材也是“教育部高等学校机械类专业教学指导委员会推荐教材”。我社成立了以李培根院士、段宝岩院士、杨华勇院士、赵继教授、顾佩华教授为顾问，奚立峰教授、刘宏教授、吴波教授、陈雪峰教授为主任的“‘新工科’视域下的课程与教材建设小组”，为本套教材构建了阵容强大的编审委员会，编审委员会对教材进行审核认定，使得本套教材从形式到内容上保持高质量。

本套教材包含了机械类专业传统课程的新编教材，以及培养学生大工程观和创新思维的新课程教材等，并且紧贴专业教学改革的新要求，着眼于专业和课程的边界再设计、课程重构及多学科的交叉融合，同时配套了精品数字化教学资源，综合利用各种资源灵活地为教学服务，打造工程教育的新模式。希望借由本套教材，能将“新工科”的“新”落地在教材和教学方法上，为培养适应和引领未来工程需求的人才提供助力。

感谢积极参与本套教材编写的老师们，感谢关心、支持和帮助本套教材编写与出版的单位和同志们，也欢迎更多对“新工科”建设有热情、有想法的专家和老师加入本套教材的编写。

华中科技大学出版社
2018 年 7 月

前　言

有限元法(finite element method,FEM)是为解决工程与数学物理问题而提出并逐渐发展起来的一种数值方法。在工程和科技领域内,对于许多的力学与物理问题,其遵循的数学方程(常微分方程或偏微分方程)只有在方程性质比较简单,且求解域的几何形状相当规则的情况下才能获得解析解。大多数问题,由于方程的非线性性质或求解域几何形状的复杂性,只能采用数值方法进行求解。有限元法由于其通用性和有效性,已成为工程分析中应用最为广泛的数值计算方法。

有限元法的基本思想是将连续的求解域离散为一组单元的组合体,以每个单元内假设的近似函数来分片地表示求解域上待求的未知场函数,近似函数通常由未知场函数及其导数在单元各节点的数值插值函数来表达,从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题,即将偏微分方程离散为代数方程。

自20世纪60年代被提出以来,有限元法逐渐发展成为航空、航天、机械、土木等各大工程领域最为广泛应用的科学计算方法。作为力学、数学、计算机技术等多学科交叉发展的产物,有限元法扩大了科学研究的对象范围,提升了科技转化为生产力的效率。本教材为响应"新工科"建设,结合有限元学科的教学要求与"新工科"建设的目标而编写,适合不同专业学时为80学时的"有限元法"课程的教学。

本书在突出基础理论和基本方法的前提下,注重理论联系实际,在内容安排上遵循由浅入深、循序渐进和便于自学的原则。每章后都附有具体的工程算例,供读者学习选用,在保证基础的前提下,注重对学生视野的开阔和工程实际应用能力的拓展与提高。

全书共九章,主要内容包括:有限元概述,平面问题、杆系结构、板壳问题的有限元法,热传导问题的有限元法,动力学问题的有限元法,材料非线性、几何非线性问题的有限元法,接触与碰撞问题的有限元法。本书第1、2、3、5、6、9章由戴宏亮编写,第4、7、8章由周加喜编写。本书在编写过程中,参考了一些兄弟院校教材中的部分内容,在此表示衷心感谢!

由于编者水平有限,书中难免存在不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编　者

2019年5月于湖南大学

与本书配套的二维码资源使用说明

本书部分课程资源以二维码链接的形式呈现。利用手机微信扫码成功后提示微信登录，授权后进入注册页面，填写注册信息。按照提示输入手机号码，点击获取手机验证码，稍等片刻收到4位数的验证码短信，在提示位置输入验证码成功，再设置密码，选择相应专业，点击"立即注册"，注册成功。（若手机已经注册，则在"注册"页面底部选择"已有账号？立即注册"，进入"账号绑定"页面，直接输入手机号和密码登录。）接着提示输入学习码，需刮开教材封底防伪涂层，输入13位学习码（正版图书拥有的一次性使用学习码），输入正确后提示绑定成功，即可查看二维码数字资源。手机第一次登录查看资源成功以后，再次使用二维码资源时，只需在微信端扫码即可登录进入查看。

目　　录

第1章 绪　论

有限元法(finite element method,FEM)是大型复杂结构多自由度体系的有力分析工具,自20世纪60年代被首次提出,其理论及算法日趋成熟,随着计算机软硬件技术的飞速发展,现已成为工程分析中应用最广泛的数值计算方法,是计算机辅助工程(computer aided engineering,CAE)的理论基础,在航空、航天、机械、土木等各大工程领域发挥着巨大作用。

1.1 有限元法概述

1.1.1 有限元法简介

有限元法是力学、数学、计算机技术等多学科交叉发展的产物。人类在认识世界的过程中,主要有理论分析、科学实验、科学计算三种方法。面对诸多新型领域,由于理论方法和实验方法的局限性,科学计算的重要性日益彰显。科学计算大大增强了人们从事科学研究的能力,加速了把科技转化为生产力的进程,深刻地改变着人类认识世界和改造世界的方法和途径。在科学和工程的许多领域,科学计算可被用来获得重大的研究成果或完成高度复杂的工程设计。科学计算为科学研究与技术创新提供了新的重要手段和理论基础,正在并将继续推动当代科学和高新技术的发展。有限元法是科学计算中极为重要的方法之一,在大多数工程研究领域得到了广泛应用,大大推动了相关科学研究和工程技术的进步。

工程中对力学问题的分析求解方法,主要可以归纳为解析法(analytical method)和数值法(numeric method)。对于给定问题,解析法通过数学推导、演绎求解数学模型,最终能得到包含某一类问题所有解的表达式。但其适用条件通常都十分苛刻,而对于绝大多数工程实际问题,由于方程的非线性、求解域几何形状的复杂性,要采用解析法求精确解是相当困难的,因此数值法逐渐成为工程计算中不可替代的求解方法。近年来电子计算机软硬件技术的飞速进步,为数值分析方法提供了高效可靠的运行平台,数值分析方法已经成为求解各类工程技术问题的有力工具。

根据实现数值计算近似原理的不同,各类数值计算方法可分为基于微分近似的求解法,如差分法;基于微分方程的等效积分形式的求解法,如加权余量法;基于泛函的变分原理求解法,如里兹法。以下是对几种典型数值方法基本思想及特点的简要介绍。

1. 差分法

差分法是微分方程的一种近似数值解法,其基本思想是将问题求解区域划分为均匀的差分网络,用有限个网格节点代替连续的求解域。基于 Taylor 级数展开等方法,把描述问题的微分方程中的微分用网格节点上函数值的差分来代替,从而将微分方程转化为以网格节点上函数值为未知量的代数方程组。该方法数学概念直观,表达形式简单,是发展比较早且比较成

熟的数值方法。

以图 1-1-1 中所示的一维边值问题为例，假设问题的数学描述为

$$\left.\begin{aligned} & y'' + y + 1 = 0 (a < x < b) \\ & y\big|_{x=a} = 0 \quad y\big|_{x=b} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-1-1}$$

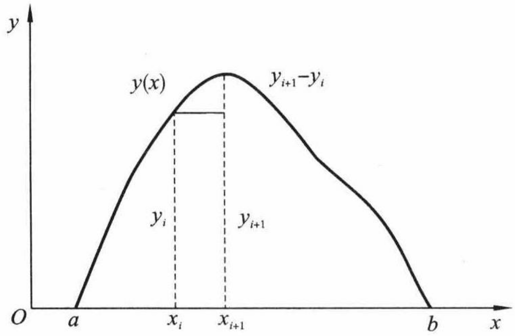


图 1-1-1　一维边值问题

若将求解区域 $[a,b]$ 划分为 n 等分，则相邻两节点间的距离为 $h=(b-a)/n$，其中 h 称为步长，节点 $x_i = x_0 + ih (i = 0,1,\cdots,n)$。若用差分代替相应的微分，可将问题离散化得到如下由 $n+1$ 个方程组成的代数方程组：

$$\left.\begin{aligned} & y_{i+1} - (2-h^2) y_i + y_{i-1} = -h^2 (i = 1,2,\cdots,n-1) \\ & y_0 = 0 \\ & y_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-1-2}$$

求解式(1-1-2)可以得到 $y_i (i = 0,1,\cdots,n)$，共 $n+1$ 个未知量，即原问题的解 $y(x)$ 在 x_i 上的近似值。

有限差分法能处理一些问题复杂但求解域比较规则的问题，如在流体力学计算领域内，其至今仍处于主要地位。差分网格越密集，节点越多，则近似的精度越高。但若求解域为几何形状不规则的复杂问题，它的计算精度将大大降低，因为差分法的网格只能为结构化网格，所以其存在很大的局限性。

2. 里兹法

在很多情况下，微分方程及其给定边界条件的求解也可以根据变分原理将其转化为泛函极值的求解。所谓变分原理就是求泛函的变分问题，如果能够构造微分方程和相应定解条件的泛函，则使泛函取驻值的函数等价于微分方程满足相应的边界条件的解。里兹法就是基于变分原理的一种求解微分方程的经典数值计算方法，其基本思想是先根据描述问题的微分方程及相应定解条件构造等价的泛函表达式，然后在整个求解区域上假设一个满足边界条件的试探函数(或近似函数)，通过直接求解泛函极值问题以获取原问题的近似解。在整个求解区域上定义的满足边界条件的试探函数一般选含有 n 个待定系数的完全多项式，然后，将试探函数代入泛函求解表达式中，利用泛函极值存在条件建立 n 个关于待定系数的线性方程，联立这些方程从而确定试探函数，即为原问题的近似解。仍然以问题(1-1-1)为例说明其具体步骤。

设求解区间为$[0,1]$，则构造原问题(1-1-1)的泛函为

$$\boldsymbol{\Pi} = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}y^2 + y\right)\mathrm{d}x \tag{1-1-3}$$

构造满足问题边界条件的试探函数，试探函数应取自完全的函数序列，为线性独立的，即任一

函数都可以用这个序列来表示，这称为试探函数的完全性。如假设试探函数为多项式

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x - x^{i+1}) \tag{1-1-4}$$

其中，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为待定系数。

将试探函数 $\tilde{y}(x)$ 代入泛函(1-1-3)中，则泛函表达式被转化为关于 n 个待定系数的多元函数，简记为

$$\boldsymbol{\Pi} \approx \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \tag{1-1-5}$$

下面建立关于 n 个待定系数的线性方程组求泛函极值。根据多元函数有极值的必要条件，得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\boldsymbol{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\boldsymbol{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_n}\boldsymbol{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-1-6}$$

式(1-1-6)为关于待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性方程组，求解方程组得到这 n 个待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的值并将其回代到式(1-1-4)中，可得到试探函数的表达式，即原问题的近似解。

若假设试探函数只选取式(1-1-4)中的一项，即

$$\tilde{y}(x) = \alpha_1 (x - x^2) \tag{1-1-7}$$

则按上述步骤容易求得 $\alpha_1 = \dfrac{5}{9}$，原问题的近似解为

$$\tilde{y}(x) = \frac{5}{9}x(1 - x) \tag{1-1-8}$$

显然，随着试探函数待定系数的增加，近似解的精度也会提高。可以证明，只要试探函数满足完全性和连续性的要求，随着试探函数待定系数的增加，试探函数将收敛于精确解。但是，由于试探函数定义于整个求解域，且必须满足问题的边界条件，这给实际应用，如边界条件复杂或局部精度要求很高的问题求解带来了难以克服的困难。因此里兹法只能处理一些简单问题。而分片近似方法能克服这一局限性，把复杂的整个区域分割成若干子域，在子域内假设试探函数并用分片连续的试探函数来代替整个区域内的试探函数，这也是有限元的基本思想。

3. 加权余量法

加权余量法是基于微分方程的等效积分形式来求解微分方程的一种数值方法，相对于基于变分原理的里兹法，其更具有普遍性，如泛函不可构造的问题。同时，加权余量法也放松了构造近似函数必须满足边界条件的要求。由于近似函数不能精确满足微分方程的边界条件，由此所产生的误差称为余量(或残值)，加权余量法的基本思想是选择一系列含待定系数的已知函数，使余量在整个区域上的加权积分为零。实际上，这个过程是将一个在整个区域内每点精确满足微分方程的问题转变为加权平均意义上的近似满足。

设所选择的近似函数的一般形式为

$$u = \sum_{i-1}^{n} N_i \alpha_i = N\alpha \tag{1-1-9}$$

其中，α_i 为待定系数，N_i 为已知函数。描述一般物理问题的微分方程与边界条件可分别表示

如下：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} A_1(\boldsymbol{u}) \\ A_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}(\text{在域 }\Omega\text{ 内}) \tag{1-1-10}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} B_1(\boldsymbol{u}) \\ B_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}(\text{在边界 }\Gamma\text{ 上}) \tag{1-1-11}$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 是待求解的未知函数。$\boldsymbol{u}$ 可以是标量场(如温度)，也可以是由若干变量组成的向量场(如位移场、应力场)。$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为对独立变量(如时间、坐标)的微分算子。区域 Ω 可以是面积域、空间域等，Γ 是域的边界，如图 1-1-2 所示。上述方程可以是单个方程，也可为一组方程。这种在区域 Ω 内由控制微分方程定义、在包围区域 Ω 的边界 Γ 上由边界条件定义的数学模型通常称为边值问题，这种以微分方程形式表述问题的方法一般称为定解问题的微分方程提法。

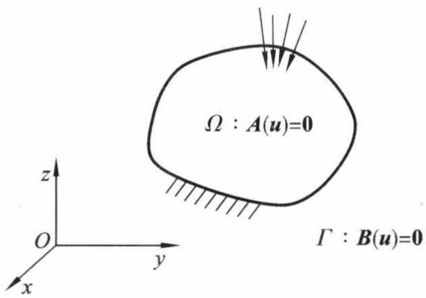


图 1-1-2　一般物理问题

将式(1-1-9)代入微分方程(1-1-10)和边界条件(1-1-11)，则由于近似函数不能精确满足微分方程与边界条件所出现的余量为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{N\alpha}) = \boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{N\alpha}) = \overline{\boldsymbol{R}} \tag{1-1-12}$$

同时由于微分方程在域 Ω 内每一点都为零，且边界条件方程在 Γ 上每一点都得到满足，对于分别在 Ω 内与 Γ 上可积的任意函数 $\mathbf{V}$ 和 $\overline{\mathbf{V}}$，可用规定的 n 个函数代替，即

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{w}_j,\quad \overline{\mathbf{V}} = \overline{\boldsymbol{w}}_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-1-13}$$

从而可以得到微分方程的等效积分形式：

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \overline{\boldsymbol{w}}_j^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-1-14}$$

其中，$\boldsymbol{w}_j$，$\overline{\boldsymbol{w}}_j$ 为权函数。式(1-1-14)是一组方程，用于求解待定系数 α_i。

这种使用余量的加权积分为零来求得微分方程近似解的方法称为加权余量法。加权余量法的方程实际上就是微分方程的等效积分形式。由于权函数的任意性，选取不同的权函数可得到不同的加权余量法，常用的方法包括配点法、子域法、最小二乘法、力矩法和伽辽金法(Galerkin method)。如果取式(1-1-9)所示的已知函数作为式(1-1-14)的权函数 $\boldsymbol{N}$，则该方法为伽辽金余量法。若令 $\overline{\boldsymbol{w}}_j = -\boldsymbol{w}_j = -\boldsymbol{N}_j$，则式(1-1-14)可写为

$$\int_\Omega \boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{\alpha}_i\Big)\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{\alpha}_i\Big)\mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-1-15}$$

该方程的系数往往是对称的，因此在用加权余量法建立有限元计算格式时大都采用伽辽金法，得到的有限元法的系数矩阵为对称矩阵。伽辽金余量法是推导各种场问题有限元格式最一般

的数学方法，不仅可用于泛函存在的问题，也可用于泛函不存在的问题。

有限元作为一种数值计算方法，是在继承和综合差分方法和里兹法的基础上发展起来的，其数学原理是加权余量法。在对连续介质力学问题的处理上，有限元法以其物理概念清晰、处理问题灵活、适用于各种复杂边界的特点展现了巨大优势，且其采用矩阵形式表达基本公式，便于编程实现，现今已发展成为该领域应用最为广泛的数值计算方法。

简单来说，有限元法抛弃了寻找整个求解域精确场函数的思路，其核心思想是离散化与数值近似。其实质是将复杂的连续体划分成有限个数的简单单元体，并以共用节点的方式连接成组合体，从而将整个连续求解域离散为若干子域。每个单元内部采用假设的近似函数分片表示全求解域内的待求场变量，近似函数由未知场函数或其导数在单元各个节点上的数值和对应的插值函数表达，以场函数在节点上的值作为数值求解的基本未知量，以有限自由度代替无限自由度，将连续场函数的(偏)微分方程求解问题转化为有限参数的代数方程组求解问题。

1.1.2 有限元法的特性

1. 基本思想简单，概念清晰

有限元法的基本思想就是几何离散和分片插值，思想简单朴素，概念清晰且容易理解。用离散单元的组合体来逼近原始结构，体现了几何上的近似；而用近似函数逼近未知变量在单元内的真实解，体现了数学上的近似；利用原问题的等效变分原理(如最小势能原理)建立有限元基本方程(刚度方程)又体现了其明确的物理背景。

2. 可适应复杂几何形态

有限元发展至今单元种类已经非常丰富，包含一维、二维或三维的单元，并且单元可以有不同形状，不同单元之间可以采用不同的方法连接，特别适用于形状复杂或有不同构建组合的结构。例如，图 1-1-3 所示为自行车头盔碰撞有限元模型，图 1-1-4 所示为汽车碰撞模拟中的人体有限元模型。

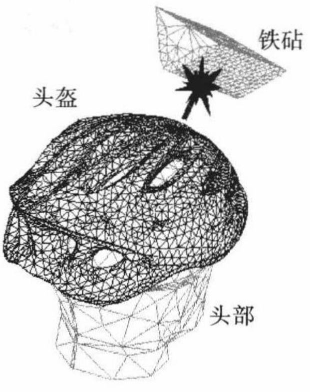


图 1-1-3 自行车头盔碰撞有限元模型

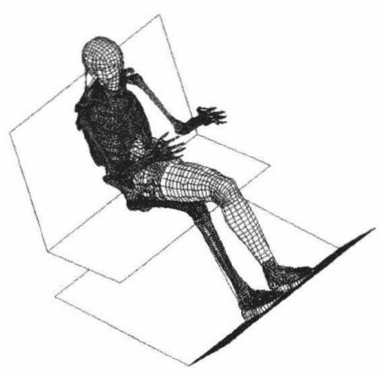
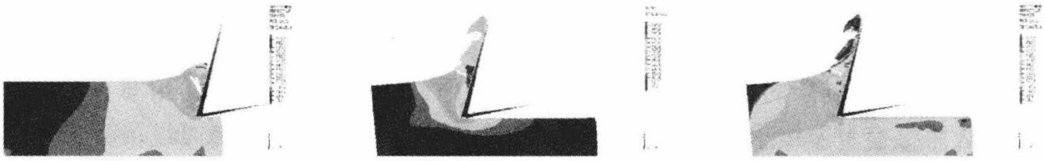


图 1-1-4 汽车碰撞模拟中的人体有限元模型

3. 可灵活应用于各种物理问题

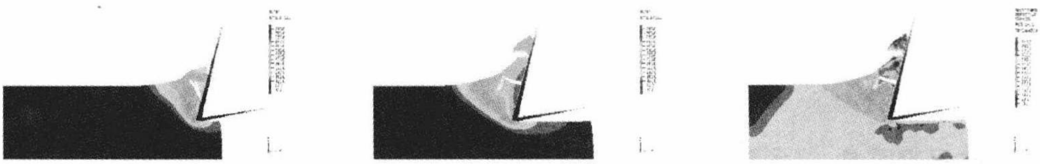
有限元法的研究应用始于对固体力学中线弹性问题的求解，由于其对求解域内的未知场函数类型并没有限制，也不要求不同单元必须采用同一方程形式，因此有限元法的研究范围很快就发展到弹塑性问题、黏弹塑性问题、屈曲问题、动力学问题等，应用十分广泛，并进一步发展到流体力学问题、传热问题，电磁学问题，以及复杂的多物理场耦合问题等。金属切割便是

一个典型的热-力耦合问题，工件的塑性变形和刀具-工件界面处的摩擦将产生大量热量，达到的温度可能相当高，并可能对力学响应产生很大影响，采用有限元法可以很好地对这一过程进行模拟。图 1-1-5 所示为有限元法得到的具有正前角的刀具对高强度高切割过程的应力场，图 1-1-6 所示为对应过程的温度场。



(a)　　(b)　　(c)

图 1-1-5　应力场



(a)　　(b)　　(c)

图 1-1-6　温度场

在工程技术领域，根据分析目的的不同，有限元法的应用常分为三大类，如表 1-1-1 所示。

表 1-1-1　有限元法的应用分类

研究领域	静平衡问题	特征值问题	动态问题
结构力学和宇航工程	杆系、板壳结构的分析 复杂或组合结构分析 二维、三维应力分析	结构稳定性分析 结构固有频率和振型 线性黏弹性阻尼	应力波的传播 动态响应 耦合热弹性力学与热黏弹性力学
土力学、基础工程学	二维、三维应力分析 填筑和开挖问题 边坡稳定性问题 土壤和结构的相互作用 隧道、涵洞、大坝等分析 流体在土壤中的渗流	土壤-结构组合物的固有频率和振型	土壤与岩石中的非定常渗流 应力波在土壤和岩石中的传播 土壤与结构的动态相互作用
热传导	固体和流体中的稳态温度分布	—	固体和流体的瞬态热流
流体动力学、水利工程学	流体的势流 流体的黏性流动 多孔介质和蓄水层中的定常渗流	湖泊和港湾的波动 容器中流体的晃荡	流体的非定常流动 波的传播 多孔介质和蓄水层中的非定常渗流

续表

研究领域	静平衡问题	特征值问题	动态问题
核工程	反应堆安全壳结构分析 反应堆及其安全壳结构稳态热分析	—	反应堆安全壳结构动态分析 反应堆结构热黏弹性分析 反应堆及安全壳结构瞬态热分析
电磁学	静态电磁场分析	—	时变、高频电磁分析
生物力学工程问题	人体脊柱、头骨、骨关节、牙移植等应力分析	—	响应分析，碰撞分析

4. 理论基础可靠

有限元法的数学过程是通过变分原理或加权余量法来建立求解基本未知量(场函数在节点的取值)的代数方程组或常微分方程组，然后通过数值求解法以得到问题的解。变分原理与加权余量法在数学上已被证明是微分方程和边界条件的等效积分形式，因此只要保证实际问题的数学模型正确、求解方程的数值算法稳定可靠，有限元解的精度就能随着单元的细化与插值函数阶次的提高收敛于原问题的精确解。

5. 适合编程计算

有限元分析过程可以方便地采用矩阵形式表达，有限元求解最终可以转化为矩阵形式的代数方程组求解问题，非常适合规范化编程处理。随着数值计算方法的不断发展与计算机性能的飞速提升，工程中已经能够方便高效地利用有限元法对各种大型复杂的模型进行求解。

1.1.3 有限元法在产品开发中的应用

有限元法的出现与发展，也促进了产品设计与制造的根本改变，产品的开发正朝着数字化设计、分析、优化及数字化制造与控制的综合化方向发展。

在现代产品开发过程中，CAD/CAE/CAM 已成为基本工具，作为 CAE 工具的重要组成之一，有限元法更是成为产品开发必不可少的工具。CAD 工具用于产品结构设计，形成产品的数字化模型，有限元法则用于产品性能的分析与仿真，帮助设计人员了解产品的物理性能和破坏的可能原因，分析结构参数对产品性能的影响，对产品性能进行全面预测和优化；帮助工艺人员对产品的制造工艺及试验方案进行分析设计。实际上，当前有限元法在产品开发中的作用，已从传统的零部件分析、校核设计模式发展为计算机辅助设计、优化设计、数字化制造融为一体的综合设计。有限元法已成为提高产品设计质量的有效工具。图 1-1-7 给出了产品开发流程中有限元法所处的位置。可以预见，随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展，有限元法作为一个具有坚实理论基础和广泛应用效力的通用数值分析工具，必将在产品开发中发挥更大作用。

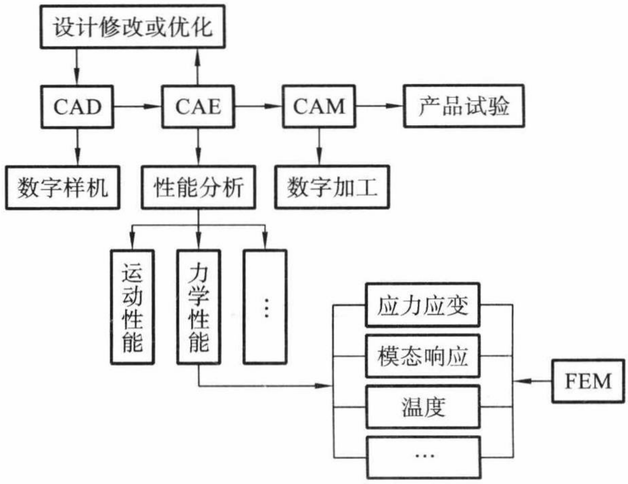


图 1-1-7　现代产品开发流程

1.2　有限元法的基本步骤

有限元法发展至今，按照求解性质可以把有限元法能解决的问题分为三类：不依赖时间的平衡问题、特征值问题、随时间变化的瞬态问题。不同问题的具体求解过程有所区别，但其基本思路都是化无限自由度问题为有限自由度问题，然后采用数值方法进行求解。在力学问题的求解中，以节点位移为基本未知量的有限元法被称为位移有限元法，是当今应用最广的方法，本节以解决弹性力学问题的位移有限元法为例，说明有限元法的基本步骤。

1.2.1　结构的离散

结构的离散是有限元分析的第一步。离散化是将结构或求解域划分成有限个单元，单元与单元间以共用节点的方式相连，让全部单元与原结构近似等价。单元划分要综合考虑问题类型、求解精度以及对效率的要求等因素，选择单元形状、尺寸、数量和排列时必须谨慎，以便尽可能精确地模拟原物体，而不增加求解的计算工作量。

对任一个给定结构进行离散化，首先应该选择合适的单元。在一般情况下，单元类型取决于物体的几何形状以及描述系统所需要的独立空间坐标数。图 1-2-1～图 1-2-3 分别是某些常用的一维、二维和三维单元。

当结构的几何形状、材料性质即应力位移等参数仅需要用一个空间坐标描述时，我们可以采用如图 1-2-1 所示的一维单元，虽然这种单元有横截面面积，但一般在示意图中都用线段表示。在某些问题中，单元横截面面积可沿长度变化。当结构形状和其他参数可以用两个独立空间变量描述时，我们便可采用图 1-2-2 中所示的二维单元。二维分析中常用的基本单元是三角形单元，虽然四边形单元可以用三角形单元集合而成，但在某些情况下用四边形单元效率更高。结构的几何形状、材料性质和其他参数可以用三个独立的空间坐标来描述时，我们可以采用图 1-2-3 中所示的三维单元离散物体，其基本三维单元是四面体单元，但在某些情况下采用六面体单元更为高效。

对涉及曲线或曲面的几何结构进行离散时，可以采用具有曲边的单元。如图 1-2-4 所示，