100 Questions for the Mathematical Solution of the Russian Quantum Magazine

俄罗斯《量子》杂志数学征解问题

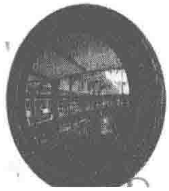
100题选

◎［美］阮可之　编译

数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，只有具有青春与力量才能做得满意。——诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

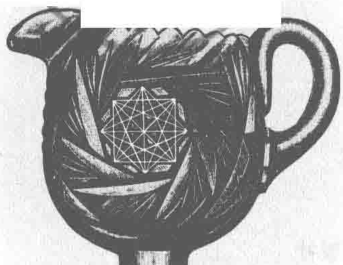


100 Questions for the Mathematical Solution of the Russian Quantum Magazine

俄罗斯《量子》杂志数学征解问题

100题选

◎[美] 阮可之 编译



数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，
只有具有青春与力量才能做得满意。——诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，
但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，
适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，
同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要搜集了俄罗斯著名青少年数理双月刊《量子》杂志中的经典题型100道，并配有详细解答．对于参加数学竞赛的师生来说是一本很好的参考书．书中所选题型兼顾代数、三角和几何方面的问题，题型侧重于巧，而不是难，能引发读者进一步思考和研究．

本书适合中学生及数学爱好者阅读和收藏．

图书在版编目(CIP)数据

俄罗斯《量子》杂志数学征解问题100题选/(美)阮可之编译．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.8

ISBN 978－7－5603－7424－6

Ⅰ．①俄…　Ⅱ．①阮…　Ⅲ．①量子论－文集
Ⅳ．①O413－53

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第128108号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　关虹玲
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张10.25　字数181千字
版　　次　2018年8月第1版　2018年8月第1次印刷
书　　号　978－7－5603－7424－6
定　　价　48.00元

目　录

第一章　问题及解答

1.(1) 试证明:对于正$\triangle ABC$外接圆上任意一点M,线段MA,MB,MC中的一条等于其余两条之和.

(2) 三个等圆$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$两两相切,圆$\gamma$与所有三圆内切,试证明:对于圆$\gamma$上的任意一点$M$,从它所引的三个圆的切线中的一条等于其余两条之和.

证明　(1) 设点M位于正$\triangle ABC$外接圆的弧AB上,把$\triangle AMB$绕点A旋转$60°$,使它占取$\triangle AKC$的位置(图1).因为$\angle MBA$和$\angle MCA$相等(它们对同一条弧AM),点K在线段MC上.因为$AM=AK$,$\angle MAK=60°$(根据作图),所以$\triangle AMK$是等边三角形,所以$MK=AM$,这样,有$MA+MB=MK+KC=MC$.

(2) 我们来证明更一般的事实.设三个半径为r的圆的圆心位于正$\triangle C_0C_1C_2$的顶点,O为正$\triangle C_0C_1C_2$外接圆的圆心,且正$\triangle C_0C_1C_2$的外接圆的半径为a,这时,对于半径$R=a+r$,圆心为O的圆上任意一点M,从M所作的三个半径为r的圆的切线中,一条切线的长等于其余两条切线长之和.我们指出,当$r=0$时得到问题(1)的结果.

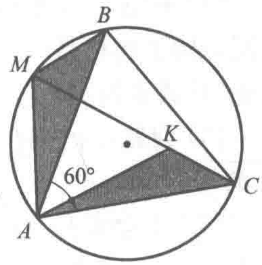


图1

设半径OM与半径$OC_k(k=0,1,2)$所成的角$\alpha_k=\alpha_0+k\cdot 120°$(图2),这时,有

$$MC_k^2=R^2+a^2-2Ra\cos\alpha_k$$

而从点M到相应的圆的切线的平方等于

$$MC_k^2-r^2=R^2+a^2-2Ra\cos\alpha_k-(R-a)^2$$
$$=2Ra(1-\cos\alpha_k)$$

所以切线长等于

$$2\sqrt{Ra}\sin\frac{\alpha_k}{2}(\sin\frac{\alpha_k}{2}\geqslant 0,因为 0\leqslant\alpha_k<2\pi)$$

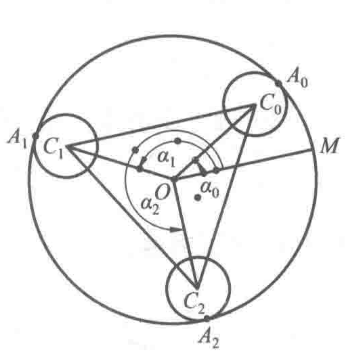


图2

剩下验证等式

$$\sin\frac{\alpha_0}{2}+\sin\frac{\alpha_2}{2}=\sin\frac{\alpha_1}{2}$$

这已经很简单,有

$$\sin\frac{\alpha_0}{2}+\sin\frac{\alpha_2}{2}=2\cos 60^\circ\sin\frac{\alpha_0+\alpha_2}{4}=\sin\frac{\alpha_1}{2}$$

译者注

(1) 对于问题(1)，有多种证法，例如，参考文献[1] 共列举了 21 种证法！

(2) 为了揭示问题(1) 和(2) 的内在联系，我们需要下列引理.

引理　设半径分别为 R，$r(R>r)$ 的两个圆内切于点 T，自大圆上任一点 P 向小圆作切线(P 与 T 不重合)，切点为 Q，则 $PQ=PT\sqrt{\dfrac{R-r}{R}}$(图 3).

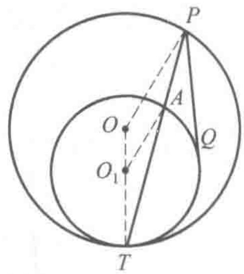


图 3

引理的证明，留给读者. 由引理，问题(2) 的证明归结为证明 $MA_1=MA_0+MA_2$(请参看图 2)，其中 A_0，A_1，A_2 是大圆与三个小圆的切点，所以问题又回到证明问题(1). 值得注意的是，这是问题(2) 的一个纯几何证明.

(3) 如果圆 γ，即与三个等圆内切的圆变为与它们外切的圆，而 M 是该圆上的任意一点，那么由上面的证明过程，显然问题(2) 仍然成立.

(4) 从圆 γ 的两个位置(内切、外切) 受到启发，不妨大胆猜想，当 M 是圆 γ 的同心圆上的任意一点时，那么问题(2) 的结论依然成立. 有兴趣的读者请尝试证明(或者否定) 它.

(5) 问题(2) 中讨论的正三角形的情况可以推广到正奇数边形 $2n+1(n\geqslant 1)$ 的情况，即：

$2n+1$ 个等圆与已知圆相切(同时内切或外切) 于它的内接正 $2n+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 的各顶点，从圆的劣弧 A_1A_{2n+1} 上任意一点 M 作 $2n+1$ 个圆的切线，设 L_i 为与已知圆相切于点 $A_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$ 的圆的切线之长，那么

$$\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^iL_i=0$$

(6) 进一步的推广是，是否成立

$$\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^iL_i^m=0$$

其中 m 是正奇数，如果成立的话，m 的最大值是什么？

2. 试证明：对于所有的自然数 $n>1$，有

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}<\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}<\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

证法 1 先叙述由杰出的苏联数学家、数论专家盖尔方德(Gelfand) 提供的最简解答.

一方面，把已知表达式的平方改写如下

$$P_n^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)2n}\cdot\frac{1}{2n}$$

因为对任意整数 $k>1$，有

$$\frac{(2k-1)^2}{(2k-2)2k}=\frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2-1}>1$$

那么，有

$$P_n^2>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}$$

故

$$P_n>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

另一方面，因为总成立

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}=\frac{(2k)^2-1}{(2k)^2}<1$$

那么，有

$$P_n^2=\frac{3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{2n-1}{(2n)^2}<\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2n}$$

故

$$P_n<\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

证法 2 一方面，同时考察已知表达式

$$P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

和

$$Q_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}$$

因为乘积 Q_n 中的每一个因子不大于 P_n 中相应的因子，则 $P_n>Q_n$，所以 $P_n^2>P_nQ_n=\frac{1}{4n}$，故 $P_n>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

另一方面，有

$$R_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot 1>P_n$$

所以 $P_n^2<P_nR_n=\frac{3}{8n}$，故 $P_n<\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

3. 试证明：任意分数 $\frac{m}{n}$，且 $0<\frac{m}{n}<1$，能表示成如下形式，即

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\cdots+\frac{1}{q_r}$$

其中 $0<q_1<q_2<\cdots<q_r$ 为整数，并且每个 $q_k(k=2,3,\cdots,r)$ 能被 q_{k-1} 整除.

证明 每个分数 $\frac{m}{n}$，其分子和分母同除以它们的最大公约数后，成为与其相等的简约分数. 例如，$\frac{288}{504}=\frac{4\cdot 72}{7\cdot 72}=\frac{4}{7}$. 以下我们仅考察这样的简约分数.

我们对 m 用归纳法证明题断. 对于 $m=1$ 它是显然的，分数 $\frac{m}{n}$ 本身已有所需的形式. 现在证明：如果题断对于分子小于 m 的所有的分数成立，那么它对于分子为 m 的分数成立. 设 $\frac{m}{n}$ 是这样的分数$(1<m<n)$. n 除以 m 带有余数，得到商 d_0-1 和余数 $m-k$，即

$$n=m(d_0-1)+(m-k)=md_0-k \tag{1}$$

其中 $d_0>1$，$0<k<m$. 把式(1) 改写成 $md_0=n+k$，或者

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{d_0}(1+\frac{k}{n}) \tag{2}$$

因为 $0<k<m$，分数 $\frac{k}{n}$ 能写成需要的形式，即

$$\frac{k}{n}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1d_2}+\cdots+\frac{1}{d_1d_2\cdots d_r} \tag{3}$$

其中 $d_1,d_2,\cdots,d_r$ 为某些大于 1 的自然数. 由式(2)(3)，得

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_0d_1}+\frac{1}{d_0d_1d_2}+\cdots+\frac{1}{d_0d_1d_2\cdots d_r}$$

分数 $\frac{m}{n}$ 表示成所需要的形式.

我们发现，从问题的证明过程不难找出把任何已知分数表示成形如式(3)的简单的算法 —— 规则. 现举一个例子. 设我们有分数 $\frac{5}{7}$，则

$$7=2\cdot 5-3,\frac{5}{7}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{7}\right)$$

$$7=3\cdot 3-2,\frac{3}{7}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{7}\right)$$

$$7=4\cdot 2-1,\frac{2}{7}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{7}\right)$$

这样一来,有

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{168}$$

当然还可找到把分数表示成式(3)形式的几种方法,例如

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

4. 下面是一些例子:k 个连续自然数的平方和等于紧接着的 $k-1$ 个连续自然数的平方和,即

$$3^2+4^2=5^2, 36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$$

$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$$

求包括所有这些情况的一般的公式.

解 我们来证明:对于每一个自然数 k 恰存在一个自然数 n,使得

$$\begin{aligned}&(n-k+1)^2+(n-k+2)^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\\&=(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(n+k-1)^2\end{aligned}\tag{1}$$

(请注意,等式的右边有 $k-1$ 项,而左边有 k 项). 等式(1)等价于下列式子

$$\begin{aligned}n^2=&[(n+1)^2-(n-k+1)^2]+[(n+2)^2-(n-k+2)^2]+\cdots+\\&[(n+k-1)^2-(n-1)^2]\end{aligned}\tag{2}$$

$$n^2=k(2n-k+2)+k(2n-k+4)+\cdots+k(2n+k-2)\tag{3}$$

$$n^2=2k(k-1)n\tag{4}$$

这样一来所谈的命题得证,等式(1)对于自然数 k 和 n 成立,当且仅当 $n=2k^2-2k$(在式(3)到式(4)的过渡中,我们利用了:等差数列 $k-1$ 项之和,即 $(2n-k+2)+(2n-k+4)+\cdots+(2n+k-2)=(k-1)\dfrac{(2n-k+2)(2n+k-2)}{2}=2(k-1)n$). 于是我们得到要求的公式. 例如,它能写成如下形式

$$\begin{aligned}&(2k^2-3k+1)^2+(2k^2-3k+2)^2+\cdots+(2k^2-2k)^2\\&=(2k^2-2k+1)^2+(2k^2-2k+2)^2+\cdots+(2k^2-k-1)^2\end{aligned}$$

其中 k 为任意的自然数. 题目开始时给出的例子,可以从它中取 k 等于 2,5 和 6 得到.

5. 试证明：每一个非负整数能够表示成$\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$的形式，这里 x 和 y 是非负整数，并且这样的表示是唯一的.

证明　记 $x+y$ 为 s 并把已知公式改写如下

$$n=\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}=\frac{s^2+s}{2}+x \tag{1}$$

条件：x 和 y 是整数，即 $x\geqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$ 等价于 x 和 s 是整数，$x\geqslant 0$，$s\geqslant x$，对于已知的 s，x 能够取的值为 $0,1,\cdots,s$；相应地，由公式(1)确定的 n 的取值为

$$\frac{s^2+s}{2},\frac{s^2+s}{2}+1,\cdots,\frac{s^2+s}{2}+s$$

这样，每一个 $s=0,1,2,\cdots$ 对应于非负整数 n 的 $s+1$ 个区间之一. 我们指出，与 s 对应的区间的最后一个数，刚好比与 $s+1$ 对应的区间的第一个数小 1，即有

$$\left(\frac{s^2+s}{2}+s+1\right)=\frac{(s+1)^2+(s+1)}{2}$$

所以这些区间将包含所有的非负整数 n，并且每一个 n 仅仅落到一个区间，就是说，它将对应于恰好一对 s 和 x 的值(图 4).

问题解决了. 我们证明了，公式(1)允许对具有非负整数坐标数 $n=0,1,2,\cdots$ 的所有的点(x,y)编号，图 5 中显示了这些号码按次序是怎样分布的.

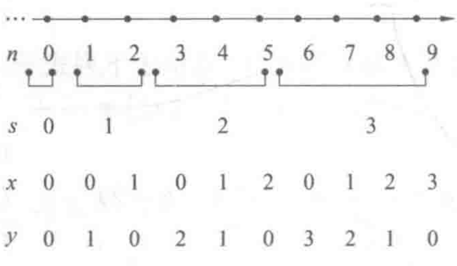


图 4

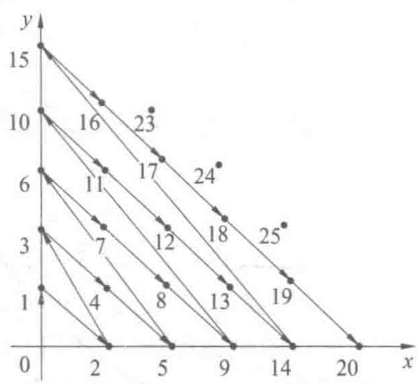


图 5

一个读者在自己的解答中导出了类似于(1)的公式，它容许对不是两个，而是 k 个非负整数$(x_1,x_2,\cdots,x_k)$的组对进行编号，即

$$n=C_{s_k+k-1}^{k}+C_{s_{k-1}+k-2}^{k-1}+\cdots+C_{s_2+1}^{2}+C_{s_1}^{1}$$

这里

$$s_i=x_1+x_2+\cdots+x_i$$

$$C_p^q=\frac{p(p-1)\cdot\cdots\cdot(p-q+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot q}$$

例如，对于 $k=3$ 得到公式

$$n=\frac{s_3(s_3+1)(s_3+2)}{6}+\frac{s_2(s_2+1)}{2}+s_1$$

$$=\frac{1}{6}[(x_1+x_2+x_3)^3+3(x_1+x_2+x_3)^2+3(x_1+x_2)^2+11x_1+5x_2+2x_3]$$

请尝试在另一个方向上推广本题，求出公式，它确立平面上所有具有整数坐标的点 (x,y) 与所有整数（或者非负整数）n 之间的对应关系. 这样的公式能否写成像公式 (1) 那样的二次多项式，即

$$n=f(x,y)$$

6. 在正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 内部任取一点 P，从顶点 A_1 作直线 A_2P 的垂线，从顶点 A_2 作直线 A_3P 的垂线，从 A_3 作直线 A_4P 的垂线，从 A_4 作直线 A_1P 的垂线. 试证明：所有四条垂线（或者它们的延长线）相交于一点.

证明　把正方形（图 6）绕着它的中心旋转 $90°$，使得 A_2 变成 A_1，A_3 变成 A_2，A_4 变成 A_3，A_1 变成 A_4，这时直线 A_2P，A_3P，A_4P，A_1P 变成相应的垂线（要知道它旋转 $90°$），所以显然，这四条直线通过同一个点 P'，而它是由点 P 经过这个旋转而得到的.

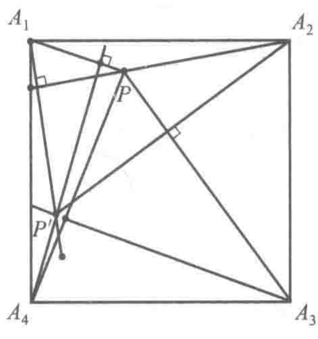


图 6

7. 试证明：如果 $x_1<x_2<x_3<\cdots$ 为自然数，那么

$$\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3}+\cdots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2} \qquad (*)$$

证明　首先假设 $x_n \leqslant n^2$. 这时，有

$$\frac{\sqrt{x_i - x_{i-1}}}{x_i} \leqslant \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} = \underbrace{\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_i} + \cdots + \frac{1}{x_i}}_{x_i - x_{i-1}\text{个加式}}$$

最后一个和式显然不超过包含下面加式的和，即

$$\frac{1}{x_{i-1}+1} + \frac{1}{x_{i-1}+2} + \cdots + \frac{1}{x_i - 1} + \frac{1}{x_i}$$

但是这时，有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i - x_{i-1}}}{x_i} < \frac{1}{x_0+1} + \cdots + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1+1} + \cdots + \frac{1}{x_i} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$
$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

现在假设，在数 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有大于 n^2 者. 如果 $x_i > n^2$，那么

$$\frac{\sqrt{x_i - x_{i-1}}}{x_i} < \frac{\sqrt{x_i}}{x_i} = \frac{1}{\sqrt{x_i}} < \frac{1}{n}$$

这样，每一个分母大于 n^2 的加式小于 $\frac{1}{n}$. 所以所有这样的加式（它们不超过 n 个）之和小于 1. 但是剩下的加式之和，如上面已经证明的那样，即小于 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n^2}$，这就完成了不等式（∗）的证明.

8. 试证明

$$\tan 1^\circ + \tan 5^\circ + \tan 9^\circ + \cdots + \tan 173^\circ + \tan 177^\circ$$

这 45 个数之和等于 45.

证明　我们来证明

$$\cot 1^\circ + \cot 5^\circ + \cot 9^\circ + \cdots + \cot 173^\circ + \cot 177^\circ = 45$$

其实这两个和式是一样的，这是因为

$$\tan 1^\circ = \cot 89^\circ, \tan 5^\circ = \cot 85^\circ, \cdots, \tan 89^\circ = \cot 1^\circ$$
$$\tan 93^\circ = \cot 177^\circ, \tan 97^\circ = \cot 173^\circ, \cdots, \tan 177^\circ = \cot 93^\circ$$

不难用归纳法证明

$$\cot nx = \frac{p_n(\cot x)}{q_n(\cot x)}$$

这里 $p_n(y) = y^n - \frac{n(n-1)}{2} y^{n-2} + \cdots$ 和 $q_n(y) = ny^{n-1} - \cdots$ 是 y 的多项式.

(对于 $\tan nx$ 可以写出类似的公式,但它的形式对于偶的和奇的 n 有所不同,所以我们认为处理余切比较好.事实上,多项式 $p_n(y)$ 和 $q_n(y)$ 的系数是二项式系数,即

$$p_n(y)=y^n-C_n^2y^{n-2}+C_n^4y^{n-4}-\cdots$$
$$q_n(y)=C_n^1y^{n-1}-C_n^3y^{n-3}+C_n^5y^{n-5}-\cdots$$

不过我们仅用得到多项式 q_n 第一项的系数)

因为对于每一个角 $1°+4°k$,这里 $k=0,1,2,\cdots,44$,有

$$\tan 45(1°+4°k)=\cot(45°+180°k)=1$$

那么

$$\frac{p_{45}(\cot(1°+4°k))}{q_{45}(\cot(1°+4°k))}=1$$

也就是说所有的数 $y=\cot(1°+4°k)$ 是方程

$$p_{45}(y)-q_{45}(y)=0 \qquad (*)$$

的根.项 y^{44} 的系数对于我们来说是重要的,所以改写式(*)为

$$y^{45}-45y^{44}+\cdots=0 \qquad (**)$$

现在剩下的是要指出,所有 45 个数 $\cot(1°+4°k)$ 是各不相同的(因为 $\cot 1°>\cot 5°>\cdots>\cot 177°$),因而它是方程(*)所有不同的 45 个根,由韦达定理知,它们的和等于 45.

注 1 应用恒等式

$$\tan\alpha+\tan(\alpha+60°)+\tan(\alpha+120°)=3\tan 3\alpha \qquad (***)$$

15 次,其中 $\alpha=1°+4°k(k=0,1,2,\cdots,14)$.把 15 个等式相加,并且再次应用式(***),把原来的和变成这样

$$9(\tan 9°+\tan 81°-\tan 63°-\tan 27°)+9$$

此后,只要证明圆括号中的值等于 4 即可.

注 2 可知

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{44}\tan(1°+4°k)&=\sum_{k=1}^{45}\tan(45°+4°k)\\&=\sum_{k=1}^{45}\frac{1+\tan 4°k}{1-\tan 4°k}\\&=45+\sum_{k=1}^{45}\tan 8°k+\sum_{k=1}^{45}\tan 4°k\tan 8°k\end{aligned} \qquad (****)$$

然后证明

$$\sum_{k=1}^{45}\tan 4°k=0,\ \sum_{k=1}^{45}\tan 8°k=0$$

$$\sum_{j,k=1,j\neq k}^{45} \tan 4^{\circ}k \tan 8^{\circ}j = 0$$

由此得知,式(＊＊＊＊)的两个和式都等于零.

9. 试证明:对于每一个自然数 $n>1$ 成立恒等式

$$\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=c_n \sin nx$$

这里 c_n 为某个数(与 n 有关的),求 c_n.

证明 我们先来证明一个引理.

引理 $\sin nx=\sin x\cdot A_n(\cos x)$,这里 $A_n(x)$ 为某个 $n-1$ 次多项式,其首项系数是 2^{n-1};$\cos nx=\cos x\cdot B_n(\cos x)$,这里 $B_n(x)$ 为某个 n 次多项式,其首项系数是 2^{n-1}.

显然,当 $n=1$ 时,引理为真.设它对于 $n=k$ 成立.这时,有

$$\begin{aligned}\sin(k+1)x&=\sin x\cdot\cos kx+\cos x\cdot\sin kx\\&=\sin x(B_k(\cos x)+\cos x\cdot A_k(\cos x))\\\cos(k+1)x&=\cos x\cdot\cos kx-\sin x\cdot\sin kx\\&=\cos x\cdot B_k(\cos x)+(\cos^2 x-1)A_k(\cos x)\end{aligned}$$

所以显然,$A_{k+1}(x)=B_k(x)+xA_k(x)$ 和 $B_{k+1}(x)=xB_k(x)+(x^2-1)A_k(x)$ 为多项式,其首项系数等于多项式 $A_k(x)$ 和 $B_k(x)$ 的首项系数之和,这就是说,首项系数等于 $2^{k-1}+2^{k-1}=2^k$.引理证毕.

令 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\sin\left(x+\frac{\pi(n-1)}{n}\right)$.把形如 $\sin(x+\frac{\pi i}{n})$ 和 $\sin\left(x+\frac{\pi(n-i)}{n}\right)$(这里 $0<i<\frac{\pi}{2}$)的项,两两分成一组.如果 n 是偶数,那么在乘积中还剩下一项,即

$$\sin\left(x+\frac{\frac{n}{2}\pi}{n}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$$

把两两乘积作变换,有

$$\begin{aligned}&\sin\left(x+\frac{\pi i}{n}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi(n-i)}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-\cos(2x+\pi)+\cos\left(\frac{2\pi i}{n}-\pi\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi i}{n}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cos^2 x-1-\cos\frac{2\pi i}{n}\right)=\cos^2 x-d_i$$

这里 d_i 为某个常数.

这样一来，$f(x)=D_n(\cos x)$，这里 $D_n(x)$ 为某个 $n-1$ 次首 1 多项式.

我们剩下要证明，$A_n(x)=2^{n-1}D_n(x)$（特别地，由此得知，题设条件中的常数 c_n 等于$\frac{1}{2^{n-1}}$）.

为此我们利用定理：k 次多项式有不多于 k 个根.（下面我们将要提到怎样来证明它）

考察多项式 $F(x)=A_n(x)-2^{n-1}D_n(x)$. 它的次数小于 $n-1$，这是因为多项式 $A_n(x)$ 中的项 x^{n-1} 的系数等于 $2^{n-1}D_n(x)$ 中项 x^{n-1} 的系数. 这意味着，或者 $F(x)$ 恒等于 0，或者 $F(x)$ 有少于 $n-1$ 个根.

考察点 $x_1=-\frac{\pi}{n}, x_2=-\frac{2\pi}{n}, \cdots, x_{n-1}=-\frac{\pi(n-1)}{n}$，并且设 $t_i=\cos x_i$. 显然 $f(x_i)=0$，故 $D_n(t_i)=0$. 此外，$\sin(n\cdot x_i)=0$ 而 $\sin x_i\neq 0$. 这意味着，$A_n(\cos x_i)=A_n(t_i)=0$. 我们发现，所有的点 t_i 各不相同，这是因为 $\cos x$ 在区间 $[-\pi,0]$ 上是递增的.

这样一来，多项式 $F(x)$ 在 $n-1$ 个点 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 变为零，这意味着，$F(x)$ 恒等于零. 这样，$A_n=2^{n-1}D_n$，亦即

$$\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\sin\left(x+\frac{\pi(n-1)}{n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin nx$$

现在我们来证明，k 次多项式有不多于 k 个根. 对于 $k=1$ 这是显然的. 设命题当 $k=l-1$ 时成立，并且设 $p(t)=a_lt^l+a_{l-1}t^{l-1}+\cdots+a_1t+a_0$ 为 l 次多项式（$a_l\neq 0$）. 设 α 为多项式 p 的根（如果 p 没有根，那么一切都已证完），$p(\alpha)=a_l\alpha^l+\cdots+a_0=0$. 所以

$$p(t)=p(t)-p(\alpha)=a_l(t^l-\alpha^l)+a_{l-1}(t^{l-1}-\alpha^{l-1})+\cdots+a_1(t-\alpha)$$

容易验证

$$t^i-\alpha^i=(t-\alpha)(t^{i-1}+\alpha t^{i-2}+\alpha^2t^{i-3}+\cdots+\alpha^{i-2}t+\alpha^{i-1})$$

所以

$$\begin{aligned}p(t)&=(t-\alpha)[a_l(t^{l-1}+\cdots+\alpha^{l-1})+a_{l-1}(t^{l-2}+\cdots+\alpha^{l-2})+\cdots+a_1]\\&=(t-\alpha)H(t)\end{aligned}$$

这里 $H(t)$ 为某个 $l-1$ 次多项式.

由归纳假设知，$H(t)$ 有不多于 $l-1$ 个根. 这意味着，p 有不多于 l 个根（α 和 $H(t)$ 的根）.

我们的命题对于所有的 k 成立.

10. 数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$，定义：$x_0=1, x_1=\lambda$，对于任意 $n>1$，有

$$(\alpha+\beta)^n x_n=\alpha^n x_n x_0+\alpha^{n-1}\beta x_{n-1}x_1+\alpha^{n-2}\beta^2 x_{n-2}x_2+\cdots+\beta^n x_n x_0$$

这里 λ, α, β 为已知的正数. 求 x_n 并且说明，对于怎样的 n 值 x_n 最大.

解 对于 $n>1$ 的前几项的值（利用条件 $x_0=1$），我们写出确定 x_n 的等式，即

$$[(\alpha+\beta)^2-\alpha^2-\beta^2]x_2=\alpha\beta x_1^2$$

$$[(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3]x_3=\alpha^2\beta x_2 x_1+\alpha\beta^2 x_1 x_2$$

$$[(\alpha+\beta)^4-\alpha^4-\beta^4]x_4=\alpha^3\beta x_3 x_1+\alpha^2\beta^2 x_2^2+\alpha\beta^3 x_1 x_3$$

由此得知（利用条件 $x_1=\lambda$）

$$x_2=\frac{\lambda^2}{2}, x_3=\frac{\lambda^3}{2\cdot 3}, x_4=\frac{\lambda^4}{2\cdot 3\cdot 4}$$

自然推测

$$x_n=\frac{\lambda^n}{n!}$$

这里 $n!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$. 我们用归纳法证明，它事实上对于所有的 n 成立（如果像往常那样记 $0!=1!=1$，那么公式 $x_n=\frac{\lambda^n}{n!}$ 对 $n=0$ 和 $n=1$ 也成立）. 我们能假定，对于所有的 $k\leqslant n-1$，有 $x_k=\frac{\lambda^k}{k!}$. 这时，由等式

$$\begin{aligned}[(\alpha+\beta)^n-\alpha^n-\beta^n]x_n&=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{n-k}\beta^k x_{n-k}x_k\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha^{n-k}\beta^k\lambda^{n-k}\lambda^k}{(n-k)!\ k!}\\&=\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k\alpha^{n-k}\beta^k\\&=[(\alpha+\beta)^n-\alpha^n-\beta^n]\frac{\lambda^n}{n!}\end{aligned}$$

得到 $x_n=\frac{\lambda^n}{n!}$，因为 $\alpha>0, \beta>0$ 以及左右两边的公因式当 $n>1$ 时是正的.

我们来阐明，对怎样的 n 值 x_n 最大. 不等式

$$\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\leqslant\frac{\lambda^n}{n!}$$

等价于不等式 $n\leqslant\lambda$. 这样一来，当 $n-1$ 过渡到 n 时，如果 $n<\lambda$，x_n 递增，如果 $n>\lambda$，x_n 递减. 由此，我们得到问题的回答，当 $n=[\lambda]$（$[\lambda]$ 为不超过 λ 的最大整数），x_n 取到最大值；如果 λ 为整数，那么 $x_{[\lambda]-1}=x_{[\lambda]}$ 为数列 x_n 的两个最大

值.

图 7 对于 $\lambda=2.5$ 描述了数列 $n\to x_n$ 的情形.

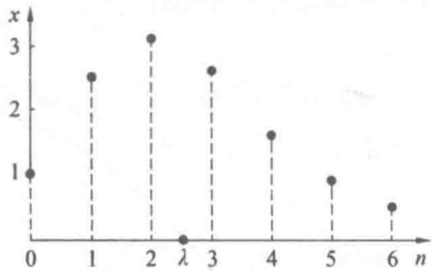


图 7

11. 证明恒等式

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\cdots+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)}$$

证明 我们用归纳法证明这个恒等式. 当 $n=1$ 时它成立,这是因为 $C_1^0=C_1^1=1!=1$,则

$$\frac{C_1^0}{x}-\frac{C_1^1}{x+1}=\frac{1!}{x(x+1)}$$

假设,成立恒等式

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\frac{C_n^2}{x+2}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{C_n^{n-1}}{x+n-1}+(-1)^n\cdot\frac{C_n^n}{x+n}$$

$$=\frac{n!}{x(x+1)\cdot\cdots\cdot(x+n)} \tag{1}$$

在式(1)中用 $x+1$ 代替 x,得到恒等式

$$\frac{C_n^0}{x+1}-\frac{C_n^1}{x+2}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{C_n^{n-1}}{x+n}+(-1)^n\cdot\frac{C_n^n}{x+n+1}$$

$$=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n+1)} \tag{2}$$

从式(1)逐项减去式(2),并且对于每个 $k=0,1,2,\cdots,n-1$,利用

$$C_n^0=C_n^n=C_{n+1}^0=C_{n+1}^{n+1}=1$$

$$C_n^k=C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$$

得到

$$\frac{C_{n+1}^0}{x}-\frac{C_{n+1}^1}{x+1}+\frac{C_{n+1}^2}{x+2}-\cdots+(-1)^n\frac{C_{n+1}^n}{x+n}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{C_{n+1}^{n+1}}{x+n+1}$$

$$=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n+1}\right)$$