A View from the Top: Analysis, Combinatorics and Number Theory

欧美数学经典著作译丛

“十三五”国家重点图书

分析、组合、数论纵横谈

[美] 亚历克斯·约瑟维奇（Alex Iosevich）著　成斌 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

欧美数学经典著作译丛

“十三五”国家重点图书

分析、组合、数论纵横谈

A View from the Top: Analysis, Combinatorics and Number Theory

●[美]亚历克斯·约瑟维奇(Alex Iosevich)著

●成斌 译

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

大家书系

黑版贸审字 08-2016-103 号

内容简介

本书从介绍 Cauchy-Schwarz 不等式和 Hölder 不等式开始,第 1 章到第 4 章着重介绍了如何利用这两个不等式来解决几何问题. 第 5 章到第 8 章研究了有限域上网格的几何问题,重点介绍了 Besicovitch-Kakeya 猜想. 第 9 章和第 10 组介绍了组合计数及概率论的基础知识,并利用它们来解决数论中一个有趣的概率问题. 第 11 章到第 13 章介绍了三角和、级数以及 Fourier 积分在几何和数论中的应用.

本书适用于大学、中学师生及数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

分析、组合、数论纵横谈/(美)亚历克斯·约瑟维奇(Alex Iosevich)著;成斌译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019. 4

书名原文:A View from the Top: Analysis, Combinatorics and Number Theory

ISBN 978-7-5603-7266-2

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①亚… ②成… Ⅲ. ①数学-研究 Ⅳ. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 033753 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 刘立娟
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 8.25 字数 137 千字
版 次 2019 年 4 月第 1 版 2019 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-7266-2
定 价 58.00 元

作者简介

Alex Iosevich, 1967年12月14日生于苏联的Lvov, 十一岁时随家人移民到美国, 在Illinois州的Chicago长大. 1989年毕业于Chicago大学并获得数学学士学位, 1993年获得UCLA数学博士学位, 师从Christopher Sogge. 先后在McMaster大学, Wright州立大学, Georgetown大学任教. 现执教于Missouri大学, 在此期间撰写了本书. (译者注: 作者目前是Rochester大学数学教授.)

前 言

撰写本书的想法源于和Shannon Reed的一次谈话. 那是2004年的秋天, 她当时是Missouri大学数学问题讨论班上的一名学生. 这是一门给本科高年级学生开设的综合习题课. 开设这门课程有两个目的: 其一是教学生如何综合运用各门课程中学到的数学知识; 其二是为他们参加当年12月份举行的Putnam数学竞赛提供赛前培训. 这些年来我发现这两个目的不仅没有相互冲突, 而且还能相辅相成, 学生不仅学到了解题的实战技巧, 同时还获得了从事数学研究的初步经验.

事实证明开设这样一门课程是个很好的想法, 这些年来我也积累了一些这方面的经验. 之所以有这个想法是因为我注意到许多本科生的数学知识支离破碎, 缺乏贯通: 分析课上就学分析, 代数课上就讲代数, 数论课上只关心数论, 拓扑课上只讨论拓扑问题. 没有人告诉他们, 数学的各个分支是相互联系、相互影响的. 大学里没有哪门课向他们展示数学各个分支间其实是融会贯通的. 这就是我撰写本书的动机. 当然, 全面展示出数学各分支之间的美妙联系是不切实际的, 因此我选择了自己喜欢并且熟悉的几个领域: 解析不等式、 概率论方法、组合几何, 以及数论, 并试图向读者展示这些看似毫不相干的学科之间的相互联系.

本书从介绍Cauchy-Schwarz不等式和Hölder不等式开始, 但是我们没有接着介绍更多有趣的不等式, 而是着重介绍如何利用这两个不等式来解决几何问题. 我们希望这么做能让读者认识到尽管这些不等式看上去枯燥无味, 但实际上它们却揭示出现实世界中许多现象的本质. 比如说, Cauchy-Schwarz不等式可以用来估计点集和线集的关联个数, 还可以用来估计离散点集投影的大小. 在讨论后者的时候我们还自然而然地引进了内插法这个在调和分析中极其重要的概念. 如果不通过例子, 内插法讲解起来会让人感觉过于枯燥、过于专业, 但是由于我们是在实际应用中把它引出来的, 这个概念就变得既自然又必要了. 以上内容构成了本书的前四章.

第5章到第8章我们转而研究有限域上网格的几何问题. 之所以考虑有限域是因为理解有限域上的相关问题通常不需要太多预备知识, 而且也不涉及过多的数学技巧. 我们重点介绍了Besicovitch-Kakeya猜想. 这一猜想是现代调和分析中一个很重要的问题, 是关于一个包含所有方向直线集合的大小问题. 第9章和第10章介绍了组合计数及概率论的基础知识, 并利用它们来解决数论中一个有趣的概率问题. 前几章学到的知识和技巧在此得到了充分利用. 接下来在第11章到第13章我们介绍了三角和、级数以及Fourier积分在几何和数论中的应用.

本书追求的不是证明方法是否最漂亮, 而是是否能够最清楚地展示一个数学思想的产生过程, 从而有效地激发读者研究数学的兴趣. 当我们需要某些专门的数学方法时, 我们总是在解决问题的过程中顺理成章地引入相关的概念证明相关的结论, 有时甚至刻意不去提及该结论究竟属于哪个数学分支. 这么做的目的就是要告诉读者, 数学研究不是拿着书本照猫画虎, 而是需要探索和发现, 其过程充满艰辛, 而其结果则经常出人意料.

本书讨论的问题虽然不全是最新的科研问题, 但是其中涉及的大多是数学研究中既常用又重要的方法. 本书的重点就是展示这些方法是如何巧妙地运用在许多看似不同的数学领域中的.

我希望读者在阅读本书的时候能下一番苦功, 而不是把它当作茶余饭后的消遣. 希望读者纸笔随身, 把所有演算统统自己过一遍, 要有读一页书算十页草稿纸的思想准备. 总之, 学数学不是看西洋景, 动眼不动脑不可能把数学学好. 看到一个定理马上就要想是否能由此得到一个新的定理, 看到一个证明马上就想是否能找到一个更好的证明, 这才是学数学的正确方向. 当然, 最重要的是享受这个过程.

本书面向的读者是具有高中数学背景并且喜欢钻研数学的爱好者. 个别需要多元微积分的章节作者都做了说明. 另外, 本书涉及的问题对于数学研究生甚至数学工作者来说也同样有趣. 尽管书中介绍的大多是各个领域熟知的方法, 但我们看待每个问题的角度, 以及对各个分支之间相互关系的理解或许对从事数学研究的人士也会有所裨益.

目 录

第 1 章　Cauchy-Schwarz 不等式

本章给出Cauchy-Schwarz不等式的一种证法, 它乍看起来有些别扭, 但慢慢地你会发现它其实很优美. 我们不打算走先引进概念再给出证明的老路, 而是反其道而行, 在证明过程中介绍有关概念. 具备高中数学知识的读者就能看懂本章内容. 想了解更多知识的读者可以阅读Steele的著作[16], 书写得相当精彩.

在讨论细节之前先谈一下我们对不等式这一概念的理解. 一拾一箩筐的平凡不等式数不胜数. 比如不等式 $2 \leqslant 3$, 虽然是对的, 但是没什么价值. 相反, 有价值的不等式往往看上去好像不太对, 但又不能说它错. 这种"似对非对"是一切知识的共同特征. 如果你说美国比乍得人均收入高, 这话当然没错, 但这是句废话. 可是如果你说刚果的土地面积接近美国的三分之二, 这话听起来就既准确又新颖. 直白地说, 获取真知就好比在谬误的崖边游走, 有惊而无险. 现在就开始我们的惊险之旅.

设a和b为任意两个实数, 则

$$(a-b)^2 \geqslant 0.$$

你一定好奇为何讲这么一个简单不等式, 但是如果你把上式左边展开, 就得到

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0,$$

也就是

$$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}. \tag{1.1}$$

现在考虑

$$A_N = \sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 + \cdots + a_N,$$

$$B_N = \sum_{k=1}^{N} b_k = b_1 + \cdots + b_N,$$

其中$a_1,\cdots,a_N$及$b_1,\cdots,b_N$为任意实数. 记

$$X_N=\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Y_N=\left(\sum_{k=1}^{N}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

利用不等式(1.1)得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}a_kb_k&=X_NY_N\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{X_N}\cdot\frac{b_k}{Y_N}\\&\leqslant X_NY_N\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a_k}{X_N}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{b_k}{Y_N}\right)^2\right].\end{aligned}\tag{1.2}$$

习题 1.1 证明: 若C是一个常数, 则

$$\sum_{k=1}^{N}Ca_k=C\sum_{k=1}^{N}a_k.$$

习题 1.2 证明: 等式

$$\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{N}a_k+\sum_{k=1}^{N}b_k.$$

利用习题1.1和1.2, 不等式(1.2)的右边可以写成

$$\begin{aligned}&X_NY_N\frac{1}{2}\frac{1}{X_N^2}\sum_{k=1}^{N}a_k^2+X_NY_N\frac{1}{2}\frac{1}{Y_N^2}\sum_{k=1}^{N}b_k^2\\=&X_NY_N\frac{1}{2}\frac{1}{X_N^2}X_N^2+X_NY_N\frac{1}{2}\frac{1}{Y_N^2}Y_N^2\\=&\frac{1}{2}X_NY_N+\frac{1}{2}X_NY_N=X_NY_N.\end{aligned}\tag{1.3}$$

由式(1.2)和式(1.3), 我们得到Cauchy-Schwarz不等式:

定理 1.4 若a_k,b_k为实数, 则

$$\sum_{k=1}^{N}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{N}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{1.5}$$

习题 1.3 证明: 不等式(1.5)中的等号成立当且仅当$a_k=b_k$对所有k成立.

提示: 我们的出发点在哪里? 显然不等式$(a-b)^2\geqslant 0$中等号成立当且仅当$a=b$.

对上面的技巧稍做改动就可以证明下面的Hölder不等式，它是Cauchy-Schwarz不等式的推广.

定理 1.6 假设$1 < p < \infty$，p的对偶p'满足等式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

则

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{N}|b_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.7}$$

按照Cauchy-Schwarz不等式的证明思路，我们断言证明Hölder不等式可以归结为证明

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}. \tag{1.8}$$

习题 1.4 证明Hölder不等式可由不等式(1.8)得到.

证明不等式(1.8)只需要一元微积分. 如果你不熟悉的话，姑且承认它的正确性.

以下假定读者熟悉初等微积分. 记$a^p = \mathrm{e}^x, b^{p'} = \mathrm{e}^y$. 令$\dfrac{1}{p}=t$，则$0 \leqslant t \leqslant 1$. 式(1.8)等价于(译者注: 原文此处有误.)

$$\mathrm{e}^{tx+(1-t)y} \leqslant t\mathrm{e}^x + (1-t)\mathrm{e}^y.$$

设

$$F(t) = t\mathrm{e}^x + (1-t)\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{tx+(1-t)y}.$$

因为$F(0) = F(1) = 0$，且

$$F''(t) = -(x-y)^2\mathrm{e}^{tx+(1-t)y} \leqslant 0,$$

$F(t)$是在端点$t=0$和$t=1$取0值的二次可微凸函数，所以必定非负.

习题 1.5 用以下方法证明Cauchy-Schwarz不等式. 设$\boldsymbol{a} = (a_1,\cdots,a_N), \boldsymbol{b} = (b_1,\cdots,b_N)$. 定义

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = a_1b_1+\cdots+a_Nb_N,$$

及

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = a_1^2+\cdots+a_N^2.$$

Cauchy-Schwarz不等式具有以下形式

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leqslant \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|.$$

提示: 将$\langle \boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b} \rangle$展成关于$t$的二次函数, 然后求其最小值.

习题 1.6 证明以下与Cauchy-Schwarz不等式相关的不等式. 设$x_1, \cdots, x_n$为正实数, 证明

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \tag{1.9}$$

提示: 该不等式的证法有好几种, 我建议使用下面的方法. 先证明当$n = 2$时不等式成立, 然后用数学归纳法推广到$n = 2^k, k = 1, 2, \cdots$的情形. 然后再证明如果不等式对$n + 1$成立, 必然对$n$也成立, 从而填补2的幂次间的空缺. 另一种证法是令$a_j = \mathrm{e}^{\log(a_j)}$, 利用指数函数的凸性, 即对任意$t_j \geqslant 0, t_1 + \cdots + t_n = 1$, 不等式

$$\mathrm{e}^{t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n} \leqslant t_1 \mathrm{e}^{x_1} + \cdots + t_n \mathrm{e}^{x_n}$$

成立.

习题 1.7 设$x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_n$为任意正实数，则

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \leqslant \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^{a_1 + \cdots + a_n}}{a_1 \cdots a_n} \cdot a_1^{a_1} \cdots a_n^{a_n}.$$

是否可以选取a_j使得该不等式退化为不等式(1.7)和不等式(1.9)? 如果是, 请给出证明; 否则, 说明原因. 提示: 考虑三个不等式的等号何时成立.

习题 1.8 设$p_j > 1$, 且

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

把不等式(1.8)推广为

$$a_1 \cdots a_n \leqslant \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n}.$$

这一不等式的一种证法是利用习题1.7的结论. 这里要求读者利用Lagrange乘子法来证. 事实上, 设

$$f(a_1, \cdots, a_n) = \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n},$$

及

$$g(a_1, \cdots, a_n) = a_1 \cdots a_n.$$

然后对任意正数c, 求出约束条件$g(a_1, \cdots, a_n) = c$下函数$f(a_1, \cdots, a_n)$的最小值.

注 记

许多高中生其实接触过Cauchy-Schwarz不等式, 至少是$N=2$的情形, 只不过他们没有意识到而已. 事实上, 设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$为平面上任意两点. 利用高中数学知识, 我们得到

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2=|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|\cdot\cos(\theta),$$

其中$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, θ为$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$之间的夹角. 显然

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|.$$

这就是当$N=2$时的Cauchy-Schwarz不等式.

在d维空间$\mathbb{R}^d$中, 两个向量决定一个平面. 你是否能利用这一事实给出Cauchy-Schwarz不等式的另一个证明? 如果能的话, 我们就得到了Cauchy-Schwarz不等式的第三个证明. 想想前两个证明是否需要假设不等式左边的和式$\sum_{k=1}^N a_kb_k$有限, 第三个证明呢?

第 2 章　估计大象体积：$\mathbb{R}^3$中的投影

本章将利用Cauchy-Schwarz不等式给出一个有限集合元素个数的上界, 该上界由有限集在二维坐标平面投影的元素个数所决定. 大多数介绍这一结果的文献都过于注重技巧, 因此读起来索然无味. 我们不打算这么做. 设想你爷爷把一头大象作为遗产留给了你. 这头大象硕大无朋, 以至于找不到一台秤来秤它的体重. 你或许想到了通过测量体积来估计它的体重, 可是这么个大家伙体积怎么量呢? 一个办法是在大象屁股后面和身体侧面分别垂直挂一张很大的床单, 在它脚底下也铺上一张很大的床单，然后拿水枪分别从正面、侧面以及上面朝大象喷水. 如果大象的体积很大的话，那么至少有一张床单上干燥部分的面积会很大！即使大象体积大是因为它虽然很瘦但是很高, 我们的办法也同样有效. 因为在这种情况下, 虽然大象屁股后面和脚底下的床单干燥部分都很小, 但是挂在它侧面的床单干燥部分却会很大. 这些事实都显而易见. 本章的目的就是把这一直观想法严格化.

假设S_N是三维欧氏空间

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_j\text{为实数}\}$$

中包含N个元素的有限集. 给定$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, 定义投影

$$\pi_1(x) = (x_2, x_3), \pi_2(x) = (x_1, x_3), \text{及}\ \pi_3(x) = (x_1, x_2).$$

我们知道$\#S_N = N$, 问题是$\pi_1(S_N), \pi_2(S_N)$以及$\pi_3(S_N)$中包含多少个元素呢? 在考虑复杂情形之前先看几个简单例子, 看是否能从中受到启发.

设

$$S_N = \{(0, 0, k) : k\text{为整数}, k = 0, 1, \cdots, N-1\}.$$

集合S_N包含N个元素, 那么$\pi_3(S_N)$呢? 它包含1个元素, 因为它是单点集$\{(0,0)\}$, 而$\pi_1(S_N)$和$\pi_2(S_N)$都是$\{(0,k) : k\text{为整数}, k = 0, 1, \cdots, N-1\}$, 因此

都含有N个元素. 也就是说, 其中一个投影很小, 而另外两个很大.

考虑

$$S_N=\{(k,l,0):k,l\text{为整数},1\leqslant k,l\leqslant\sqrt{N}\},$$

其中$\sqrt{N}$为整数. 和以前一样, $\#S_N=N$. 三个坐标投影怎么样呢? 因为S_N已经在(x_1,x_2)平面上, 所以

$$\pi_3(S_N)=\{(k,l):k,l\text{为整数},1\leqslant k,l\leqslant\sqrt{N}\}.$$

因此$\#\pi_3(S_N)=N$. 另一方面

$$\pi_2(S_N)=\{(k,0):k\text{为整数},1\leqslant k\leqslant\sqrt{N}\},$$

和

$$\pi_1(S_N)=\{(l,0):l\text{为整数},1\leqslant l\leqslant\sqrt{N}\},$$

都包含$\sqrt{N}$个元素. 我们再次看到不可能所有投影都小.

现在我们从几何角度来看这个问题. 第一个例子是一维的, 因为所有点都落在一条直线上. 第二个例子是二维的, 因为所有点都在一个平面上. 现在我们看一个真正三维的例子, 它关于三个坐标都是对称的. 令

$$S_N=\{(k,l,m):k,l,m\text{为整数},1\leqslant k,l,m\leqslant N^{\frac{1}{3}}\},$$

其中$N^{\frac{1}{3}}$为整数. 这时仍然有$\#S_N=N$. 三个投影看上去完全相同, 因为投影

$$\pi_1(S_N)=\{(l,m):l,m\text{为整数},1\leqslant l,m\leqslant N^{\frac{1}{3}}\}$$

的点数为$N^{\frac{2}{3}}$, $\#\pi_2(S_N),\#\pi_3(S_N)$也同样是$N^{\frac{2}{3}}$.

总结一下我们得到了什么. 在三个投影大小一样的时候, 每个投影都有$N^{\frac{2}{3}}$个元素. 我们将会看到, 对于任意一个集合S_N, 三个投影中至少有一个包含$N^{\frac{2}{3}}$个元素. 我们将利用Cauchy-Schwarz不等式证明对称的情形是最优的(具体含义有待解释).

2.1 二维情形

在研究一般情形之前, 先来讨论二维的情形, 借此获得一些思路. 取$\mathbb{R}^2$中的一个N点集合, 考察其向两个坐标轴的投影, 看是否能够找到一个直观的方法

证明这两个投影中必有一个包含至少$C\sqrt{N}$个点. 设S_N为我们考虑的集合. 如果$x \in S$, 定义$\chi_S(x)=1$, 否则$\chi_S(x)=0$. (译者注: 函数$\chi_S(x)$称为集合S的特征函数.) 注意到

$$\chi_{S_N}(x_1,x_2) \leqslant \chi_{\pi_1(S_N)}(x_2)\cdot\chi_{\pi_2(S_N)}(x_1)$$

(见习题2.1) 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{x_1,x_2}\chi_{S_N}(x_1,x_2) &\leqslant \sum_{x_1,x_2}\chi_{\pi_1(S_N)}(x_2)\cdot\chi_{\pi_2(S_N)}(x_1)\\ &= \sum_{x_1}\chi_{\pi_2(S_N)}(x_1)\cdot\sum_{x_2}\chi_{\pi_1(S_N)}(x_2)\end{aligned}$$

(为什么?) 因此

$$N=\#S_N \leqslant \#\pi_1(S_N)\cdot\#\pi_2(S_N) \leqslant \left(\max_{j=1,2}\#\pi_j(S_N)\right)^2.$$

这样我们就得到

$$\max_{j=1,2}\#\pi_j(S_N) \geqslant \sqrt{N},$$

这正是我们要证的.

虽然二维情形没有高维那么复杂有趣, 但是所依赖的直觉是一样的. 我们换个角度来看二维的情形. 姑且假定$\#\pi_1(S_N) < \sqrt{N}$, 那么按照π_1的定义, S_N最多有$\sqrt{N}$行. 另一方面, 因为这些行里总共有N个点, 所以至少有一行上有$\frac{N}{\sqrt{N}}=\sqrt{N}$个点, 也就是说, $\#\pi_2(S_N) \geqslant \sqrt{N}$. 因此我们有$\#\pi_1(S_N) \geqslant \sqrt{N}$或$\#\pi_2(S_N) \geqslant \sqrt{N}$. 这就给出了二维情形的另一个证明. 第一个证明很程式化, 无非是一些符号颠来倒去, 而第二个证明不仅直观, 而且紧扣投影这一主题. 两个证明是否果真不同? 如果你试着几何地解释第一种证法的每一步, 就会发现两种证法实质上完全相同.

2.2 三维情形

三维情形不能简单地由二维推广得到. 为了搞清为什么, 假设$\#\pi_1(S_N) < N^{\frac{2}{3}}$. 这意味着$S_N$中的$(x_2,x_3)-$平面上的点不超过$N^{\frac{2}{3}}$个, 但是$S_N$共有$N$个点, 因此其中必有一个平面上包含$N^{\frac{1}{3}}$个点. 但是这个结论不够强, 还需要更加精细的估计. 这条路其实还是可以走的, 不过需要适当的修正, 我建议读者自己尝试一下. 我们这里采取另外一种方法, 目的是让大家见识一

下Cauchy-Schwarz不等式有多漂亮, 有多有用.

在证明三维情形之前, 先来温习一个基本概念. 设S为一个集合, 如果$x \in S$, 其特征函数$\chi_S(x)=1$, 否则$\chi_S(x)=0$.

习题 2.1 S_N如上定义, 则

$$\chi_{S_N}(x) \leqslant \chi_{\pi_1(S_N)}(x_2,x_3)\chi_{\pi_2(S_N)}(x_1,x_3)\chi_{\pi_3(S_N)}(x_1,x_2). \tag{2.1}$$

分别构造S_N使得式(2.1)中不等号对某些x严格成立和对所有x严格成立. 什么样的集合能使等号恒成立?

利用式(2.1)我们得到

$$\begin{aligned}
N &= \#S_N=\sum_x \chi_{S_N}(x)\\
&\leqslant \sum_x \chi_{\pi_1(S_N)}(x_2,x_3)\chi_{\pi_2(S_N)}(x_1,x_3)\chi_{\pi_3(S_N)}(x_1,x_2)\\
&= \sum_{x_1,x_2}\chi_{\pi_3(S_N)}(x_1,x_2)\sum_{x_3}\chi_{\pi_1(S_N)}(x_2,x_3)\chi_{\pi_2(S_N)}(x_1,x_3)\\
&\leqslant \left(\sum_{x_1,x_2}\chi^2_{\pi_3(S_N)}(x_1,x_2)\right)^{\frac12}\times\\
&\quad \left(\sum_{x_1,x_2}\left(\sum_{x_3}\chi_{\pi_1(S_N)}(x_2,x_3)\chi_{\pi_2(S_N)}(x_1,x_3)\right)^2\right)^{\frac12}\\
&= I\times II.
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I &= \left(\sum_{x_1,x_2}\chi^2_{\pi_3(S_N)}(x_1,x_2)\right)^{\frac12}\\
&= \left(\sum_{x_1,x_2}\chi_{\pi_3(S_N)}(x_1,x_2)\right)^{\frac12}\\
&= \left(\#\pi_3(S_N)\right)^{\frac12},
\end{aligned}$$