新世纪高等学校规划教材·数学系列

概率与数理统计习题精解

（第2版）

配北京师范大学《概率与数理统计（第2版）》

王颖喆　程丽娟　等◎编著

GAILYU YU SHULI TONGJI XITI JINGJIE

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材 · 数学系列

概率与数理统计习题精解

（第2版）

王颖喆 程丽娟 等◎编著

GAILYU YU SHULI TONGJI
XITI JINGJIE

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率与数理统计习题精解/王颖喆，程丽娟等编著.
—2版.— 北京 :北京师范大学出版社，2019.1
（新世纪高等学校规划教材．数学系列）
ISBN 978-7-303-23761-6

Ⅰ．①概… Ⅱ．①王… ②程… Ⅲ．①概率论－高等学校－题解②数理统计－高等学校－题解 Ⅳ．①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 105305 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 www.jswsbook.com
电子信箱 jswsbook@163.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：天津中印联印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：730 mm×980 mm　1/16
印　　张：21.75
字　　数：348 千字
版　　次：2019 年 1 月第 2 版
印　　次：2019 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：49.80 元

策划编辑：梁志国　刘风娟　责任编辑：梁志国 刘风娟
美术编辑：刘　超　装帧设计：刘　超
责任校对：赵非非　黄　华　责任印制：赵非非

编者的话

本书是配合北京师范大学出版社出版的《概率与数理统计》(第 2 版)(王颖喆编著)而编写的一本教学辅导资料，也可以单独使用. 可供高等院校本专科各专业学生作为概率论与数理统计这一课程的学习参考书，也可作为研究生入学考试数学科目中概率统计部分的辅导书.

本书是按章节编排的，每一章包括三部分内容：第一部分是内容提要，概述这一章的主要内容，包括了配套教材中重要的概念、公式和定理. 这部分内容不仅给出了明晰的学习线索和复习大纲，而且便于读者在使用本书时快速地查阅公式和定理. 第二部分是思考与练习的解答. 原教材中的思考与练习部分是非常重要的内容，总结了作者在多年教学中发现的学生容易犯的错误，可以帮助读者更好地理解和掌握基本概念、基本方法. 这部分题目较多，有一定的难度和深度. 在教学过程中，学生对这部分内容提问最多，本书几乎对每一题都给出了非常详细的解答. 相信通过学习这部分内容，读者能对概率统计的基本思想和基本原理有更深刻的认识. 可以说，这部分的内容对读者学习概率统计起到的是画龙点睛的重要作用. 第三部分是这一章的习题解答，包括了对所有题目的详细解答. 有的题目给出了多种解法，有的题目给出解答后还有附注，指出需要注意的问题、易犯的错误等.

任何一本习题解答书的出版都是有利有弊的. 它可以帮助读者核对自己的题解是否正确，可以使读者减少独自苦思冥想的时间，也不用再为一道题在浩瀚的书海中翻寻. 但是也有人会因此偷懒，不再独立思考. 本书中很多题的解答并不是唯一的，希望大家在看答案之前，一定要自己独立思考，可能你独具个性的解答更精彩. 即便你的解答不正确，通过核对，查找原因，你会茅塞顿开，对所学内容会有更深地领悟. 而先看答案，可能让你形成思维定势，无法再产生新的想法. 总之，希望这本书成为提升读者学习能力和学习效率的工具，而不是偷懒耍滑的“帮凶”. 其实大家都知道,过程远比结果重要.

参与本书编写的还有朱思平和甘蕾蕾. 朱思平参与编写了习题一和习题六的解答，甘蕾蕾参与编写了习题二和习题七的解答. 由于作者水平以及其他因素所限，疏漏在所难免，欢迎大家提出意见和建议. 与编著者联系的电子邮箱为 wangyz@bnu.edu.cn.

最后，编者对北京师范大学出版社表示衷心的感谢!

编 者 2018 年 8 月

关于本书中部分记号的说明

$\mathbb{R}$：实数集,或一维欧氏空间,或实直线.

$\mathbb{R}^n$：n 维欧氏空间.

$\mathbb{N}$：自然数集合.

Ω：样本空间.

$\varnothing$：空集.

A_n^k：从 n 个不同的元素中任取 k 个所能得到的不同的排列数.

C_n^k：从 n 个不同的元素中任取 k 个所能得到的不同的组合数.

$X, Y, Z, \cdots; \xi, \eta, \zeta, \cdots$：表示随机变量.

$\sum\limits_{i=1}^n x_i$ 或 $\sum_{i=1}^n x_i$：表示求和: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

$\prod\limits_{i=1}^n x_i$ 或 $\prod_{i=1}^n x_i$：表示求积: $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$.

$\vee$：表示两者之间求最大.

$\wedge$：表示两者之间求最小.

$B(n,p)$：参数为n,p的二项分布.

$P(\lambda)$：参数为λ的泊松分布.

$Geo(p)$：参数为 p 的几何分布.

$H(n,N,M)$：参数为 n,N,M 的超几何分布.

$U(a,b)$：(a,b) 区间上的均匀分布.

$E(\lambda)$：参数为 λ 的指数分布.

$N(\mu,\sigma^2)$：参数为 μ, σ^2 的正态分布.

$\varphi(x)$：标准正态分布的概率密度.

$\Phi(x)$：标准正态分布的分布函数.

$\vec{x}$：表示向量.

另外, 集合上加“| |”表示对集合的度量, 即计数有限集合中元素的个数, 或表示几何区域的长度(一维情形)、面积(二维情形)或体积(三维情形).

本书例题中的最后计算结果除特殊情况, 一般保留小数点后 4 位有效数字.

目 录

第 1 章　随机事件与概率

一、内容提要

1. 随机事件的基本概念

(1) 随机试验: 在概率论中, 把具有以下 3 个特征的试验称为随机试验:

1° 可以在相同的条件下重复地进行;

2° 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

(2) 随机事件: 随机试验可以有多个可能结果, 可以是数字的, 也可以是文字性的描述, 尽管不能预知每次试验的结果, 但可以明确试验的所有可能结果, 将每一个可能的结果称为随机事件, 简称为事件.

随机事件可以分为基本事件(不可以分解的事件)和复合事件(可以分解的事件)两种类型.

(3) 样本空间: 称基本事件为样本点或点, 用小写的 ω 来表示; 所有这些样本点组成的集合称为样本空间, 用希腊字母 Ω 表示. 随机试验中的每一个不可分解的结果可以用一个且只能用一个样本点来表示. 因此随机事件就是包含了一个或多个样本点的集合, 是样本空间的子集, 用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 来表示.

2. 事件间的关系与运算

(1) 事件的包含关系: 若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生, 则称事件 B 包含事件 A, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 此时 A 是 B 的子集.

(2) 事件相等或等价: 当事件 B 包含事件 A 且事件 A 也包含事件 B 时, 称事件 A 与事件 B 相等(等价), 记为 $A = B$.

(3) 事件的和:"两事件 A 与 B 中至少有一件发生"称为事件 A 与 B 的和, 记为 $A \cup B$ 或者 $A + B$. $A + B$ 发生等价于 A 发生或者B 发生.

(4) 事件的积: "两事件 A 与 B 都发生"称为事件 A 与 B 的积, 记为 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$ 或 AB. AB 发生等价于 A 发生而且 B 发生.

(5) 事件的差: 即集合的差, 记为 $A-B$, 表示去掉 A 中 A 与 B 相交的部分, 故也可表示为 $A-AB$. $A-B$ 发生等价于 A 发生而 B 不发生.

(6) 事件的互不相容: 若两事件 A 与 B 不可能同时发生, 也就是说它们没有共同的样本点, 即 $AB=\varnothing$, 则称事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的). $AB=\varnothing$ 等价于 A 与 B 不同时发生.

(7) 对立事件: 若两事件 A 与 B 是互不相容的, 且它们的和是必然事件, 即$A\cup B=\Omega$, $AB=\varnothing$, 则称事件 A 与 B 互为对立事件, 称事件 A 是事件 B 的对立事件或逆事件, 或者称事件 B 是事件 A 的对立事件或逆事件, 记为 $A=\overline{B}$, $B=\overline{A}$. $\overline{A}$ 发生等价于 A 不发生.

(8) 事件的运算律:

1° 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

2° 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

3° 分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

4° 对偶律: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

3. 概率的定义

(1) 古典概率: 假设 Ω 为某个随机试验的样本空间, Ω 中有有限个样本点, 不妨设为 n 个, 且每个样本点发生的可能性相同. 设事件A中的样本点数为 r 个, 则定义事件A发生的概率为 r/n, 记为 $P(A)$, 即

$$P(A)=\frac{A\text{ 中的样本点数}}{\Omega\text{ 中的样本点数}}=\frac{r}{n}.$$

这样计算的概率称为古典概率.

(2) 几何概率: 假设某个随机试验的样本空间 Ω, 能够对应于某个可度量的区域 G, 即 Ω 中的样本点与 G 中的点一一对应. 且 G 中任一区域出现的可能性大小与该区域的几何度量成正比, 而与该区域的位置和形状无关, 称这样的随机试验为几何概型的试验. 且定义试验中事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 对应区域的几何度量}}{\Omega\text{ 对应区域 }G\text{ 的几何度量}}$$

其中, 如果 G 是一维的、二维的或三维的, 那么 G 的几何度量分别为长度、面积或体积. 称这样定义的概率为几何概率.

(3) 统计概率: 设有随机试验 E, 若当试验的次数充分大时, 事件 A 的发生频率稳定在 0 与 1 之间的某个数字 p 附近摆动, 则称数 p 为事件 A 的概率, 记为: $P(A)=p$. 称这样定义的概率为统计概率.

(4) 概率的公理化定义: 设 Ω 为一随机试验的样本空间, 设此试验中所有的事件(包括复合事件和基本事件)构成的集合为 $\mathcal{F}$. 定义从 $\mathcal{F}$ 到区间 [0, 1] 之间的一个映射 P, 即对任意的 $A\in\mathcal{F}$, $P(A)\in[0,\ 1]$, 且 $P(A)$ 满足下列条件:

1° 非负性: 对任意的 $A\in\mathcal{F}$, $P(A)\geqslant 0$;

2° 规范性: $P(\Omega)=1$;

3° 可列可加性: 设 $A_1,\ A_2,\cdots$ 是可列个两两互不相容的事件, 即对于 $i\neq j$, $A_iA_j=\varnothing,\ i,\ j=1,\ 2,\cdots$, 则有

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

称这样定义的集合函数 P 作用在事件 A 上得到的值为事件 A 的概率. 称三元组 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间.

4. 概率的性质

设 A, B 为同一个样本空间中的两个事件, 则有如下 3 条性质:

(1) 非负性: $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性: $P(\Omega)=1$;

(3) 可加性: 若 A 与 B 不相容, 则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

根据这 3 条性质, 可以证明下述在概率的计算中常用的若干性质:

(4) 不可能事件的概率为零, 即 $P(\varnothing)=0$;

(5) 有限可加性: 若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 两两不相容, 则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k);$$

(6) 对立事件的概率: $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(7) 减法公式: $P(B-A)=P(B)-P(AB)$;

特别地, 若 $A\subseteq B$, 则$P(B-A)=P(B)-P(A)$;

(8) 单调性: 若 $A\subseteq B$, 则$P(A)\leqslant P(B)$;

(9) 加法公式: 对于任意两个事件 A 和 B, 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

这个性质可以推广为求多个事件之和的概率的一般公式: 对于任意的 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

称之为若当公式或容斥原理.

(10)* 可数可加性: 对任何两两不相容的事件列 $\{A_n\}$ 有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

5. 条件概率

随机试验的样本空间为 Ω. 设 A, H 为两个随机事件, 且 $P(H)>0$, 称

$$P(A\mid H)=\frac{P(AH)}{P(H)}$$

为事件 H 发生的条件下事件 A 的条件概率.

6. 乘法公式

(1) 设 $P(H)>0$, 则有 $P(AH)=P(A\mid H)\cdot P(H)$.

(2) 设 A,B,C 是 3 个事件, 且 $P(ABC)>0$, 则

$$P(ABC)=P(A\mid BC)\cdot P(B\mid C)\cdot P(C).$$

(3) 设 A_1, $A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件, $n\geqslant 2$, 且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2\mid A_1)P(A_1).$$

7. 全概率公式

设 Ω 为试验的样本空间, A 为一个随机事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分(分割), 则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i).$$

8. 贝叶斯公式

设 Ω 为试验的样本空间, A 为一个随机试验, 且 $P(A)>0$. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分(分割), 则

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A \mid B_k) P(B_k)}, \quad i=1,2, \cdots, n.$$

9. 事件的独立性

(1) 如果 A, B 是同一随机试验的两个事件, 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$, 那么称事件 A 与 B 相互独立.

(2) 设事件 A 与 B 相互独立, 则当 $P(B)>0$ 时, $P(A)=P(A \mid B)$; 当 $P(A)>0$ 时, $P(B)=P(B \mid A)$. 当 $P(A)>0$, $P(B)>0$ 时, 无条件概率等于条件概率也是 A 与 B 是相互独立的充要条件.

(3) 设事件 A 与 B 相互独立, 则 A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 B, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(4) 两两相互独立: 设 $A_1, \cdots, A_n$ 是同一随机试验中的 n 个事件. 如果对任意的$1 \leqslant i<j \leqslant n$, 有 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$, 则称事件 $A_1, \cdots, A_n$ 两两相互独立.

(5) 相互独立: 如果对任意的 s $(1 \leqslant s \leqslant n)$, 及任意的$1 \leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s \leqslant n$ 都有 $P(\bigcap\limits_{k=1}^{s} A_{i_k})=\prod\limits_{k=1}^{s} P(A_{i_k})$, 那么称事件 $A_1, \cdots, A_n$ 相互独立.

10. 二项概率公式

(1) n 重贝努利概型: 同一种试验, 在相同的试验条件下, 重复进行 n 次, 每次试验的可能结果为两个, 而且每次试验结果相互独立, 称这样的一系列试验为 n 重贝努利概型.

(2) 二项概率公式: 在 n 重贝努利试验中, 设每次试验时, 事件 A 发生的概率为$P(A)=p\,(0<p<1)$, 则 $P(\overline{A})=q=1-p$. 那么在 n 次试验中, 事件 A 发生 k 次的概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,2, \cdots, n$.

二、思考与练习解答

思考与练习 1.2

1. 写出以下随机试验的样本空间:

(1) 抛 3 枚硬币;

(2) 把两个不同颜色的球放入两个格子;

(3) 把两个相同颜色的球放入两个格子;

(4) 灯泡的寿命(单位: h);

(5) 某产品的不合格率(%).

答 分别解答如下:

(1) 记硬币正面向上为 H, 反面向上为 T, 设硬币不可辨, 则样本空间为 $\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,T),(T,T,T)\}$. 如果硬币可辨, 则样本空间为 $\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,T,H),$ $(T,H,T),(T,T,T)\}$. 如果实验的目的仅是为了观察正面向上的硬币的个数, 则相应的样本空间可以表示为 $\Omega=\{0,1,2,3\}$.

(2) 记这两个不同颜色的球分别是 b 和 r, 则 $\Omega=\{(\underline{br},\underline{0}),\ (\underline{b},\underline{r}),\ (\underline{r},\underline{b}),$ $(\underline{0},\underline{br})\}$. 其中 $(\underline{br},\underline{0})$ 表示第一个格子中有两个球, 第二个格子中无球, 其他依此类推.

(3) $\Omega=\{(\underline{2},\underline{0}),(\underline{1},\underline{1}),(\underline{0},\underline{2})\}$. 其中 $(\underline{2},\underline{0})$ 表示第一个格子中有两个球, 第二个格子中无球, 其他依此类推.

(4) $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x<+\infty\}$.

(5) $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

2. 袋中有 10 个球, 分别写有号码 1～10, 其中 1, 2, 3, 4, 5 号球为红球; 6,7, 8 号球为白球; 9,10 号球为黑球.写出以下试验的基本事件及样本空间:

(1) 从袋中任取一个球, 观察其颜色;

(2) 从袋中任取一个球, 观察其号码.

答 分别解答如下:

(1) 基本事件有 3 个: $A=\{$取到的是红球$\}$, $B=\{$取到的是白球$\}$, $C=\{$取到的是黑球$\}$. $\Omega_1=\{$红球, 白球, 黑球$\}$.

(2) 基本事件有 10 个: $A_i=\{$取到的是第 i 号球$\}$, $i=1,2,\cdots,10$. $\Omega_2=\{1,2,\cdots,10\}$.

3. 设A,B,C 为任意 3 事件, 判断以下等式或命题是否正确.

(1) $A-B=A\overline{B}$;

(2) $(A+B)-C=A+(B-C)$;

(3) $A+B=(A-AB)+B$;

(4) $(A+B)-A=B$;

(5) $\overline{(A+B)}C=\overline{A}C+\overline{B}C$;

(6) $AB+BC+CA\supseteq ABC$;

(7) 若 $A=B$, 则 A,B 为同一事件;

(8) 若 $A=B$, 则 A,B 同时发生或 A,B 同时不发生;

(9) A,B 互不相容就是 A,B 互不相干;

(10) A,B 都发生与 A,B 都不发生是对立事件;

(11) A,B 为对立事件, 则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互为对立事件.

答 (1) (3) (6) (7) (8) (11) 正确, 其他错误.

4. 设 A,B,C 表示 3 个随机事件, 试将以下事件用 A,B,C 表示出来.

(1) 仅 A 发生;

(2) A,B,C 都发生;

(3) A,B,C 都不发生;

(4) A,B,C 不都发生;

(5) A,B,C 中至少有一事件发生;

(6) A,B,C 中恰有一事件发生;

(7) A,B,C 中至少有二事件发生;

(8) A,B,C 中最多有一个发生;

(9) A 不发生, 且 B,C 中至少有一事件发生.

答 将以上事件用事件 A,B,C 表示如下: