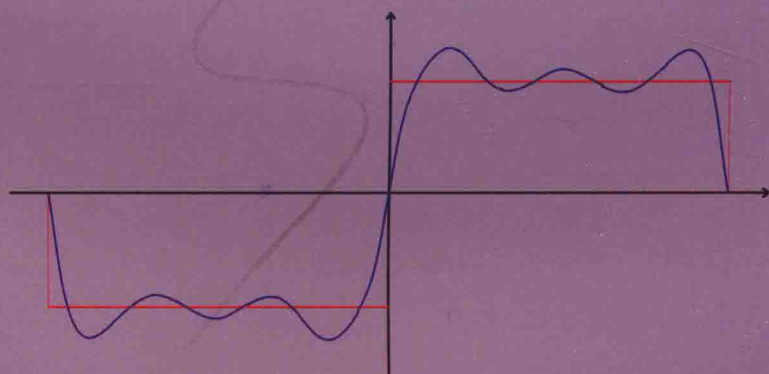


# 数学分析讲义

◎ 张福保 薛星美 潮小李 编 (第三册)



傅里叶变换 · 傅里叶  
Fourier

 科学出版社

# 数学分析讲义

(第三册)

张福保 薛星美 潮小李 编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是作者在东南大学连续 20 多年讲授“数学分析”课程的基础上写成的, 并已连续试用近 10 年. 本书取名为“讲义”, 最大特点就是——一切从读者的角度去讲解, 既注重数学思想的阐述和严格的逻辑推导, 又突出实际背景与几何直观的描述, 并适当穿插了一些数学文化的介绍. 在编排上尽量体现先易后难和分步走的原则. 习题分类安排, 即分为 A、B、C 三类. 其中, A 类是基本题, B 类是提高题, C 类是讨论题. 本书对讨论题给予更多关注, 目的在于帮助学生厘清概念, 增强研学与创新能力.

本书分为三册, 第一册包括极限、连续、导数及其逆运算(不定积分), 第二册包括实数理论续(含上极限、下极限、欧氏空间)、定积分及多元微积分, 第三册包括级数与反常积分(含参变量积分)等.

本书可作为数学、统计学等专业的数学分析教材与参考书.

### 图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 第三册/张福保, 薛星美, 潮小李编. —北京: 科学出版社, 2019.6

ISBN 978-7-03-061609-8

I. ①数… II. ①张… ②薛… ③潮… III. ①数学分析 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 114489 号

责任编辑: 胡 凯 许 蕾 曾佳佳 / 责任校对: 杨聪敏  
责任印制: 师艳茹 / 封面设计: 许 瑞

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

石家庄继文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2019 年 6 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2019 年 6 月第一次印刷 印张: 16 1/2

字数: 390 000

定价: 69.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

## 致 读 者

数学,始终伴随着人类文明的发祥与发展.从远古到公元前6世纪,由于计数和土地丈量的需要,人类开始认识自然数和简单的几何图形.建于约公元前2600年的埃及法老胡夫金字塔,不仅是建筑史上的奇迹,其数学方面的成就也很让人称奇.例如,它的正方形塔基每边长约230m,其正方程度与水平程度的平均误差不超过万分之一.这个阶段只是数学的萌芽时期.公元前6世纪Pythagoras(毕达哥拉斯)学派与“万物皆数论”的出现,标志着初等数学时期,或称常量数学时期的到来.其间出现了Euclid(欧几里得)的《几何原本》、Archimedes(阿基米德)求面积与体积的方法、Apollonius(阿波罗尼奥斯)的《圆锥曲线论》、Ptolemaeus(托勒密)的三角学以及Diophantus(丢番图)的不定方程等,逐渐形成了初等数学的主要分支和现在中学数学的主要内容.17~18世纪,Newton(牛顿)与Leibniz(莱布尼茨)等的微积分(数学分析的主要内容)的发明与发展,标志着数学发展进入了近代变量数学时期.而19世纪以来,则可称为现代数学时期.

### 1. 数学代表了人类文明的理性精神

任何一种值得一提的文明——精神财富的集中体现,都是要探究真理的,而其中最基本也是最伟大的真理是有关宇宙与人类自身的真理.地球、太阳系的谜团,如太阳的升与落、月亮的圆与缺、奇妙的日蚀与月蚀等,以及人类的起源、人生的目的与人类的归宿等,这是我们的先祖们曾经迫切想搞清楚的问题.在人类文化刚开始萌芽的时期,人类刚从蒙昧中觉醒,迷信和原始宗教还控制着人类的精神世界,直到希腊文化的出现.古希腊人敢于正视自然、摒弃传统观念.他们之所以能如此,是因为他们发现了人类最伟大的发现之一——推理,知道了人类是有智慧、有思维、能发现真理的,而不是只能听从“神”的旨意的.而他们的思维与推理的成功,数学可谓功不可没.可以说在这个时期,数学帮助人类从宗教和迷信的束缚下解放出来,同时也发展了数学自身.这个时期数学成就的顶峰就是Pythagoras学派的“万物皆数论”与Euclid的《几何原本》.

进入中世纪后,在人类探索宇宙奥秘的过程中形成了“地心说”和“日心说”这两种对立的观点.为了捍卫“日心说”,Kopernik(哥白尼)、Kepler(开普勒)、Galileo(伽利略)等人前赴后继,逐步形成了Kepler三大定律和Galileo惯性定律、自由落体运动等物理定律以及重事实、重逻辑的近代科学.Kepler指出了行星的运动规律,可是为什么行星会绕太阳转呢?支持其运动的动力来自何方?天上的运动与地上的Galileo所描述的运动是内在统一的吗?当时的人们无法回答这些问题,只能期待时代伟人的出现.“自然界和自然规律隐藏在黑暗中.上帝说,让Newton出生吧!于是一切都是光明.”(英国文豪Pope(蒲伯)).其实,在Newton发明微积分之前,还有Descartes(笛卡儿)发明的坐标系与解析几何、业余数学家之王Fermat(费马)的一系列工作以及Newton的“死敌”Hooke(胡克)等一大批伟人的贡献.Newton自己在和Hooke的名利之争中也不得不承认,“如果说我能看得更远一些,那是因为我站在巨人的肩膀上”(姑且不论他这里所指的巨人是谁).而

发现哈雷彗星的回归与太阳系的第八颗行星海王星,更是数学,特别是微积分作为人类文明理性精神的代表的最经典的诠释。[参见《数学与文化》(齐民友,2008)]

Engels (恩格斯) 在其《自然辩证法》中就曾经说过:“在一切理论成果中,未必再有什么像 17 世纪后半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。”这也足以看出微积分在人类理性文明中的至高无上的历史地位。

## 2. 一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到真正完善的地步

按照法国的国际工人运动活动家、工人党创始人之一的 Lafargue (拉法格) 在《忆马克思》一书中的记载,Marx (马克思) 在距今一百多年以前就论断,一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到真正完善的地步。现在,人们已经普遍接受这样的观点:“哲学从一门学科中退出,意味着这门学科的建立;而数学进入一门学科,就意味着这门学科的成熟。”

不仅如此,更进一步,从 20 世纪 80 年代开始,人们已经认识到,高技术本质上是一种数学技术。这一观点是美国前总统尼克松的科学顾问 David 于 1984 年 1 月 25 日在美国数学会 (American Mathematical Society, AMS) 和美国数学协会 (Mathematical Association of America, MAA) 联合年会上正式提出的。其实著名数学家华罗庚在更早的一次学术会议上也提出过这样的观点。从两弹一星到核武器试验,再到太空技术,都离不开数学的现代化。陈省身与杨振宁的数理合作更是现代科学相互渗透、相互依赖的典范。

现代物理学家 Hawking (霍金) 说过“有人告诉我说我载入书中的每个等式都会让销量减半。然而,我还是把一个等式写进书中——爱因斯坦最有名的那个:  $E = mc^2$ 。但愿这不会吓跑我一半的潜在读者。”这表明现代自然科学已经离不开数学。而在社会科学方面,以往是没有数学的地位的,现在情况发生了根本变化。经济、金融甚至政治,都极大地数学化。据统计,近 10 年来,诺贝尔经济学奖获得者有一半以上有数学学位或履历。

## 3. 数学分析课程的重要性

数学分析 (mathematical analysis), 又称高等微积分 (advanced calculus), 是变量数学的核心,同时它也是现代数学的三大分支——分析、代数和几何中的分析学的基础。数学分析的研究对象是一般的函数,研究手段主要是极限。最成功之处在于解决初等数学中无法解决的诸如一般曲线的切线问题和不规则图形(如曲边梯形)的面积问题等,因此在天文、力学、几何以及经济、金融等方面有着广泛的应用。

从学科分类来看,数学、统计学等都是一级学科,在数学一级学科下分为五个二级学科:基础数学,计算数学,概率论与数理统计,应用数学,运筹与控制论。目前,数学学科的研究生专业即按此分类。而本科数学与统计学科则包含三个专业,分别是数学与应用数学专业、信息与计算科学专业以及统计学专业。

数学分析是这三个专业的大类学科课程与核心课程,它对应于非数学专业的高等数学课程(广义的高等数学则是指除初等数学以外的所有现代数学),被公认为是这三个专业最重要的基础课程,位于传统的“三高”(高等微积分、高等代数、高等几何(解析几何))之首,学分数占大学本科四年总学分的十分之一。它不仅是数学与统计学专业学生进校后首先面临的一门重要课程,而且整个大学本科阶段的几乎所有的分析类课程在本质上都

可以看作是它的延伸和应用. 可以这样说, 其重要性无论怎么强调都不过分.

#### 4. 如何学好数学分析

数学分析这门课程内容丰富、逻辑严密、思想方法灵活, 且应用领域又十分广泛, 所以要想学好它, 必须深刻理解其基本概念的思想内涵, 养成善于思考、认真钻研、灵活应用等学习习惯. 首先, 必须认真钻研教材, 并用心研读相当数量的参考书, 其目的是弄清楚主要概念和定理的背景、含义、本质及作用, 避免死记硬背. 常见的参考书有《数学分析》(华东师范大学数学系, 2001)、《数学分析》(陈纪修等, 2004)、《数学分析教程》(李忠和方丽萍, 2008), 起点更高的有《数学分析》(卓里奇, 2006)、*Principles of Mathematical Analysis* (Rudin, 1976) 等. 其次, 为了加深理解, 几何直观是很好的帮手. 但是不能以直观替代严密推导. 思考问题时应避免想当然, 避免以特殊代替一般. 每一步推理或判断都要合乎逻辑、有根有据. 再次, 要有相当强度的基础训练. 训练的目的不仅在于模仿和记忆, 更在于加深理解, 掌握方法. 当然光理解还不够, 要在理解的基础上做到熟练. 学习指导书或习题课教程也是值得大家认真读的, 例如, 《数学分析学习指导书》(吴良森等, 2004)、《数学分析习题课讲义》(谢惠民等, 2003).

数学分析是数学学院学生最先学习的课程, 对尽快适应大学阶段的学习显得很重要. 只要大家按照上面的建议, 并根据自己的实际情况, 多思考、多讨论、多总结, 举一反三, 就一定能练就扎实的分析功底, 并为后继课程的学习打下坚实基础.

#### 5. 关于本书

本书是根据我 20 多年连续讲授“数学分析”课程的实践, 结合泛函分析的教学与科研工作的体会写成的, 并且已经连续使用近 10 年. 本书取名为“讲义”, 其特点就是一切为读者所想, 特别适合初学者. 本书既注重数学思想和严格的逻辑推导, 又突出实际背景与几何直观; 写作语言既严谨又朴实, 并适当穿插数学文化, 提高学生学习兴趣; 尽量体现先易后难的原则, 例如, 实数连续性理论的安排、可积性的讨论等都分步走, 便于学生接受; 习题的安排分类分层次, 即分为 A、B、C 三类, 其中, A 类是基本题, B 类是提高题, C 类是讨论题. 本书对讨论题给予更多关注, 目的在于帮助学生厘清概念, 这往往是学生的软肋, 同时也能增强研学与创新能力.

按照现在通行的讲授三个学期的现状, 教材分为三册. 但本书的结构体系进行了较大的调整: 第一册的内容包括极限、连续、导数及其逆运算(不定积分), 第二册的内容包括实数理论续(含上极限与下极限、欧氏空间)、定积分及多元微积分, 第三册的内容包括级数与反常积分(含参变量积分)等.

为了尽快接触到微积分的主要内容, 体会到微积分的巨大成功, 同时又照顾到读者学习的便利, 第一册选择尽可能少的实数理论做基础即展开极限与连续以及微分学的讨论, 而把比较复杂的证明(包括实数等价命题和上、下极限的讨论)放到第二册开头, 并把欧氏空间理论也放到开头这一章, 作为实数连续性的自然推广. 这样的结构对于为学生打好坚实的数学基础也很有帮助, 也为接下去进行严格的可积性推导奠定基础. 注意到反常积分, 包括反常重积分, 和级数有较多的相似性, 例如都是有限情况取极限以及目标相同: 重点研究收敛性, 判别法也类似等, 因此将这两者组合在同一册里也是恰当的, 也将给读

者的学习带来极大便利.

**致谢:** 本教材得到了东南大学数学学院与教务处的大力支持. 薛星美教授在多次使用本教材的基础上对微分学部分进行了完善与补充, 潮小李教授对级数与反常积分部分进行了完善与补充, 罗庆来教授、黄骏教授、徐君祥教授、孙志忠教授、江其保副教授、闫亮副教授等先后对教材提出过宝贵意见, 在此一并表示衷心的感谢!

尽管本书从编写到出版, 经历了 10 年, 其间一直在修改, 但囿于个人的学识与能力, 一定还有不少疏漏和不足, 恳请专家与读者提出宝贵意见, 以便今后修订.

张福保

2019 年 1 月于东南大学九龙湖校区



# 目 录

致读者

第 12 章 曲线积分、曲面积分与场论初步 .....	1
§12.1 第一型曲线积分与第一型曲面积分 .....	1
§12.1.1 第一型曲线积分 .....	1
§12.1.2 第一型曲面积分 .....	6
§12.2 第二型曲线积分与第二型曲面积分 .....	10
§12.2.1 第二型曲线积分 .....	10
§12.2.2 第二型曲面积分 .....	15
§12.3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式 .....	24
§12.3.1 Green 公式 .....	24
§12.3.2 曲线积分与路径无关的条件 .....	29
§12.3.3 Gauss 公式 .....	33
§12.3.4 Stokes 公式 .....	36
§12.4 场论初步 .....	46
§12.4.1 场的概念 .....	46
§12.4.2 数量场的等值面和梯度场 .....	47
§12.4.3 向量场的通量与散度 .....	48
§12.4.4 向量场的环量与旋度 .....	50
§12.4.5 管量场与有势场 .....	52
§12.4.6 Hamilton 算子 .....	53
第 13 章 反常积分 .....	56
§13.1 反常积分的概念和计算 .....	56
§13.1.1 反常积分的概念 .....	56
§13.1.2 反常积分的性质与计算 .....	61
§13.1.3 反常积分的 Cauchy 主值 .....	64
§13.2 反常积分的收敛判别法 .....	67
§13.2.1 无穷区间上的反常积分的收敛判别法 .....	67
§13.2.2 瑕积分的收敛判别法 .....	75
§13.3 反常重积分 .....	80
§13.3.1 无穷反常重积分 .....	80
§13.3.2 无界函数的反常二重积分 .....	89
第 14 章 含参变量积分 .....	93
§14.1 含参变量的常义积分 .....	93



§14.1.1	含参变量积分的概念	93
§14.1.2	含参变量的常义积分所定义的函数的分析性质	94
§14.2	含参变量的反常积分	101
§14.2.1	含参变量的反常积分的一致收敛性	102
§14.2.2	含参变量反常积分一致收敛性的判别	103
§14.2.3	一致收敛积分的分析性质	109
§14.3	Euler 积分	117
§14.3.1	Beta 函数	117
§14.3.2	Gamma 函数	119
§14.3.3	Beta 函数与 Gamma 函数的关系	122
§14.3.4	Euler 公式的拓展: Legendre 公式、余元公式和 Stirling 公式	124
<b>第 15 章</b>	<b>数项级数</b>	<b>127</b>
§15.1	数项级数的收敛性	128
§15.1.1	数项级数的概念	128
§15.1.2	级数 Cauchy 收敛原理	129
§15.2	正项级数	133
§15.2.1	Cauchy 判别法 (或根式判别法 (root test))	133
§15.2.2	D'Alembert 判别法 (或比式判别法 (ratio test))	134
§15.2.3	积分判别法 (integral test)	135
§15.2.4	Raabe 判别法	138
§15.2.5	其他一些判别法	139
§15.3	任意项级数	141
§15.3.1	交错级数与 Leibniz 判别法	141
§15.3.2	Abel 判别法与 Dirichlet 判别法	143
§15.3.3	级数的绝对收敛与条件收敛	146
§15.3.4	级数的重排	147
§15.3.5	级数的乘法	151
§15.4	无穷乘积	156
§15.4.1	无穷乘积定义	156
§15.4.2	无穷乘积的性质	159
§15.4.3	无穷乘积与无穷级数的转化	160
§15.4.4	绝对收敛	161
<b>第 16 章</b>	<b>函数项级数</b>	<b>164</b>
§16.1	点态收敛和一致收敛	164
§16.1.1	点态收敛与收敛域	164
§16.1.2	函数项级数与函数列的基本问题	165
§16.1.3	一致收敛的定义	167
§16.1.4	函数列一致收敛与非一致收敛的判别	168

§16.2 级数一致收敛性的判别与一致收敛级数的性质	175
§16.2.1 函数项级数一致收敛性的判别	175
§16.2.2 一致收敛的函数列与函数项级数的性质	180
§16.3 幂级数	188
§16.3.1 幂级数的收敛域	189
§16.3.2 幂级数的性质	192
§16.3.3 Taylor 级数与余项公式	195
§16.3.4 初等函数的幂级数展开	199
<b>第 17 章 Fourier 级数</b>	<b>208</b>
§17.1 函数的 Fourier 级数展开	209
§17.1.1 平方可积函数空间与正交函数系	209
§17.1.2 周期为 $2\pi$ 的函数的 Fourier 展开	211
§17.1.3 正弦级数和余弦级数	214
§17.1.4 任意周期的函数的 Fourier 展开	217
§17.2 Fourier 级数的收敛判别法	218
§17.2.1 Dirichlet 积分	219
§17.2.2 Riemann 引理及其推论	220
§17.2.3 Fourier 级数的收敛判别法	223
§17.3 Fourier 级数的性质	228
§17.3.1 Fourier 级数的分析性质	228
§17.3.2 Fourier 级数的平方逼近性质	230
§17.4 Fourier 变换	234
§17.4.1 Fourier 积分	234
§17.4.2 Fourier 变换及其逆变换	237
§17.4.3 Fourier 变换的性质	239
<b>参考文献</b>	<b>243</b>
<b>附录 数学分析 III 试卷</b>	<b>244</b>
<b>索引</b>	<b>251</b>

## 第 12 章 曲线积分、曲面积分与场论初步

本书的第三册主要讨论积分(包括曲线、曲面积分、反常(重)积分、含参变量积分)和级数(包括函数项级数). 上一章, 我们已经研究过了重积分, 包括二重积分、三重积分以及一般的  $n$  重积分, 它们都是定积分的推广, 即将积分范围从区间分别推广到了平面区域、三维区域以及一般的  $n$  维欧氏空间中的区域. 事实上, 积分范围还可以推广到更一般的所谓流形, 即包括曲线段与曲面片. 本章要研究的积分的范围正是这样的曲线与曲面, 这样的积分分别称之为线积分(line integral)与面积分(surface integral). 线积分与面积分又都分为第一型与第二型, 第一型积分是关于曲线的弧长与面积的积分, 与曲线与曲面的定向无关, 第二型则是关于坐标的积分, 与曲线与曲面的定向有关, 它们也都有很强的物理背景. 进一步, 我们还将研究这些积分之间的相互关系, 并将得到类似于微积分基本定理那样的深刻结果, 分别称作 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式. 它们构成了曲线积分与曲面积分的核心内容. 本章最后一部分内容是场论, 它是多元函数积分学在物理上的完美应用.

### §12.1 第一型曲线积分与第一型曲面积分

#### §12.1.1 第一型曲线积分

##### 1. 背景: 求曲线形细长构件的质量

在定积分中, 我们会计算直线状物体的质量, 例如, (笔直的)金属细棒的质量. 现在要计算曲线形细长构件的质量, 也就是不计粗细, 将构件看作数学上的曲线. 当构件的线密度(单位长度的质量)为常数, 则质量等于密度与弧长的乘积. 但是, 当线密度并非常数时, 则要应用积分的基本思想, 即采取分割、近似、求和、再取极限的办法来解决.

如图 12.1.1 所示. 设具有质量的空间曲线  $L = \widehat{AB}$  上任一点  $(x, y, z)$  处的线密度为  $\rho(x, y, z)$ .

将  $L$  分成  $n$  个小曲线段  $L_i = \widehat{P_{i-1}P_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 并在  $L_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 那么当每个  $L_i$  的长度  $\Delta s_i$  都很小时,  $L_i$  的质量就近似地等于  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$ , 于是整条构件的质量就近似地等于

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

当对  $L$  的分割越来越细时, 这个近似值就趋于  $L$  的质量, 于是我们取极限即得到曲线形细长构件的质量. 显然, 这又是一种和式的极限, 我们将称之为第一型曲线积分.

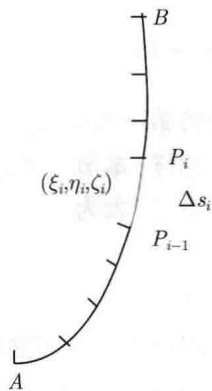


图 12.1.1

## 2. 第一型曲线积分的定义

**定义 12.1.1** 设  $L$  是空间  $\mathbb{R}^3$  上一条可求长的连续曲线, 其端点为  $A$  和  $B$  (图 12.1.1), 函数  $f(x, y, z)$  在  $L$  上有界. 在  $L$  上从  $A$  到  $B$  顺序地插入分点  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ , 称为  $L$  的一个分割, 记为  $T$ , 即

$$T: A = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n = B,$$

分别在每个小弧段  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 并记第  $i$  个小弧段  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  的长度为  $\Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i. \quad (12.1.1)$$

记  $\|T\| = \max\{\Delta s_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , 称为分割  $T$  的模. 如果  $\|T\|$  趋于零时, 这个和式存在极限, 记为  $J$ , 即

$$J = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i, \quad (12.1.2)$$

且  $J$  与分点  $\{P_i\}$  的取法及  $\widehat{P_iP_{i+1}}$  弧段上的点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的取法无关, 则称  $J$  为函数  $f$  在曲线  $L$  上的**第一型曲线积分**(the first type curve integral), 或称为关于弧长的积分(integral with respect to arc length), 记为

$$J = \int_L f(x, y, z) ds, \text{ 或 } J = \int_L f(P) ds,$$

亦即

$$\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i, \quad (12.1.3)$$

其中,  $f$  称为被积函数,  $L$  称为积分路径. 而记号  $\oint_L f(x, y, z) ds$  则表示曲线  $L$  为封闭路径时的第一型曲线积分.

这样, 本节一开始所要求的曲线形细长构件  $L$  的质量就可以看作第一型曲线积分的物理意义, 表为

$$M = \int_L \rho(x, y, z) ds.$$

对平面曲线情形可类似定义第一型曲线积分, 函数  $f(x, y)$  在平面曲线  $L$  上的第一型曲线积分记为  $\int_L f(x, y) ds$ .

## 3. 第一型曲线积分的性质

由于第一型曲线积分也是一类和式的极限, 因此它具有类似于定积分与重积分的一些性质, 我们不加证明地给出下面的两条性质, 而把证明留给读者作为练习.

**性质 12.1.1 (线性性)** 如果函数  $f, g$  在  $L$  上的第一型曲线积分都存在, 则对于任何常数  $\alpha, \beta$ , 函数  $\alpha f + \beta g$  在  $L$  上的第一型曲线积分也存在, 且成立

$$\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds.$$

**性质 12.1.2 (路径可加性)** 设曲线  $L$  分成了首尾相连的两段  $L_1, L_2$ , 则函数  $f$  在  $L$  上的第一型曲线积分存在当且仅当它在  $L_1$  和  $L_2$  上的第一型曲线积分都存在, 并且此时成立

$$\int_L f ds = \int_{L_1} f ds + \int_{L_2} f ds.$$

#### 4. 第一型曲线积分的计算

设  $L$  的方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

其中  $x(t), y(t), z(t)$  具有连续导数, 且  $x'(t), y'(t), z'(t)$  不同时为零 (即  $L$  为光滑曲线), 那么根据 §8.4 定积分的应用可知,  $L$  是可求长的, 且曲线的弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt,$$

而弧微分为

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

借此我们可将第一型曲线积分转化为定积分, 得到以下的第一型曲线积分计算公式.

**定理 12.1.1** 设函数  $f(x, y, z)$  在  $L$  上连续, 则它在  $L$  上的第一型曲线积分存在, 且

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (12.1.4)$$

**证明** 按定义 12.1.1, 设分割  $T$  各分点  $P_i$  所对应的参数为  $t_i$ , 即  $P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)), i = 0, 1, \dots, n$ , 则  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  的长度

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt, i = 1, 2, \dots, n.$$

根据积分中值定理, 存在  $t'_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , 使

$$\Delta s_i = \sqrt{x'^2(t'_i) + y'^2(t'_i) + z'^2(t'_i)} \Delta t_i.$$

又设  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  所对应的参数为  $\tau_i$ , 于是,

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \sqrt{x'^2(t'_i) + y'^2(t'_i) + z'^2(t'_i)} \Delta t_i.$$

注意到, 如果  $t'_i = \tau_i$ , 则上式右端当  $\|T\| \rightarrow 0$  时的极限即为公式 (12.1.4) 的右端的积分. 但是, 正像弧长公式中那样, 尽管  $t'_i = \tau_i$  未必成立, 但它们都在区间  $[t_{i-1}, t_i]$  内, 由函数

的一致连续性, 仍然可以证明上式右端当  $\|T\| \rightarrow 0$  时的极限也是公式 (12.1.4) 的右端的积分.

事实上, 只需证明: 当  $\|T\| \rightarrow 0$  时,

$$\sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) (\sqrt{x'^2(t'_i) + y'^2(t'_i) + z'^2(t'_i)} - \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)}) \Delta t_i \rightarrow 0.$$

由  $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致连续知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $\|T\| < \delta$  时,

$$|\sqrt{x'^2(t'_i) + y'^2(t'_i) + z'^2(t'_i)} - \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)}| < \varepsilon.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \left( \sqrt{x'^2(t'_i) + y'^2(t'_i) + z'^2(t'_i)} - \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)} \right) \Delta t_i \right| \\ & \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n |f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))| \Delta t_i, \end{aligned}$$

其中,  $\sum_{i=1}^n |f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))| \Delta t_i$  是积分  $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x(t), y(t), z(t))| dt$  的 Riemann 和, 因此有界, 从而定理获证.  $\square$

特别地, 如果平面光滑曲线  $L$  的方程为

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (12.1.5)$$

又如果曲线由极坐标方程  $r = r(t), t \in [\alpha, \beta]$  表示, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(t) \cos t, r(t) \sin t) \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} dt. \quad (12.1.6)$$

**例 12.1.1** 计算  $I = \int_L \sin \sqrt{x^2 + y^2} ds$ , 其中,  $L$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , 直线  $y = x$  及  $x$  轴在第一象限所围图形的边界.

**解** 如图 12.1.2 所示. 由路径可加性得

$$I = \int_{\overline{OA}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} ds + \int_{\widehat{AB}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} ds + \int_{\overline{OB}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} ds,$$

线段  $\overline{OA}$  的方程为  $y = 0, 0 \leq x \leq a$ , 所以

$$\int_{\overline{OA}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_0^a \sin x dx = 1 - \cos a.$$

在圆弧  $\widehat{AB}$  上,  $x^2 + y^2 = a^2$ , 所以

$$\int_{\widehat{AB}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{\widehat{AB}} \sin a ds = \frac{\pi}{4} a \sin a.$$

线段  $\overline{OB}$  的方程为  $y = x, 0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ , 所以

$$\int_{\overline{OB}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \sin \sqrt{2}x \sqrt{2} dx = 1 - \cos a.$$

因此

$$I = 2(1 - \cos a) + \frac{\pi}{4} a \sin a.$$

**例 12.1.2** 计算  $I = \int_L |x| ds$ , 其中,  $L$  为双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

**解** 如图 12.1.3 所示. 双纽线的参数方程为  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ , 它在第一象限的方程是  $L_1: r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ . 利用对称性及公式 (12.1.6) 可得

$$I = 4 \int_{L_1} x ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos \theta d\theta = 2\sqrt{2}a^2.$$

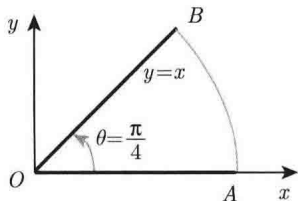


图 12.1.2

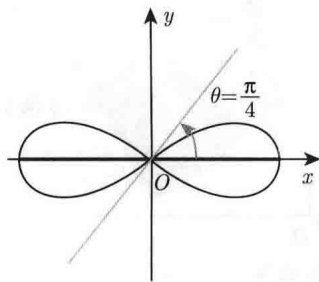


图 12.1.3

**例 12.1.3** 计算积分  $I = \int_L (x^2 + 2y + z) ds$ , 其中,  $L: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ .

**解** 由于在曲线  $L$  的表达式中,  $x, y, z$  的地位完全对等, 因此

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds.$$

由于在  $L$  上成立  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 且  $L$  是一个半径为  $a$  的圆周, 因此

$$\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_L a^2 ds = a^2 \int_L ds = 2\pi a^3.$$

于是

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{2}{3} \pi a^3.$$



同样,

$$\int_L x ds = \int_L y ds = \int_L z ds = \frac{1}{3} \int_L (x + y + z) ds = 0,$$

因此,  $I = \frac{2}{3} \pi a^3$ .

### §12.1.2 第一型曲面积分

#### 1. 背景: 求曲面形构件的质量

设空间  $\mathbb{R}^3$  中一曲面形构件  $\Sigma$  上分布着质量, 其面密度 (单位面积上的质量) 由分布函数  $\rho(x, y, z)$  确定, 问如何求出  $\Sigma$  的总质量.

显然, 这一问题本质上与前面计算分布着质量的曲线形构件的总质量的情况是类似的, 因此可以采取相似的思路来解决问题, 即把曲面  $\Sigma$  分成若干小片, 在每一小片上视面密度为常数而求得质量的近似值, 并将这些近似值相加, 得到曲面  $\Sigma$  质量的近似值, 再取极限 (令每一小片直径的最大值趋于零) 以获得精确值. 这同样是一种积分的概念.

#### 2. 第一型曲面积分的定义

**定义 12.1.2** 设曲面  $\Sigma$  为有界光滑 (或分片光滑) 曲面, 函数  $u = f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上有界. 分割  $T$  用一个光滑曲线网将曲面  $\Sigma$  分成  $n$  片小曲面  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ , 并记  $\Sigma_i$  的面积为  $\Delta S_i$ . 任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$ , 如图 12.1.4 所示. 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i. \quad (12.1.7)$$

所有小曲面  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  的最大直径  $\|T\|$ , 称为分割的模. 如果当  $\|T\|$  趋于零时, 这个和式的极限存在, 且这个极限与小曲面的分法和点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的取法无关, 则称它为  $f(x, y, z)$  在曲面  $\Sigma$  上的**第一型曲面积分** (the first type surface integral), 或称为关于面积的积分 (integral

with respect to area), 记为

$$J = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i, \quad (12.1.8)$$

其中,  $f(x, y, z)$  称为**被积函数**,  $\Sigma$  称为**积分曲面**.

这样, 本小节开头处所要求的曲面  $\Sigma$  的质量就可表示为

$$M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS.$$

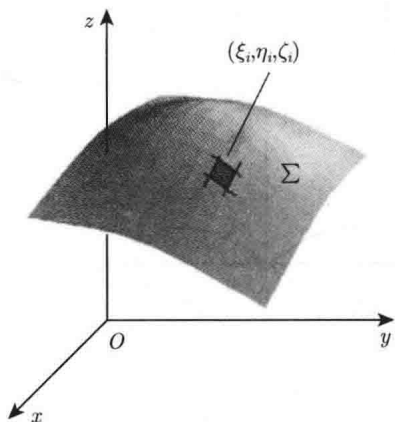


图 12.1.4

## 3. 第一型曲面积分的计算

仿效第一型曲线积分的计算公式可得到下面的第一型曲面积分的计算公式, 它把第一型曲面积分的计算转化为二重积分. 证明留给读者.

**定理 12.1.2** (1) 设曲面  $\Sigma$  由参数方程给出:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D,$$

或记为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ . 这里,  $D$  为  $uv$  平面上具有分段光滑边界的区域. 进一步假设映射

$$\mathbf{r} : (u, v) \in D \rightarrow (x, y, z) \in \Sigma$$

是一一对应, 且满足上一章关于计算曲面的面积的定理的条件, 则  $\Sigma$  上的任一连续函数  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上的第一型曲面积分存在, 且成立以下计算公式

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{EG - F^2} du dv, \\ \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \end{aligned}$$

其中,  $E, F, G$  是定理 11.4.1 中的曲面的第一基本量:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \end{aligned} \quad (12.1.9)$$

(2) 设曲面  $\Sigma$  由显式  $z = z(x, y)$  给出, 这时第一型曲面积分的计算公式为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

**例 12.1.4** 设  $S$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被平面  $z = 1$  所截的下半部分, 求积分

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 1) dS.$$

**解** 首先, 由于锥面关于  $yOz$  平面对称, 所以  $\iint_S 2x dS = 0$ .

其次, 在锥面上,  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , 所以

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 1) dS = \iint_S (-1) dS.$$

又  $S$  的投影区域为  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $dS = \sqrt{2} dx dy$ , 所以

$$I = \iint_D (-1) \sqrt{2} dx dy = -\sqrt{2} \pi.$$

下面再给出第一型曲面积分应用的例子.