

解析数学讲义

(第一卷, 导数式及微分, 积分, 级数)

(法)吉尔德(Goursat Edvard) 著

王德润 译



清华大学出版社
TSINGHUA UNIVERSITY PRESS

013
201919

解析数学讲义

(第一卷, 导来式及微分、积分、级数)

(法) 古尔萨(Goursat Edvard) 著

王尚济 译



 哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本套书是一部世界数学的名著,共分三卷,该书为第一卷,主要介绍了导来式及微分、积分、级数等相关内容,同时配以相应的习题,以供读者更好的理解。

本书适合大中学师生及数学爱好者参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

解析数学讲义. 第一卷, 导来式及微分、积分、级数/
(法)古尔萨(Goursat Edvard)著;王尚济译. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社, 2019. 4

ISBN 978 - 7 - 5603 - 4598 - 7

I. ①解… II. ①古…②王… III. ①高等数学-
教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 038433 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 37.75 字数 393 千字

版 次 2019 年 4 月第 1 版 2019 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 4598 - 7

定 价 88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序

巴黎大學教授古爾薩 (E. Goursat) 氏所著之解析數學講義 (Cours d'Analyse mathématique) 一書，爲古氏在巴黎大學理學院所用之講義，自1902年出版以來，今已五版，每版多修訂改善之處，英德文均有譯本，凡治高等微積分及函數論者，或用作教本，或訂爲參考書，風行各國，幾三十年，是書包羅宏富，理解明析，誠近代數學界之名著也。

北平研究院出版部鑒於我國科學書籍之缺乏，因有編譯高等教科書及研究用參考書之議，適吾友王海帆君，譯成此書，遂由本院出版部印行問世，以供國內研究數學者之參考；卽不諳西文者，得此亦可獲得高深之解析數學知識，而盡窺其秘奧矣。王君昔遊法國，曾從學於古氏，今本其既往教授之經驗，積數年賡續不斷之精力，就法文原書第五版，而譯成中文，將來國中數學發達，解析進步，則皆此書及王君之所賜也。此書排印既竣，因樂誌數語以爲序。

解 析 數 學 講 義

民國十九年八月李書華序于北平研究院總辦事處。

序

德國數學家哈爾納克 (Harnack) 嘗分數學爲二大類, 曰解析學曰幾何學, 近雖有非之者然巴斯嘉爾 新編之高等數學提要 (Pascal, Repertorium der Höheren Mathematik) 仍宗其說, 哈氏 之是非姑置不論, 解析在數學所佔地位之重要, 當無疑義矣. 自高失 (Cauchy), 拉葛郎謝 (Lagrange), 亞伯爾 (Abel) 倡明解析後, 嗣響者多出於德法, 故斯學之盛, 自昔推此兩國. 顧德人著書常喜分而不喜合, 故對一解析而分爲集合論, 微分學, 積分學, 微分方程式, 函數論, 積分方程式, 變分法等等, 甚至一函數論, 而再分爲實數函數論, 虛數函數論, 橢圓函數論, 球函數論, 橢模函數論等等, 分而又分, 析而又析, 在作者固自欲精益求精, 在讀者則不免煩不勝煩. 如遊五都之市, 珍貨山積, 難於擇取. 法國數學家則不然雖亦著有專門撰述, 然常匯萃諸門合成一書, 所謂解析學教程者 (Cours d'Analyse) 自高失 後之大家如羅蘭 (Laurant), 曷爾密特 (Hermite) 等, 幾於人著一編, 迨至今日雖已汗牛充棟, 然世所

稱爲精深宏博者不外柔爾當 (Jordan), 畢加爾 (Picard), 古爾薩 (Goursat) 三氏之書每書各三巨冊,而材料之豐富,證法之精確,思想之新穎,文筆之明暢尤以古氏爲最.是以其書甫出(1902)即騰譽於美國數學界(見 Bulletin of the American Mathematical Society, 1903).而阿斯姑德 (Osgood) 患英文高等微積乏善本,憇憇赫德利克 (Hedrick) 譯成英文.余於民國二年在北大創辦數學系,即取是書第一冊爲高等微積分課本,第二冊爲函數論課本,用之迄今十六七年,不但無人反對,且國內有名大學如廣州之中山,湖北之武漢,遼寧之東北,河南之中州等多相率而和之,故赫氏之書暢行於中國.實則其書缺點甚多,因其第一冊爲原書初版,第二冊爲原書再版,原書有無窮積 (produits infinis) 一卷初版在第二冊之首,再版則移置於第一冊無窮級數之末,英譯本自然遺漏於無形之中,以致講懷爾斯托辣斯 (Weierstrass) 整函數定理時失所依據,况古氏書今已五版,每版修訂,使趨時宜,英譯本則仍守其二十八年之前之舊文,如陰函數之存在定理,古氏新說發明於 1903 年,後又屢次

改善，而是書之初版出於 1902 年，當然僅能用的尼(Dini)之舊法，他如先後照應之失宜，譯名之不一，皆因初版再版及時間倉卒之故，非可以深咎赫氏，惟是書通行幾三十年，而其書公司因見銷路之廣，迄今尙未聞有改版之說，似不得辭其責耳。德文近亦有譯本(Schwarz所譯)雖較赫氏完美，惜我國學子習德法文者鮮，不得不奉赫氏書爲圭臬。幸吾友王海帆君毅然將古氏書之最新版譯成漢文，豈非我數學界一大快事哉。王君留學於巴黎，曾親炙於古氏，歸國後又在北大講授是書幾十載，今所出版者，蓋其曩日授諸生之講義，因習以崇之，賡續以終之，日積月累，聚而爲冊，視赫氏所譯，其精粗固不待智者而後辨也。然欲版以行世，遍詢於諸書公司，初尙莫有應者，豈非懼曲高和寡，而獲利不厚歟，何中外書公司之見解之殊途同歸也。今幸北平研究院欲提倡高等科學，助王君付其譯稿於劄氏，印成而囑叙於余，余因爲我國學子慶曰，是書不但漢文舊有之微積分學無其匹儔，卽求之西文亦不多得，我國學子讀漢文當易於英文，王君所譯又勝於赫

解析數學講義

氏,異日我國數學進步,月異而歲不同,浸假而追及德法諸國則是書當大有功焉.

民國十九年九月馮祖荀叙於北陵之東
北大學.

譯 者 自 序

是書爲法國巴黎大學古爾薩氏所作，即該氏所授解析數學講義，各國大學多有採用爲課本者。全書共三冊，第一冊爲微分，積分，級數及關於幾何的應用；第二冊爲解析函數，常微分方程式及第一級偏微分方程式；第三冊爲極近積分，第二級偏微分方程式，積分方程式及變分法。近數年來，余在北京大學所授高等微積分及函數通論即譯用此書第一冊及第二冊爲課本。

原書第一冊及第二冊均有英文譯本，但所譯者第一冊係原書第一版，第二冊係第二版，距今垂三十年，較之最近新出第五版不但章節的次第教材的增減多有不同，即理論方面亦有重要的改革，如關於陰函數的存在的證明及解析的延長等等。

余於民國十一年始譯此書由北大印刷所印製講義，每遇原書出一新版即據以改正，閱數年將原書第一冊及第二冊前半悉依最新版本譯印，是項講義拘於價格之低廉及時

間的迫促，印刷不免有訛誤支離之憾，僅足以輔助學生筆記而已，然而我國各大學亦有購用爲課本者。

現在高等科學書籍出版最感困難，經濟方面，則譯著者類皆寒峻無力自辦，而營書業者以其無利可圖不願投資；技術方面，則手民無科學知識及經驗難於勝任，即以此書而論，亦曾與某某書局某某印刷所訂約已非一次，但皆不克履行，即此之故。

民國十八年北平研究院成立，當局者鑒於中文科學書籍之重要，對於上述出版之困難擬有以救濟之，爰有編譯高等科學書籍之議，而允將余所譯是書由研究院印行問世，由十八年十月起閱十月書成，中國數理學會會長馮君漢叔，北平研究院副院長李君潤章慨允爲之序，是書得二君之言益當見重無疑，而余亦借以掩其謏陋於萬一，抑何幸也，姻姪杜君宏遠肄數學業於北大，擔任校對，備極詳盡，余並於此深致謝意。

中華民國十九年七月王尙濟書於溫泉。

原書第一版著者自序

此書差不多就是我在理學院所用講義的概要，因為要將凡關於實數函數的理論除微分方程式外都彙在一冊，所以有若干處我稍微變更教授時所遵的次序，微分的記法不在特別數學班(*classe de Mathématiques spéciales*)課程以內，我將這個記法從首陳述，但是假定閱者已知導來式(*dérivée*)的運算。

解析數學顯然是連續(*continu*)的科學，似乎凡一個解析講義當始於無理數(*nombre irrationnels*)的研究，然而我假定閱者已經具此觀念，因為不可通度數(*incommensurables*)的理論載在許多知名的著作，至為詳備，我以為無須復述，至於其牠根本觀念，為解析的基礎，如上限(*limite supérieure*)，有定積分(*intégrate définie*)，二重積分(*intégrale double*)等等，我盡力以嚴密的理論將此等加入，自然這些理論仍是初級的(*élémentaire*)，並未要達到一個教科書範圍外所無須的普遍性(*généralité*)。

在此書中有些節字體較小，或是推廣的

舉例,或是補充正文,閱者在初讀時可以越過並無窒礙.在每章之末附有若干個習題,其中大半能直接應用該章所陳的方法,都是考試時所曾經作為試題的.此外每一題前加有星點的,都是較為難作,多數的是採自專集,閱者可自己尋閱.

師範學校(E'cole Normale)我的兩個舊生耶密爾葛冬 (Emile Cotton) 及 若望克來蘭 (Jean Clairin) 助我校對,我於此深致感謝.

一千九百二年一月二十七日 古爾薩.

原書第二版著者自序

此次再版較初版多所變更，茲將其最重要者畧為舉出。

有理函數及幾個其牠的普通函數的積分法，一個平曲線的曲度 (courbure) 及閉縮線 (développée) 的研究，現已列入特別數學班的課程中，我以為刪去此等初級問題絕無窒礙。在初版中，連續函數的普通性質及自集合論 (théorie des ensembles) 中所取的概念是散見於各章，我覺得將這些理論彙為第一章作為緒論 (introduction) 更容易理會此精密的連屬性，初讀此緒論時或者感覺過於抽象 (abstrait)，然此緒論對於讀以後各章時並非不能離卻的，我簡直請閱者初次研究解析數學時，在此第一章中只取其定義及定理，若是以後感到有嚴格的需要時，再回讀其證明法。

各爾奴布爾 (Grenoble) 的理科教授 耶密爾葛冬 及 里爾 的理科教授 若望克來蘭 仍助我校對，我再致我的誠懇的感謝。

一千九百十年五月二十一日。

古爾薩。

原書第四版著者自序

此一版和前版無大區別。關於兩曲面上點的相應法我增加數頁，其中多半是關於能合曲面 (surface applicables) 的理論。牠一方面，為不增加書的篇幅計，我刪去幾個附帶問題，例如數 e 的超越性，假橢圓積分 (intégrale pseudo-elliptique) 等等，這些問題雖關重要，但非肄學士業者所必不可少的。爾內高斯繼續助我校對，我並於此深致謝意。

一千九百二十三年九月十六日。

古爾薩。

例 言

(一)是書原本共三冊,第一冊共十二章,前九章爲微積分及級數,後三章爲關於幾何的應用;現在所出此冊卽其第一冊之前九章,其後三章及原書第二冊之前半現已脫稿正籌付印,至於原書第二冊後半及第三冊正在續譯。

(二)原書有大小兩種字體,示讀者在第一次讀此書時可以略去小字部分,註解及習題亦均用小字,現在譯本對於原文係用小字部分一律加框以別之。

(三)原書凡令人注目之處均用斜字體,現在譯本則加橫綫於每字之下。

(四)所有專門名詞均於首見時兼書原文於譯名之下。

(五)爲印刷之便,將每頁下所有註解均移在每章之末,加〔註一〕,〔註二〕,……等號,以便檢查。

目 錄

第 一 章

緒 論

I. 極限 (limite). — 集合 (ensemble).....	1
1. 極限	1
2. 隔 (coupure)	2
3. 限制集合 (ensembles bornés).....	4
4. 最大極限 (la plus grande des limites).....	6
5. 收斂序列 (suites convergentes)	8
II. 函數 (fonction). — 概論	11
6. 定義.....	11
7. 連續性 (continuité)	13
8. 連續函數的性質	14
9. 不連續函數 (fonction discontinue)	17
10. 一致函數 (fonction monotone).....	20
11. 限制變分的函數 (fonction a variation bornée)	21
12. 多自變數的函數	27
13. 連續曲線 (courbes continues)	30
習題.....	33