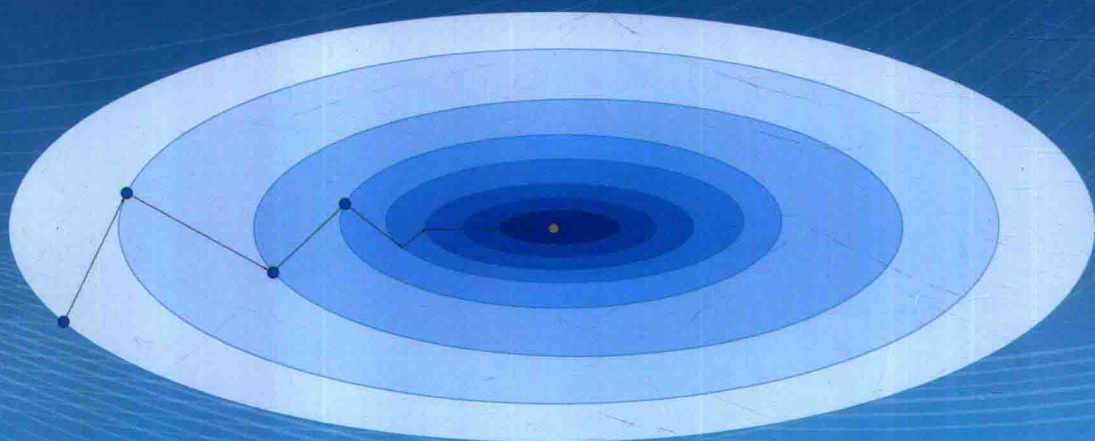


高等工程数学

■ 朱元国 范金华 张 军 等 编



科学出版社

高等工程数学

朱元国 范金华 张 军 等 编



科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书内容体现经典与现代的紧密结合,符合高校工科专业对数学的基本需求.主要内容有距离与范数,包括向量范数与矩阵范数;矩阵的标准形与特征值计算,包括矩阵的 Jordan 标准形及特征值的幂迭代法;矩阵分解与广义逆矩阵,包括三角分解、满秩分解和奇异值分解;线性方程组的数值解法,包括直接解法与迭代解法;最优化方法,包括单纯形法、最优性条件、牛顿法、共轭梯度法、罚函数法、组合优化问题的模拟退火算法与遗传算法;函数逼近与数据拟合,包括多项式插值、最小二乘法、小波变换;偏微分方程及其数值解法,包括定解问题、解析方法、有限差分法、有限元方法;统计分析,包括一元及多元线性回归、贝叶斯统计、多元正态分布的参数估计与假设检验.

本书适合作为工科高校研究生教材,也可作为理科、管理学等学科研究生、教师、相关研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等工程数学/朱元国等编. —北京:科学出版社,2019.6
ISBN 978-7-03-061610-4

I. ①高… II. ①朱… III. ①工程数学-研究生-教材 IV. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 114487 号

责任编辑:胡 凯 许 蕾 沈 旭/责任校对:杨聪敏

责任印制:师艳茹/封面设计:许 瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

石家庄继文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 6 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2019 年 6 月第一次印刷 印张:22 1/2

字数:554 000

定价:89.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《高等工程数学》

编写人员

(排名不分先后)

朱元国 范金华 张 军 饶 玲 严 涛
刘红毅 王海侠 李宝成 陆中胜 侯传志

前 言

“双一流”建设是新时代我国高等教育的重大改革举措,是高等学校进入新时期、迈入新高度的重要机遇。随着研究生招生数量的提高,势必带来研究生教育的各项改革措施。针对目前研究生培养工作的特点(有全日制学术学位、全日制专业学位、非全日制学位),为迎合国家“供给侧”改革的战略形势,进行研究生数学课程教学改革势在必行。

目前科技正以加速的方式发展,数学也经历了一场深刻的革命,新的数学思想、数学分支层出不穷,各种理论和方法相互交叉、互相渗透,使数学在实际应用中显示出了超强的活力。在科学技术领域数学的地位正不断提高,科学计算、理论研究和科学实验已成为科学研究的三大支柱。同时,数学教育在高校研究生教育中的地位与作用也正在发生变化,数学不再仅仅是学习后续课程与工程计算的工具,而是成为培养研究生理性思想和文化素质的重要载体,成为探索 and 创新的必备素养。

在理工科专业(非数学专业)研究生中统一开设必修的基础数学课程“高等工程数学”是研究生基础教学的重要改革措施。为配合教学需求,我们组织有相关课程教学经验的教师编写了本教材。教材内容在注重基本数学理论的基础上,以基本数学方法为重点。通过该课程的教学,可使研究生掌握矩阵分析、线性方程组求解、优化方法、微分方程求解、数据拟合、统计分析等方面的知识,使其能够熟练应用这些数学方法解决学科研究中面临的相关问题。本书适合作为工科高校研究生教材,也可给理科或管理学等学科的研究生、教师、有关研究者作为教学与研究参考书。

全书共8章,第1章由范金华编写,第2章由李宝成编写,第3章由王海侠编写,第4章由饶玲编写,第5章1~4节由严涛编写,5~7节由朱元国编写,第6章由刘红毅编写,第7章由张军编写,第8章1~3节由陆中胜编写,4~5节由侯传志编写。全书由朱元国统稿。在本书编写及校对过程中,南京理工大学数学学科的一些老师提出了宝贵的意见,在此表示衷心的感谢。由于我们水平有限,书中难免有疏漏之处,敬请广大专家及读者批评指正。

编 者

2019年6月于南京

常用符号

x, y	向量
A, B	矩阵
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}^n$	n 维复向量集合
$\mathbb{R}^n$	n 维实向量集合
$\mathbb{C}^{m \times n}$	m 行 n 列复矩阵组成的集合
$\mathbb{C}_r^{m \times n}$	m 行 n 列秩为 r 的复矩阵组成的集合
$\mathbb{R}^{m \times n}$	m 行 n 列实矩阵组成的集合
$\overline{A}$	矩阵 A 的共轭
A^T	矩阵 A 的转置
A^H	矩阵 A 的共轭转置
0	零向量, 零矩阵
I	单位矩阵
J	方阵的 Jordan 标准形
$\text{rank} A$	方阵 A 的秩
$\det A$	方阵 A 的行列式
$\text{tr} A$	方阵 A 的迹 (A 的主对角线上元素之和)
$\text{cond}(A)$	方阵 A 的条件数
$\rho(A)$	方阵 A 的谱半径
$\ A\ $	矩阵 A 的范数
$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$	以 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为对角元素的 $n \times n$ 对角矩阵
∇f	函数 f 的梯度
$\nabla^2 f$	函数 f 的 Hessian 矩阵

目 录

前言

常用符号

第 1 章 距离与范数	1
1.1 距离空间、极限与连续性	1
1.2 距离空间的可分性、完备性与紧性	4
1.2.1 可数集	4
1.2.2 距离空间的可分性	6
1.2.3 距离空间的完备性	6
1.2.4 距离空间的列紧性	8
1.3 压缩映射原理	9
1.4 范数与赋范空间, Banach 空间	12
1.4.1 范数与赋范线性空间	12
1.4.2 赋范线性空间的性质	12
1.4.3 有限维赋范线性空间	14
1.5 Hilbert 空间, 正交系	16
1.5.1 内积的一般概念	16
1.5.2 正交系	17
1.6 向量范数, 矩阵范数及其性质	20
1.6.1 向量范数	20
1.6.2 矩阵范数及其性质	22
1.6.3 向量范数、矩阵范数的相容性	28
1.7 矩阵的谱半径, 条件数	30
1.7.1 矩阵的谱半径	30
1.7.2 矩阵序列及矩阵级数	31
1.7.3 矩阵的条件数	36
1.7.4 矩阵的条件数在误差估计中的应用	36
第 1 章习题	39
第 2 章 矩阵的标准形与特征值计算	42
2.1 λ -矩阵及标准形、不变因子和初等因子	42
2.1.1 λ -矩阵的概念	43
2.1.2 λ -矩阵的 Smith 标准形、不变因子和行列式因子	44
2.1.3 初等因子	47
2.2 Jordan 标准形	48

2.2.1	矩阵相似的条件	48
2.2.2	矩阵的 Jordan 标准形	48
2.2.3	Jordan 标准形的应用	53
2.3	酉相似标准形	55
2.3.1	正规矩阵对角化	56
2.3.2	正定矩阵	59
2.4	特征值的隔离	61
2.4.1	盖尔圆定理	61
2.4.2	特征值的隔离	63
2.5	特征值的幂迭代法、逆幂迭代法	65
2.5.1	幂迭代法	65
2.5.2	幂迭代法的加速	69
2.5.3	逆幂迭代法	69
	第 2 章习题	71
第 3 章	矩阵分解与广义逆矩阵	74
3.1	三角分解、满秩分解和奇异值分解	74
3.1.1	Doolittle 分解	74
3.1.2	选列主元的 Doolittle 分解	76
3.1.3	Cholesky 分解	78
3.1.4	矩阵的 QR 分解	79
3.1.5	矩阵的满秩分解	80
3.1.6	矩阵的奇异值分解	84
3.2	Penrose 方程及其 Moore-Penrose 逆的计算	86
3.2.1	Penrose 方程	86
3.2.2	Moore-Penrose 逆的计算	87
3.3	Moore-Penrose 逆的性质	94
	第 3 章习题	98
第 4 章	线性方程组数值解法	100
4.1	线性方程组的直接解法	100
4.1.1	Gauss 消去法	100
4.1.2	直接三角分解解法	105
4.2	广义逆矩阵求解矛盾方程组	111
4.2.1	基本理论结果	112
4.2.2	列满秩的 LS 问题	114
4.2.3	秩亏损的 LS 问题	116
4.3	线性方程组的迭代解法	117
4.3.1	迭代法的一般概念	117
4.3.2	J 迭代法和 G-S 迭代法	120

4.3.3 超松弛迭代方法	125
4.4 极小化方法	126
4.4.1 与方程组等价的变分问题	126
4.4.2 最速下降法与共轭梯度法的定义	128
4.4.3 共轭梯度法的计算公式	130
4.4.4 共轭梯度法的性质	133
4.4.5 预处理共轭梯度法	135
第 4 章习题	136
第 5 章 最优化方法	139
5.1 线性规划与单纯形法	139
5.1.1 线性规划标准形及最优基本可行解	139
5.1.2 单纯形方法原理	140
5.1.3 单纯形表格法	143
5.1.4 两阶段法和大 M 法	146
5.2 非线性规划的最优性条件	149
5.2.1 无约束规划问题的最优性条件	149
5.2.2 带约束规划问题的最优性条件	151
5.3 无约束非线性优化算法	153
5.3.1 线性搜索	154
5.3.2 最速下降法	155
5.3.3 牛顿法	157
5.3.4 共轭梯度法	161
5.4 罚函数法	164
5.4.1 外点罚函数法	164
5.4.2 内点罚函数法	168
5.4.3 广义乘子法	170
5.5 组合优化问题	175
5.6 模拟退火算法	179
5.6.1 受热金属物体分子状态分布	179
5.6.2 基本模拟退火算法	181
5.6.3 模拟退火算法实现技术	181
5.7 遗传算法	183
5.7.1 基本遗传算法	183
5.7.2 遗传算法实现技术	184
第 5 章习题	188
第 6 章 函数逼近与数据拟合	190
6.1 多项式插值	190
6.1.1 Lagrange 插值	191

6.1.2	差商与 Newton 插值	192
6.1.3	差分及等距节点的插值公式	195
6.1.4	Hermite 插值	197
6.2	最小二乘法	200
6.3	人工神经网络 BP 算法	202
6.4	小波变换简介	205
6.4.1	傅里叶变换与加窗傅里叶变换	206
6.4.2	连续小波变换	208
6.4.3	多尺度分析	210
6.4.4	小波分解与重构算法 (Mallat 算法)	214
6.4.5	小波变换的应用	217
第 6 章习题		219
第 7 章 偏微分方程及其数值方法		221
7.1	偏微分方程定解问题	221
7.1.1	波动方程的定解问题	221
7.1.2	热传导方程的定解问题	223
7.1.3	Poisson 方程的定解问题	225
7.1.4	二阶偏微分方程的分类	226
7.2	偏微分方程的解析解	228
7.2.1	分离变量法	228
7.2.2	积分变换法	235
7.2.3	格林函数法	238
7.3	偏微分方程求解的有限差分法	242
7.3.1	椭圆型方程的有限差分法	242
7.3.2	抛物型方程的有限差分法	249
7.3.3	双曲型方程的有限差分解法	264
7.4	偏微分方程的有限元方法	271
7.4.1	变分方法	271
7.4.2	偏微分方程的有限元方法	276
第 7 章习题		283
第 8 章 统计分析		285
8.1	一元线性回归	285
8.1.1	一元线性回归模型	285
8.1.2	参数的最小二乘估计	286
8.1.3	线性假设的显著性检验	289
8.1.4	回归系数 β_1 的区间估计	291
8.1.5	因变量的预测	292
8.1.6	可线性化的一元非线性回归	294

8.2 多元线性回归	297
8.2.1 多元线性回归模型	297
8.2.2 参数的最小二乘估计	299
8.2.3 线性假设的显著性检验	301
8.2.4 回归系数 β_j 的区间估计	302
8.2.5 因变量的预测	302
8.3 单因素方差分析	303
8.3.1 单因素方差分析模型	303
8.3.2 单因素方差分析的统计分析	304
8.3.3 未知参数的估计	307
8.4 贝叶斯 (Bayes) 统计分析	308
8.4.1 贝叶斯统计的基本观点	308
8.4.2 先验分布的选取	312
8.4.3 贝叶斯统计中的参数估计	317
8.4.4 贝叶斯统计中的假设检验	319
8.5 多元正态分布的参数估计与假设检验	321
8.5.1 多元正态分布的定义和性质	321
8.5.2 多元正态分布的参数估计	322
8.5.3 多元正态总体参数的假设检验	325
第 8 章习题	329
参考文献	331
附表	332
附表 1 相关系数临界值表	332
附表 2 标准正态分布函数表	333
附表 3 t 分布上分位点表	334
附表 4 χ^2 分布上分位点表	335
附表 5 F 分布上分位点表	337

第1章 距离与范数

距离空间是实直线 $\mathbf{R}$ 的推广,它在一般分析中的地位犹如高等数学中的实直线 $\mathbf{R}$. 将实直线 $\mathbf{R}$ 推广到一般的距离空间,有利于对一般问题的统一处理.

本章首先介绍距离空间的概念、性质,在此基础上将实直线 $\mathbf{R}$ 上的一些性质和概念推广到距离空间. 在线性空间中,引入一种类似于距离的概念——范数. 以此为基础,介绍带有范数的线性空间(赋范线性空间)的性质以及一些特殊的赋范线性空间. 利用向量范数与矩阵范数的概念及性质,介绍矩阵的谱半径、条件数以及它们在矩阵级数、求解线性方程组误差估计中的应用.

1.1 距离空间、极限与连续性

Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 由所有形如 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ (下面简写为 $\mathbf{x} = (x_i)$) 的 n 维向量构成,它是三维空间的一种自然推广. 类似于三维空间 $\mathbf{R}^n$ 中 Euclid 距离的定义, $\mathbf{R}^n$ 中任何两点 $\mathbf{x} = (x_i), \mathbf{y} = (y_i)$ 的距离定义为

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

在实际中,除了空间距离,其他距离也有很多,例如大家的学识差异、收入差距等都是一种距离. 为了研究一类事物或集合之间的差异,或进一步研究集合上的“函数”性质,我们需要在集合元素之间引入距离的概念.

定义 1.1 设 X 是一非空集合,对 X 中任何两元素 x, y , 按某一法则对应唯一实数 $d(x, y)$, 而且满足下列三条性质:

- (1) (非负性) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- (2) (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (3) (三角不等式) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ 对所有 $x, y, z \in X$ 成立,

则称 $d(x, y)$ 为 x, y 之间的距离,并称 X 是以 d 为距离的距离空间,记作 (X, d) .

通常,在距离给出并不引起混淆的情况下,我们简记 (X, d) 为 X . X 中的元素称为 X 中的点. 下面举一些距离空间的例子,验证所引入距离满足定义 1.1 的三条性质,留作习题.

例 1.1 设 X 是任意非空集合,对 X 中任何两个元素 x, y , 令

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

则 (X, d) 成为一个距离空间,称空间 (X, d) 为离散距离空间. 这种距离是粗糙的,它只能将 X 中不同元素区分开,而不能衡量不同元素之间差异的大小.

例 1.2 设 $X = \mathbf{R}^n$, 对 $\mathbf{x} = (x_i), \mathbf{y} = (y_i) \in \mathbf{R}^n$, 分别定义

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}, \quad d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|,$$

则 $(\mathbf{R}^n, d_1), (\mathbf{R}^n, d_2), (\mathbf{R}^n, d_\infty)$ 都是距离空间.

例 1.3 对 $1 \leq p < +\infty$, 记

$$l^p = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)^T, \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty \}.$$

对 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)^T, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots)^T \in l^p$, 定义

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i - y_i|^p \right\}^{1/p},$$

则 (l^p, d_p) 是距离空间.

例 1.4 记

$$l^\infty = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)^T, \sup_i |x_i| < +\infty \}.$$

对 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)^T, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots)^T \in l^\infty$, 定义

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_i |x_i - y_i|,$$

则 (l^∞, d_∞) 是距离空间.

类似于实数集 $\mathbf{R}$ 上数列极限, 下面介绍一般距离空间上极限及其相关性质.

定义 1.2 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是距离空间 (X, d) 中点列, x_0 是 X 中确定的点. 若对任何给定的正数 ε , 总存在自然数 N , 当 $n > N$ 时 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ 成立, 则称点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛于 x_0 , 或者说 x_0 是 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

或者 $x_n \rightarrow x_0 \ (n \rightarrow +\infty)$.

利用距离三角不等式性质, 不难发现极限具有下面的性质, 证明留给读者.

性质 1.1 (1) 若距离空间 (X, d) 中点列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0);$$

(2) 若距离空间 (X, d) 中点列 $\{x_n\}$ 收敛, 则极限唯一.

例 1.5 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 中点列 $\{\mathbf{x}^{(m)}\}_{m=1}^{+\infty} = \{(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})\}_{m=1}^{+\infty}$ 收敛于

$$\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

的充要条件是对任何 $1 \leq i \leq n$, 有 $x_i^{(m)} \rightarrow x_i^{(0)} (m \rightarrow +\infty)$, 即按坐标分量收敛.

证明: 必要性, 对任何 $1 \leq i \leq n$, 由于

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(0)}| \leq \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - x_i^{(0)})^2 \right\}^{1/2} = d_2(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(0)}),$$

所以当 $d_2(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(0)}) \rightarrow 0 (m \rightarrow +\infty)$ 时, 一定有 $d_2(x_i^{(m)}, x_i^{(0)}) \rightarrow 0 (m \rightarrow +\infty)$, 即 $x_i^{(m)} \rightarrow x_i^{(0)} (m \rightarrow +\infty)$.

充分性, 由于

$$d_2(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(0)}) = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - x_i^{(0)})^2 \right\}^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i^{(m)} - x_i^{(0)}|,$$

所以, 若对任何 $1 \leq i \leq n$, 有 $x_i^{(m)} \rightarrow x_i^{(0)} (m \rightarrow +\infty)$, 则 $d_2(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(0)}) \rightarrow 0 (m \rightarrow +\infty)$.

证毕.

例 1.6 距离空间 (l^p, d_p) 中点列 $\{\mathbf{x}^{(m)}\}_{m=1}^{+\infty} = \{(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_i^{(m)}, \dots)^T\}_{m=1}^{+\infty}$ 收敛于点 $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots)^T$, 类似于上例的讨论可以得到对任何 $i \in \mathbf{N}$, 都有 $x_i^{(m)} \rightarrow x_i^{(0)} (m \rightarrow +\infty)$. 即在距离空间 (l^p, d_p) 中按距离收敛蕴含着按坐标分量收敛. 但反之不成立. 对 $m \in \mathbf{N}$, 分别令

$$\mathbf{x}^{(m)} = (\underbrace{(1/m)^{1/p}, \dots, (1/m)^{1/p}}_{m \uparrow}, 0, 0, \dots)^T, \quad \mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, \dots)^T,$$

则不难验证, 对 $m \in \mathbf{N}$, $\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(0)} \in l^p$ 且 $x_i^{(m)} \rightarrow x_i^{(0)} = 0 (m \rightarrow +\infty)$. 但是

$$d_p(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^{(0)}) = \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^{(m)}|^p \right\}^{1/p} = \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \right\}^{1/p} = 1,$$

故在距离空间 (l^p, d_p) 中按坐标分量收敛不能保证距离收敛.

下面将实数区间上的函数概念推广到一般距离空间上, 并介绍相关概念.

定义 1.3 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是两个距离空间, T 是 X 到 Y 的一个映射, $x_0 \in X$, 若对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对 $x \in X$, 当 $d_X(x, x_0) < \delta$ 时, 有 $d_Y(Tx, Tx_0) < \varepsilon$, 则称 T 在 x_0 连续; 若 T 在 X 上的每一点都连续, 则称 T 为 X 上的连续映射.

例 1.7 设 (X, d) 是距离空间, x_0 是 X 中一定点, 对 $x \in X$, 定义映射 $f(x) = d(x, x_0)$, 则不难验证 $f(x)$ 是 X 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射 (函数).

连续可以利用极限进行描述, 下面的定理反映了连续和极限之间的联系, 证明留作习题.

定理 1.1 设 X, Y 是两个距离空间, $T: X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$, 则下列两个命题等价.

- (1) T 在 x_0 连续;
- (2) 对 X 中任意点列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $Tx_n \rightarrow Tx_0 (n \rightarrow \infty)$.

1.2 距离空间的可分性、完备性与紧性

在实数空间 $\mathbf{R}$ 中, 任何实数都可以用有理数逼近, 即有理数在 $\mathbf{R}$ 中稠密; $\mathbf{R}$ 中任何 Cauchy 序列的极限是实数, 即 $\mathbf{R}$ 是完备的; 此外, $\mathbf{R}$ 中任何有界数列必有收敛子列, 即 $\mathbf{R}$ 是列紧的. 实数空间 $\mathbf{R}$ 的这三个良好性质, 对研究 $\mathbf{R}$ 上函数性质起到了关键作用. 本节, 我们将在一般距离空间中引入类似概念并研究其性质.

1.2.1 可数集

为了叙述距离空间的一般性质和概念, 我们在本段对集合元素数量“多少”进行数学严格的描述. 在集合元素有限时, 描述集合元素数量是自然的; 但是当集合数量无限时, 如何定量描述集合元素数量, 以及比较两个无穷多元素集合之间的“多少”关系是无穷集合理论的重点. 19 世纪 70 年代, 德国数学家 Cantor 开创了无穷集合理论, 很好地解决了无穷集合元素个数的衡量问题. 在学习本节之后, 你会惊讶地发现所有自然数和所有有理数居然“一样多”.

定义 1.4 设 A, B 是两个集合, 如果存在 A 到 B 的一一映射 (既是单射也是满射), 则称 A 与 B 对等, 记为 $A \sim B$.

显然两个有限集 (元素个数有限) 对等的充要条件是它们的元素个数相同, 从而有限集不可能与它的真子集对等, 但是无限集 (元素个数无限) 却完全不一样.

例 1.8 令 $A = \{\text{全体偶数}\}$, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, 令

$$T: A \longrightarrow \mathbf{Z}, \quad Tx = \frac{1}{2}x,$$

则 T 是 A 到 $\mathbf{Z}$ 的一一映射, 从而 $A \sim \mathbf{Z}$.

更进一步的, 我们可以得到如下关于无限集的性质.

定理 1.2 任何无限集必与它的某真子集对等.

证明: 设 A 为一个无限集, 取出一个元素 $a_1 \in A$, 由于 A 为无限集, 则 $A - \{a_1\} \neq \emptyset$. 同样办法, 在 A 中可以依次取出一列互异元素 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 记集合 $B = A - \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $C = A - \{a_1\}$. 定义映射 $T: A \rightarrow C$ 如下

$$Ta = \begin{cases} a, & a \in B, \\ a_{k+1}, & a = a_k, \end{cases}$$

则 T 是 A 到 C 的一一映射, 从而 $A \sim C$.

证毕.

定义 1.5 和自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集合称为可数集, 不能和 $\mathbf{N}$ 对等的无限集称为不可数集.

由定义可知, 若 A 是可数集, 则 A 全体元素可表示成无穷序列的形式, 即

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

如整数集 $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, -n, n, \dots\}$ 是可数集. 下面的定理说明可数集是“最小”的无限集.

定理 1.3 任意无限集必含有一个可数子集.

证明: 可数子集的构造方法和定理 1.2 证明构造类似, 详细过程在此省略. 证毕.

定理 1.4 有限或可数个可数集的并仍然是可数集; 可数个有限集的并 (若为无限集) 也是可数集.

证明: 不失一般性, 我们只证明可数个可数集的并情形, 其他情形类似. 假设 $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ 为一列可数集, 并假定 $A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m)$, 于是有

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \cdots\},$$

↗ ↗ ↗

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \cdots\},$$

↗ ↗ ↗

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \cdots\},$$

...

依照对角线原则 (箭头所示) 可把 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 中全部元素排成如下形式

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \cdots,$$

所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集.

证毕.

由这个定理可以得到下面一个重要的事实.

定理 1.5 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证明: 由于每个有理数可以表示成既约分数 p/q , 其中 p, q 为整数, 且规定 $q \in \mathbf{N}$. 对每个 $q \in \mathbf{N}$, 记 $A_q = \{p/q : p \in \mathbf{Z}\}$. 则 $\mathbf{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q$ 为可数个可数集的并, 故 $\mathbf{Q}$ 为可数集.

证毕.

并不是所有的无限集都是可数集, 下面举一个不可数集的例子.

例 1.9 点集 $(0, 1) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}$ 是不可数集.

证明: 假设 $(0, 1)$ 是可数集, 则 $(0, 1)$ 中全体数可以排成一列 $x_1, x_2, \cdots$. 将每个 x_n 用十进制小数表示, 则有

$$x_1 = 0.t_{11}t_{12}t_{13}\cdots,$$

$$x_2 = 0.t_{21}t_{22}t_{23}\cdots,$$

...

其中所有的 t_{ij} 都是从 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中取值, 并且对每个 i , 数列 $\{t_{ij} : j = 1, 2, \cdots\}$ 应有无限个不为 0, 即小数 $0.32000\cdots$ 应改写为 $0.31999\cdots$.

作十进制小数 $x = 0.b_1b_2\cdots$, 当 $t_{ii} = 1$ 时, 令 $b_i = 2$; 而当 $t_{ii} \neq 1$ 时, 令 $b_i = 1$. 显然 $x \in (0, 1)$, 且由于对每个 n , $b_n \neq t_{nn}$, 故 $x \neq x_n$, 这与假设矛盾, 从而 $(0, 1)$ 是不可数集.

证毕.

1.2.2 距离空间的可分性

定义 1.6 设 (X, d) 是一距离空间, A, B 是 X 的子集. 若对 $y \in B$ 以及 $\varepsilon > 0$, 都存在 $x \in A$ 使得 $d(x, y) < \varepsilon$, 则称 A 在 B 中稠密.

我们考察距离空间 X 是否具有某种性质时, 往往先在它的稠密子集上考察, 然后通过极限过程得到 X 相应的性质, 这是引入稠密这个概念的原因. 利用稠密性, 我们引入距离空间另外一个概念.

定义 1.7 如果度量空间 X 存在一个可数的稠密子集, 那么称 X 是可分的.

由于有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集, 并且 $\mathbf{Q}$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 中是稠密的, 从而可以得到下面的性质.

例 1.10 $\mathbf{R}^n$ 是可分的.

并不是所有的距离空间都是可分的, 下面给出一个不可分的空间.

例 1.11 (l^∞, d_∞) 是不可分的.

证明: 假设 l^∞ 是可分的, 则存在可数稠密子集, 记为 A . 在 l^∞ 中构造以下一个子集 B .

$$B = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)^T : x_n \in \mathbf{N}, 0 \leq x_n \leq 9\}.$$

集合 B 与区间 $[0, 1]$ 可以建立如下——对应,

$$T: B \leftrightarrow [0, 1] : T x = T\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)^T\} = 0.x_1 x_2 \cdots.$$

由于 $[0, 1]$ 是不可数的, 从而 B 是不可数的.

由于 A 在 l^∞ 中稠密, 从而 $\bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{1}{4}\right) = l^\infty$, 其中 $B\left(a, \frac{1}{4}\right)$ 表示以 a 为中心, $\frac{1}{4}$ 为半径的球. 由于 A 可数, B 不可数, 所以至少存在 B 中两个不同点 x, y 落在某一个球 $B\left(a_0, \frac{1}{4}\right)$ 内. 从 B 的元素构造可得 $d_\infty(x, y) \geq 1$, 但是

$$d_\infty(x, y) \leq d_\infty(x, a_0) + d_\infty(y, a_0) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

矛盾, 所以 l^∞ 不可分.

证毕.

例 1.12 X 是一个不可数集, 在 X 上定义离散距离 d (见例 1.1), 类似上例证明方法, 可以证明 (X, d) 不可分.

1.2.3 距离空间的完备性

一个实数序列是否收敛等价于该数列是否是 Cauchy 序列, 但是该结论在一般的度量空间中是不成立的, 其主要原因在于实数空间具有一定良好的性质——完备性. 为此, 我们需要将完备性引入距离空间中.

定义 1.8 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是距离空间 (X, d) 中的点列, 若对任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbf{N}$, 使得当 $n, m > N$ 时有 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 列. 如果 X 中任何 Cauchy 列都在 X 中收敛, 则称 X 是完备的.

下面分别举几个完备和不完备的例子.

例 1.13 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 是完备的.