2017 高教版

● 严格依据 2017 年经济类专业学位联考综合能力考试大纲编写

经济类专业学位联考 综合能力 考试大纲解析

◢ 最佳搭配：考研英语二考试大纲解析 + 综合能力考试大纲解析

经济类联考大纲配套教材专家委员会

高等教育出版社

2017

高 教 版

● 严格依据2017年经济类专业学位联考综合能力考试大纲编写

经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析

◢ 最佳搭配：考研英语二考试大纲解析 + 综合能力考试大纲解析

经济类联考大纲配套教材专家委员会

2017 JINGJILEI ZHUANYE XUEWEI LIANKAO ZONGHE NENGLI KAOSHI DAGANG JIEXI

高等教育出版社·北京

内容提要

《2017经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》根据最新《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲》的要求和精神，深入研究上一年考研经济类联考综合能力部分命题的特点及动态，并结合考生复习的阶段性特点和大纲规定的考点编写。编写时，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。本书由三个部分组成，包括数学基础、逻辑推理和写作。其中各部分包括以下内容：1.大纲的考试要求和考查内容详解。对大纲所要求的知识点进行了全面、准确地阐述，以加深考生对基本概念和原理等重点内容的理解和正确应用。本部分讲解考点明确、重点突出、层次清晰、简明实用。2.典型例题。优化设计与大纲考点相关的典型例题供考生选用，通过学练结合，使考生更好地巩固所学知识，提高实战能力。

图书在版编目(CIP)数据

2017经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析/经济类联考大纲配套教材专家委员会编.--北京:高等教育出版社,2016.8

ISBN 978-7-04-045836-7

Ⅰ.①2… Ⅱ.①经… Ⅲ.①经济学-研究生-入学考试-考试大纲 Ⅳ.①F0-41

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第191866号

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明 朱丽娜　封面设计 杨立新　版式设计 范晓红
插图绘制 杜晓丹　责任校对 杨凤玲　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市鑫霸印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 16.25
字　　数 390千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn

版　　次 2016年8月第1版
印　　次 2016年8月第1次印刷
定　　价 35.00元

物 料 号 45836-00

出版前言

高等教育出版社出版的2017年考研大纲、考试分析、大纲解析及配套题、名师导学、全国考研辅导班系列权威用书,以考研学生的特点和需求为出发点,融合了教学、命题、考研辅导等领域的专家、学者和优秀教师的多年经验和研究成果,内容完全切中考研大纲的考点,阐述准确、精炼、重点突出,而且各系列书在编写时吸取了各届考生的意见和建议,对考生来说是非常权威、实用的考试参考书。

一、《2017年全国硕士研究生招生考试英语(二)考试大纲(非英语专业)》

本书规定了2017年全国硕士研究生招生考试英语(二)的考试范围、考试要求、考试形式、试卷结构等,与2016年版相比,2017年版作了一定程度的修订。它既是2017年全国硕士研究生招生考试英语(二)考试命题的唯一依据,也是考生复习备考必不可少的工具书。

二、《2017年全国硕士研究生招生考试英语二考试大纲解析》

本书由考研命题专家根据全面调整后的2017年考研英语(二)考试大纲编写,以权威、精准、实用为目标,帮助考生全面了解、准确掌握大纲对词汇、语法和各种题型的考查要求,并列举大量真题和模拟试题对考研英语知识运用、阅读理解、英译汉和写作等部分进行深入分析,给出考查要点和解题思路及答题方法,指导考生进行系统、扎实、高效地复习,最大限度地节省考生复习时间。此书语言凝练,内容准确,表述规范,篇幅适当,可贯穿复习始终,前期用于全面了解考研英语(二)的考试要点,是基础复习的首选;后期用来有针对性地做题,查缺补漏。

三、《2017经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》

本书根据最新《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲》的要求和精神,深入研究上一年考研经济类联考综合能力部分命题的特点及动态,并结合考生复习的阶段性特点和大纲规定的考点编写。编写时,作者特别注重与学生的实际相结合,注重与考研的要求相结合。本书由三个部分组成,包括数学基础、逻辑推理和写作。其中各部分包括以下内容:1. 大纲的考试要求和考查内容详解。对大纲所要求的知识点进行了全面、准确地阐述,以加深考生对基本概念和原理等重点内容的理解和正确应用。本部分讲解考点明确、重点突出、层次清晰、简明实用。2. 典型例题。优化设计与大纲考点相关的典型例题供考生选用,通过学练结合,使考生更好地巩固所学知识,提高实战能力。

本书在编写过程中得到如下几位老师的亲自指导和认真审阅。他们是陈剑(数学基础)、刘玉芳(逻辑推理和写作)。在此对他们付出的智慧与努力表示感谢!

为了给考生提供更多的增值服务,凡购买正版全国考研辅导班系列用书的考生都可以登录"高校考试培训网络学院"http://px.hep.edu.cn 享受增值服务。

高等教育出版社

2016年8月

目 录

2017 年经济类联考综合能力考试说明

一、考试性质

经济类联考综合能力是为了招收金融硕士、应用统计硕士、税务硕士、国际商务硕士、保险硕士及资产评估硕士而设置的具有选拔性质的联考科目。其目的是科学、公平、有效地测试考生是否具备攻读上述专业学位所必需的基本素质、一般能力和培养潜能。

二、考试大纲基本内容简介

《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲》包含三部分内容：考查目标、考试形式和试卷结构、考查内容。

（一）考查目标

1. 具有运用数学基础知识、基本方法分析和解决问题的能力。

2. 具有较强的分析、推理、论证等逻辑思维能力。

3. 具有较强的文字材料理解能力、分析能力以及书面表达能力。

（二）考试形式和试卷结构

数学基础：经济类联考综合能力考试中的数学部分主要考查在经济分析中常用的数学知识及基本方法和基本概念。试题涉及的数学知识范围有：

1. 微积分部分

一元函数的微分、积分；多元函数的一阶偏导数；函数的单调性和极值。

2. 概率论部分

分布和分布函数的概念；常见分布；期望值和方差。

3. 线性代数部分

线性方程组；向量的线性相关和线性无关；矩阵的基本运算。

数学共考 20 个题目，其中四选一的单选题 10 道，每道 2 分，计 20 分，解答题 10 道，每道 5 分，计 50 分，总共 70 分。

逻辑推理：选择题的形式：20 个小题，每小题 2 分，每个题有 A、B、C、D、E 五个选项，单选题设计，共 40 分。考试中的试题几乎涵盖了考试大纲中逻辑推理部分所有的重点知识。而且逻辑的考试更多的是能力考试，而不是具体知识点的考试。所以考试的内容更加多样化，综合化。历年真题中考查重点集中在推理和论证部分，后文将有详细阐述。

写作：2 道主观题，以文章的形式出现，每篇文章要求不少于 600 字。其中论证有效性分析 20 分，论说文 20 分，共 40 分。

（三）考查内容

考试大纲所列的考核内容，是考试命题和考生复习的范围和依据，即：在大纲所列要点之外

的知识将不会成为考试的内容,叫做"不超纲"。但这些所列的考查内容只是一个框架,知识点具有高度的概括性,因此,在复习时仅仅依靠大纲所列的要点是远远不够的。不仅如此,有些考查要点之外的内容并非可以置之不理,相反,必要的非考查内容对相关知识的掌握也同样大有裨益。另外,考试大纲中的考查要点仅是知识理论的考查范围,但知识本身并不等于能力,它是能力的载体。因此,应充分认识掌握知识和培养能力的关系,要通过掌握知识到达培养能力的目的。所以,在复习时不要仅仅拘泥于考试大纲所列的考核内容。

三、命题情况说明

(一)试卷设计的基本要求

在试卷设计中,试卷所考查的内容、内容比例、题型比例等应符合考试大纲的规定和要求。试卷考查的内容要具有一定的覆盖面,所测试的知识点应尽可能广泛,知识点的分布具有合理性,知识点具有代表性。整个试卷的内容题量适中,考生基本上能在规定的时间内完成。试卷应保持比较稳定的难度,并保持良好的信度和效度。

(二)试题设计的基本要求

试题严格按照考试大纲命制,所考查的知识点不超出大纲的要求。试题应科学规范,没有科学性、政治性错误。试题应有明确的考查目标,体现一定的能力要求。试题设计的立意、情境、设问的角度和方式应灵活;表达方式应合理有效;题意明确,表达准确简洁。

(三)参考答案的编写说明

参考答案力求科学、规范。答案基本上以通说的教材为参照,或以国家法律、法规为依据。数学的解答题列出关键步骤及方法,作文等主观题一般只列答案要点,要求语言精练、通畅、明确、无歧义;准确而紧扣题意;力争贴近实际。

第一部分

数学基础

的知识将不会成为考试的内容，即为"不超纲"。但这部分所列的考查内容只是一个框架，知识点具有高度的概括性，因此，在复习时仅仅依靠大纲所列的要点是远远不够的。不仅如此，有些考查要点之外的内容并非可以置之不理，相反，必要的非考查内容对相关知识的学习同样大有裨益。另外，考试大纲中的考查要点只是知识理论的考查范围，但知识本身并不等于能力，它是能力的载体。因此，应充分认识掌握知识和培养能力的关系，要通过掌握知识达到培养能力的目的。所以，在复习时不要仅仅拘泥于考试大纲所列的考核内容。

三、命题情况说明

（一）试卷设计的基本要求

在试卷设计中，试卷所考查的内容、内容比例、题型比例等应符合考试大纲的规定和要求。试卷考查的内容要具有一定的覆盖面，各类试题知识点应是很广泛，知识点的分布具有合理性，知识点具有代表性。整个试卷的内容容量适中，考生基本上能在规定的时间内完成。试卷应保持比较稳定的难度，并保持良好的区分度和效度。

（二）试题设计的基本要求

试题严格按照考试大纲命制，所考查的知识点不超出大纲的要求。试题应科学规范，没有科学性、政治性错误。试题应有明确的考查目标，体现一定的能力要求。试题设计的立意、情境、设问的角度和方式应灵活；表达方式应合理有效，题意明确，表达准确简洁。

（三）答案设计的基本要求

[illegible]力求科学、规范。答案基本上以通说的教材为参照，或以国家法律、法规为依据。[illegible]主观题一般只列答案要点，要求语言精练、通畅、明确，[illegible]

第一章　函数　极限　连续

【核心考点】

理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数、隐函数及函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性的概念.掌握基本初等函数的性质及图形,了解初等函数的概念.理解数列极限、函数极限、函数左(右)极限的概念及函数极限存在与左右极限之间的关系.掌握极限的性质与四则运算法则;掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限;掌握利用两个重要极限求极限的方法.函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判断函数间断点的类型.了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质.

【考查角度】

本章重点掌握极限的各种求解方法,一般可利用极限的四则运算与幂指数运算法则;利用函数的连续性;利用变量替换与两个重要极限;利用等价无穷小因子替换;利用洛必达法则;分别求左、右极限;数列极限转化为函数极限.

第一节　考试要点

一、函数的概念

1. 函数的定义

设 D 是一个非空的实数集,如果有一个对应规则 f,对每一个 $x\in D$,都能对应唯一的一个实数 y,则这个对应规则 f 称为定义在 D 上的一个函数,记以 $y=f(x)$,称 x 为函数的自变量,y 为函数的因变量或函数值,D 称为函数的定义域,并把实数集 $Z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

2. 分段函数

如果自变量在定义域内取不同的值,函数不能用同一个表达式表示,而要用两个或两个以上的表达式来表示.这类函数称为分段函数.

例如,$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1,\\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 5x, & x>1.\end{cases}$

这是一个分段函数,它有两个分段点,$x=-1$ 和 $x=1$,它们两侧的函数表达式不同,因此讨论函数 $y=f(x)$ 在分段点处的极限、连续、导数等问题时,必须分别先讨论左、右极限,左、右连续性和左、右导数,需要强调:分段函数不是初等函数,不能用初等函数在定义域内皆连续这个定理.

再如 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

3. 隐函数

形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数，由方程 $F(x,y)=0$ 确定的 $y=y(x)$ 称为隐函数，有些隐函数可以化为显函数，例如 $x^2+y^2=1$，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$（不一定是一个单值函数），而有些隐函数则不能化为显函数.

4. 反函数

如果 $y=f(x)$ 可以解出 $x=\varphi(y)$ 是一个函数（单值），则称它为 $f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 有时也用 $y=f^{-1}(x)$ 表示，例如 $y=x^2(x\geqslant0)$ 解出 $x=\sqrt{y}(y\geqslant0)$，而 $y=x^2(x\leqslant0)$ 解出 $x=-\sqrt{y}$ $(y\geqslant0)$.

二、基本初等函数

1. 常值函数

$y=C$（C 为常数）.

2. 幂函数

$y=x^{\alpha}$（α 为常数）.

3. 指数函数

$y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$.

$y=e^x(e=2.718\,2\cdots$，无理数).

4. 对数函数

$y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$.

常用对数函数　$y=\log_{10}x=\lg x$.

自然对数函数　$y=\log_e x=\ln x$.

5. 三角函数

$y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\tan x$；

$y=\cot x$；$y=\sec x$；$y=\csc x$.

6. 反三角函数

$y=\arcsin x$；$y=\arccos x$；

$y=\arctan x$；$y=\operatorname{arccot} x$.

关于基本初等函数的概念、性质及其图像非常重要，影响深远. 例如以后经常会用到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$；$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}$；$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}$；$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ 等. 就需要对 $y=\arctan x$，$y=e^x$，$y=\ln x$ 的图像掌握得很清晰.

三、复合函数与初等函数

1. 复合函数

设 $y=f(u)$，定义域为 U；

$u=g(x)$，定义域为 X，值域为 U^*.

如果 $U^*\subset U$，则 $y=f[g(x)]$ 是定义在 X 上的一个复合函数. 其中 u 称为中间变量.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的用一个解析式表示的函数称为初等函数.

四、考试中常出现的非初等函数

1. 用极限表示的函数

(1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.

(2) $y=\lim\limits_{t\to x}f(t,x)$.

2. 用变上、下限积分表示的函数

(1) $y=\int_0^x f(t)\,dt$,其中 $f(t)$ 连续,则$\frac{dy}{dx}=f(x)$.

(2) $y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\,dt$,其中 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 可导, $f(t)$ 连续,

则$\frac{dy}{dx}=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$.

五、函数的几种性质

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 X 内有定义,若存在正数 M,使 $x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上是有界的.

2. 奇偶性

设区间 X 关于原点对称,若对 $x\in X$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 在 X 上是奇函数;若对 $x\in X$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数.奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

3. 单调性

设 $f(x)$ 在 X 上有定义,若对任意 $x_1\in X,x_2\in X,x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的(单调减少的);若对任意 $x_1\in X,x_2\in X,x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 X 上是单调不减的(单调不增的).

注意:有些书上把这里单调增加称为严格单调增加;把这里单调不减称为单调增加.

4. 周期性

设 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果存在常数 $T\neq 0$,使得任意 $x\in X,x+T\in X$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的周期.

由此可见,周期函数有无穷多个周期,一般我们把其中的最小正周期称为周期.

六、极限的概念与基本性质

定理 1(极限的唯一性) 设 $\lim f(x)=A,\lim f(x)=B$,则 $A=B$.

定理 2(极限的不等式性质) 设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,若 x 变化一定以后,总有 $f(x)\geqslant g(x)$,则 $A\geqslant B$.

反之,$A>B$,则 x 变化一定以后,有 $f(x)>g(x)$.

注:当 $g(x)\equiv 0,B=0$ 情形也称为极限的保号性.

定理 3(极限的局部有界性) 设 $\lim f(x)=A$,则当 x 变化一定以后,$f(x)$ 是有界的.

定理 4 设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=A+B$;

(2) $\lim[f(x)-g(x)]=A-B$;

(3) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;

(4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$;

(5) $\lim [f(x)]^{g(x)} = A^B \quad (A>0)$.

七、无穷小

1. 无穷小定义

若 $\lim f(x)=0$,则称 $f(x)$ 为无穷小.

注:无穷小与 x 的变化过程有关,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小,而 $x\to x_0$ 或其他时,$\dfrac{1}{x}$ 不是无穷小.

2. 无穷大定义

任给 $M>0$,当 x 变化一定以后,总有 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 为无穷大.

记为 $\lim f(x)=\infty$.

3. 无穷小与无穷大的关系

在 x 的同一个变化过程中,

若 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;

若 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

4. 无穷小与极限的关系

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim \alpha(x)=0$.

5. 两个无穷小的比较

设 $\lim f(x)=0$,$\lim g(x)=0$,且 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

(1) $l=0$,称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小,记以 $f(x)=o[g(x)]$,称 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小;

(2) $l\neq 0$,称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小;

(3) $l=1$,称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小,记为 $f(x)\sim g(x)$.

6. 常见的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时,

$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\arctan x\sim x$,

$1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$,$e^x-1\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$.

7. 无穷小的重要性质

有界变量乘无穷小仍是无穷小.

八、求极限的方法

1. 利用极限的四则运算和幂指数运算法则

2. 两个重要公式

公式 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

公式 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e};\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u}=\mathrm{e};\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=\mathrm{e}.$

3. 用无穷小的重要性质和等价无穷小代换

4. 洛必达法则

法则 1 $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$ 设(1) $\lim f(x)=0,\lim g(x)=0$;

(2) 在 x 的变化过程中,$f'(x)$,$g'(x)$ 皆存在;

(3) $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$,

则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A(\text{或}\infty)$.

注:如果 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在且不是无穷大量情形,则不能得出 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在且不是无穷大量.

法则 2 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 设(1) $\lim f(x)=\infty,\lim g(x)=\infty$;

(2) x 变化过程中,$f'(x)$,$g'(x)$ 皆存在;

(3) $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$,

则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A(\text{或}\infty)$.

5. 利用导数定义求极限

基本公式:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$(如果存在).

九、函数连续的概念

1. 函数在点 x_0 处连续

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果当自变量的改变量 Δx(初值为 x_0)趋近于 0 时,相应的函数改变量 Δy 也趋近于 0,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续也可作如下定义:

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限值存在,且等于 x_0 处的函数值 $f(x_0)$,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,此时有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,并且有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

即如果函数在点 x_0 处连续,则在点 x_0 处可以交换极限号和函数号的顺序.

定义 3 设函数 $y=f(x)$,如果 $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;如果 $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

由上述定义 2 可知,如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续也右连续.

2. 函数在区间内(上)连续的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

如果 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,在区间端点 a 右连续,在区间端点 b 左连续,则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

十、函数的间断点及其分类

1. 函数的间断点的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 不连续,则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

2. 函数的间断点的分类

函数的间断点分为两类:

(1) 第一类间断点

设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点.如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限都存在,则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点.

(2) 第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点.

常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点.

例如,$x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点,是 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的跳跃间断点,是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点,是 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点.

十一、初等函数的连续性

1. 在区间 I 上连续的函数的和、差、积及商(分母不为零),在区间 I 上仍是连续的.

2. 由连续函数经有限次复合而成的复合函数在定义区间内仍是连续函数.

3. 在区间 I 连续且单调的函数的反函数,在对应区间仍连续且单调.

4. 基本初等函数在它的定义域内是连续的.

5. 初等函数在它的定义区间内是连续的.

十二、闭区间上连续函数的性质

在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$,有以下几个基本性质.这些性质以后都要用到.

定理 1(有界定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有界.

定理 2(最大值和最小值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则在这个区间上一定存在最大值 M 和最小值 m.

其中最大值 M 和最小值 m 的定义如下:

定义 设$f(x_0)=M$是区间$[a,b]$上某点x_0处的函数值，如果对于区间$[a,b]$上的任一点x，总有$f(x)\leqslant M$，则称M为函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值.同样可以定义最小值m.

定理3（介值定理） 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且其最大值和最小值分别为M和m，则对于介于m和M之间的任何实数c，在$[a,b]$上至少存在一个ξ，使得

$$f(\xi)=c.$$

推论 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，则在(a,b)内至少存在一个点ξ，使得

$$f(\xi)=0.$$

这个推论也称为零点定理.

第二节 典型例题

例1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$

解法一 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x+1)-(\sin x+1)}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{2}.$$

解法二 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+\tan x}-1)-(\sqrt{1+\sin x}-1)}{x(1-\cos x)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{2}.$$

例2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}}{\sin^3\dfrac{1}{n}}$.

解 离散型不能用洛必达法则，故考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6},$$

因此原式$=\dfrac{1}{6}$.

例3 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$.

解 令$y=(\cos x)^{\cot^2 x}$，则$\ln y=\cot^2 x\ln\cos x$，得

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\cot^2 x\ln\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}\xlongequal{\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right)}\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2},$$

因此$\lim\limits_{x\to 0} y=e^{\frac{1}{2}}$.

例 4 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{3n+1}\sin\sqrt{n^2+1}$.

解 因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}}{3+\dfrac{1}{n}}=0$,且$\left|\sin\sqrt{n^2+1}\right|\leqslant 1$,根据有界变量乘无穷小仍是无穷小,可知原式$=0$.

例 5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解 这个极限虽是“$\dfrac{0}{0}$”型,但分子、分母分别求导数后的极限不存在,因此不能用洛必达法则.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\left[\frac{3\dfrac{\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}\right]=\frac{3}{2}.$$

例 6 求下列函数在分段点处的极限:

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{1-\cos x}, & x>0;\end{cases}$

(2) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x<1,\\ x^2+\dfrac{1}{2}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

解 (1) $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}=2$,

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=2,$$

因此$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

(2) $g(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$,

$$g(1+0)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2},$$

因为$g(1-0)\neq g(1+0)$,故$\lim\limits_{x\to 1}g(x)$不存在.

例 7 讨论函数$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$在点$x=0$处的连续性.