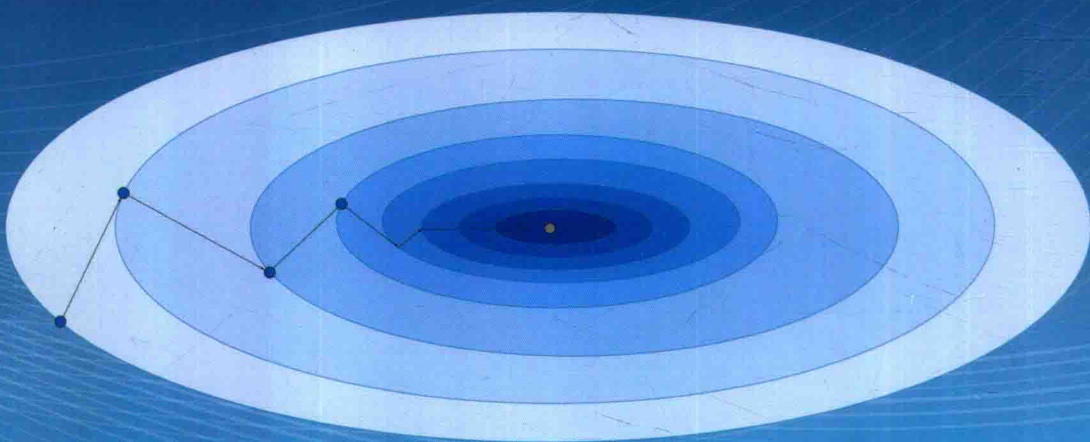
# 高等工程数学

朱元国 范金华 张 军 等 编



科学出版社

# 高等工程数学

朱元国　范金华　张　军 等 编



科 学 出 版 社
北 京

## 内 容 简 介

本书内容体现经典与现代的紧密结合，符合高校工科专业对数学的基本需求. 主要内容有距离与范数，包括向量范数与矩阵范数；矩阵的标准形与特征值计算，包括矩阵的 Jordan 标准形及特征值的幂迭代法；矩阵分解与广义逆矩阵，包括三角分解、满秩分解和奇异值分解；线性方程组的数值解法，包括直接解法与迭代解法；最优化方法，包括单纯形法、最优性条件、牛顿法、共轭梯度法、罚函数法、组合优化问题的模拟退火算法与遗传算法；函数逼近与数据拟合，包括多项式插值、最小二乘法、小波变换；偏微分方程及其数值解法，包括定解问题、解析方法、有限差分法、有限元方法；统计分析，包括一元及多元线性回归、贝叶斯统计、多元正态分布的参数估计与假设检验.

本书适合作为工科高校研究生教材，也可作为理科、管理学等学科研究生、教师、相关研究人员的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等工程数学/朱元国等编. —北京：科学出版社，2019. 6
ISBN 978-7-03-061610-4

I. ①高… II. ①朱… III. ①工程数学-研究生-教材 IV. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 114487 号

责任编辑：胡 凯 许 蕾 沈 旭 / 责任校对：杨聪敏
责任印制：师艳茹 / 封面设计：许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 6 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2019 年 6 月第一次印刷 印张：22 1/2
字数：554 000

**定价：89.00 元**
(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 《高等工程数学》

## 编 写 人 员

（排名不分先后）

朱元国　范金华　张　军　饶　玲　严　涛

刘红毅　王海侠　李宝成　陆中胜　侯传志

# 前　言

“双一流”建设是新时代我国高等教育的重大改革举措，是高等学校进入新时期、迈入新高度的重要机遇. 随着研究生招生数量的提高，势必带来研究生教育的各项改革措施. 针对目前研究生培养工作的特点 (有全日制学术学位、全日制专业学位、非全日制学位)，为迎合国家“供给侧”改革的战略形势，进行研究生数学课程教学改革势在必行.

目前科技正以加速的方式发展，数学也经历了一场深刻的革命，新的数学思想、数学分支层出不穷，各种理论和方法相互交叉、互相渗透，使数学在实际应用中显示出了超强的活力. 在科学技术领域数学的地位正不断提高，科学计算、理论研究和科学实验已成为科学研究的三大支柱. 同时，数学教育在高校研究生教育中的地位与作用也正在发生变化，数学不再仅仅是学习后续课程与工程计算的工具，而是成为培养研究生理性思想和文化素质的重要载体，成为探索和创新的必备素养.

在理工科专业 (非数学专业) 研究生中统一开设必修的基础数学课程“高等工程数学”是研究生基础教学的重要改革措施. 为配合教学需求，我们组织有相关课程教学经验的教师编写了本教材. 教材内容在注重基本数学理论的基础上，以基本数学方法为重点. 通过该课程的教学，可使研究生掌握矩阵分析、线性方程组求解、优化方法、微分方程求解、数据拟合、统计分析等方面的知识，使其能够熟练应用这些数学方法解决学科研究中面临的相关问题. 本书适合作为工科高校研究生教材，也可给理科或管理学等学科的研究生、教师、有关研究者作为教学与研究参考书.

全书共 8 章，第 1 章由范金华编写，第 2 章由李宝成编写，第 3 章由王海侠编写，第 4 章由饶玲编写，第 5 章 1~4 节由严涛编写，5~7 节由朱元国编写，第 6 章由刘红毅编写，第 7 章由张军编写，第 8 章 1~3 节由陆中胜编写，4~5 节由侯传志编写. 全书由朱元国统稿. 在本书编写及校对过程中，南京理工大学数学学科的一些老师提出了宝贵的意见，在此表示衷心的感谢. 由于我们水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请广大专家及读者批评指正.

编　者

2019 年 6 月于南京

# 常用符号

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ | 向量 |
| $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ | 矩阵 |
| $\mathbf{C}$ | 复数域 |
| $\mathbf{R}$ | 实数域 |
| $\mathbf{C}^n$ | $n$ 维复向量集合 |
| $\mathbf{R}^n$ | $n$ 维实向量集合 |
| $\mathbf{C}^{m\times n}$ | $m$ 行 $n$ 列复矩阵组成的集合 |
| $\mathbf{C}_r^{m\times n}$ | $m$ 行 $n$ 列秩为 $r$ 的复矩阵组成的集合 |
| $\mathbf{R}^{m\times n}$ | $m$ 行 $n$ 列实矩阵组成的集合 |
| $\overline{\boldsymbol{A}}$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭 |
| $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置 |
| $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置 |
| $\mathbf{0}$ | 零向量，零矩阵 |
| $\boldsymbol{I}$ | 单位矩阵 |
| $\boldsymbol{J}$ | 方阵的 Jordan 标准形 |
| $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ | 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 |
| $\det\boldsymbol{A}$ | 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 |
| $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ | 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹（$\boldsymbol{A}$ 的主对角线上元素之和） |
| $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$ | 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数 |
| $\rho(\boldsymbol{A})$ | 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 |
| $\Vert\boldsymbol{A}\Vert$ | 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数 |
| $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ | 以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为对角元素的 $n\times n$ 对角矩阵 |
| $\nabla f$ | 函数 $f$ 的梯度 |
| $\nabla^2 f$ | 函数 $f$ 的 Hessian 矩阵 |

# 目　　录

# 第 1 章　距离与范数

距离空间是实直线 $\mathbf{R}$ 的推广, 它在一般分析中的地位犹如高等数学中的实直线 $\mathbf{R}$. 将实直线 $\mathbf{R}$ 推广到一般的距离空间, 有利于对一般问题的统一处理.

本章首先介绍距离空间的概念、性质, 在此基础上将实直线 $\mathbf{R}$ 上的一些性质和概念推广到距离空间. 在线性空间中, 引入一种类似于距离的概念——范数. 以此为基础, 介绍带有范数的线性空间 (赋范线性空间) 的性质以及一些特殊的赋范线性空间. 利用向量范数与矩阵范数的概念及性质, 介绍矩阵的谱半径、条件数以及它们在矩阵级数、求解线性方程组误差估计中的应用.

## 1.1　距离空间、极限与连续性

Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 由所有形如 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ (下面简写为 $\boldsymbol{x}=(x_i)$) 的 $n$ 维向量构成, 它是三维空间的一种自然推广. 类似于三维空间 $\mathbf{R}^n$ 中 Euclid 距离的定义, $\mathbf{R}^n$ 中任何两点 $\boldsymbol{x}=(x_i),\boldsymbol{y}=(y_i)$ 的距离定义为

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}.$$

在实际中, 除了空间距离, 其他距离也有很多, 例如大家的学识差异、收入差距等都是一种距离. 为了研究一类事物或集合之间的差异, 或进一步研究集合上的 “函数” 性质, 我们需要在集合元素之间引入距离的概念.

**定义 1.1**　设 $X$ 是一非空集合, 对 $X$ 中任何两元素 $x,y$, 按某一法则对应唯一实数 $d(x,y)$, 而且满足下列三条性质:

(1) (非负性) $d(x,y)\geqslant 0$, $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) (对称性) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) (三角不等式) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$ 对所有 $x,y,z\in X$ 成立,

则称 $d(x,y)$ 为 $x,y$ 之间的距离, 并称 $X$ 是以 $d$ 为距离的距离空间, 记作 $(X,d)$.

通常, 在距离给出并不引起混淆的情况下, 我们简记 $(X,d)$ 为 $X$. $X$ 中的元素称为 $X$ 中的点. 下面举一些距离空间的例子, 验证所引入距离满足定义 1.1 的三条性质, 留作习题.

**例 1.1**　设 $X$ 是任意非空集合, 对 $X$ 中任何两个元素 $x,y$, 令

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

则 $(X,d)$ 成为一个距离空间, 称空间 $(X,d)$ 为离散距离空间. 这种距离是粗糙的, 它只能将 $X$ 中不同元素区分开, 而不能衡量不同元素之间差异的大小.

**例 1.2**　设 $X=\mathbf{R}^n$, 对 $\boldsymbol{x}=(x_i),\boldsymbol{y}=(y_i)\in\mathbf{R}^n$, 分别定义

$$d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|,\ d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2\right)^{1/2},\ d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max_i|x_i-y_i|,$$

则 $(\mathbf{R}^n,d_1),(\mathbf{R}^n,d_2),(\mathbf{R}^n,d_\infty)$ 都是距离空间.

**例 1.3**　对 $1\leqslant p<+\infty$, 记

$$l^p=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)^{\mathrm{T}},\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|^p<+\infty\}.$$

对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_i,\cdots)^{\mathrm{T}}\in l^p$, 定义

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left\{\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i-y_i|^p\right\}^{1/p},$$

则 $(l^p,d_p)$ 是距离空间.

**例 1.4**　记

$$l^\infty=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)^{\mathrm{T}},\ \sup_i|x_i|<+\infty\}.$$

对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_i,\cdots)^{\mathrm{T}}\in l^\infty$, 定义

$$d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sup_i|x_i-y_i|,$$

则 $(l^\infty,d_\infty)$ 是距离空间.

类似于实数集 $\mathbf{R}$ 上数列极限, 下面介绍一般距离空间上极限及其相关性质.

**定义 1.2**　设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是距离空间 $(X,d)$ 中点列, $x_0$ 是 $X$ 中确定的点. 若对任何给定的正数 $\varepsilon$, 总存在自然数 $N$, 当 $n>N$ 时 $d(x_n,x_0)<\varepsilon$ 成立, 则称点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛于 $x_0$, 或者说 $x_0$ 是 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的极限, 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,$$

或者 $x_n\to x_0\ (n\to+\infty)$.

利用距离三角不等式性质, 不难发现极限具有下面的性质, 证明留给读者.

**性质 1.1**　(1) 若距离空间 $(X,d)$ 中点列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\ \lim_{n\to\infty}y_n=y_0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=d(x_0,y_0);$$

(2) 若距离空间 $(X,d)$ 中点列 $\{x_n\}$ 收敛, 则极限唯一.

**例 1.5** $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{+\infty} = \{(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})\}_{m=1}^{+\infty}$ 收敛于

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$$

的充要条件是对任何 $1 \leqslant i \leqslant n$, 有 $x_i^{(m)} \to x_i^{(0)} (m \to +\infty)$, 即按坐标分量收敛.

证明: 必要性, 对任何 $1 \leqslant i \leqslant n$, 由于

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(0)}| \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(0)})^2 \right\}^{1/2} = d_2(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(0)}),$$

所以当 $d_2(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(0)}) \to 0 (m \to +\infty)$ 时, 一定有 $d_2(x_i^{(m)}, x_i^{(0)}) \to 0$ $(m \to +\infty)$, 即 $x_i^{(m)} \to x_i^{(0)}$ $(m \to +\infty)$.

充分性, 由于

$$d_2(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(0)}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(0)})^2 \right\}^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(m)} - x_i^{(0)}|,$$

所以, 若对任何 $1 \leqslant i \leqslant n$, 有 $x_i^{(m)} \to x_i^{(0)}$ $(m \to +\infty)$, 则 $d_2(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(0)}) \to 0$ $(m \to +\infty)$.

证毕.

**例 1.6** 距离空间 $(l^p, d_p)$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{+\infty} = \{(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_i^{(m)}, \cdots)^{\mathrm{T}}\}_{m=1}^{+\infty}$ 收敛于点 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_i^{(0)}, \cdots)^{\mathrm{T}}$, 类似于上例的讨论可以得到对任何 $i \in \mathbf{N}$, 都有 $x_i^{(m)} \to x_i^{(0)}$ $(m \to +\infty)$. 即在距离空间 $(l^p, d_p)$ 中按距离收敛蕴含着按坐标分量收敛. 但反之不成立. 对 $m \in \mathbf{N}$, 分别令

$$\boldsymbol{x}^{(m)} = (\underbrace{(1/m)^{1/p}, \cdots, (1/m)^{1/p}}_{m\text{个}}, 0, 0, \cdots)^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{x}^{(0)} = (0, 0, \cdots)^{\mathrm{T}},$$

则不难验证, 对 $m \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(0)} \in l^p$ 且 $x_i^{(m)} \to x_i^{(0)} = 0$ $(m \to +\infty)$. 但是

$$d_p(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(0)}) = \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^{(m)}|^p \right\}^{1/p} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \right\}^{1/p} = 1,$$

故在距离空间 $(l^p, d_p)$ 中按坐标分量收敛不能保证距离收敛.

下面将实数区间上的函数概念推广到一般距离空间上, 并介绍相关概念.

**定义 1.3** 设 $(X, d_X)$ 和 $(Y, d_Y)$ 是两个距离空间, $T$ 是 $X$ 到 $Y$ 的一个映射, $x_0 \in X$, 若对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对 $x \in X$, 当 $d_X(x, x_0) < \delta$ 时, 有 $d_Y(Tx, Tx_0) < \varepsilon$, 则称 $T$ 在 $x_0$ 连续; 若 $T$ 在 $X$ 上的每一点都连续, 则称 $T$ 为 $X$ 上的连续映射.

**例 1.7** 设 $(X, d)$ 是距离空间, $x_0$ 是 $X$ 中一定点, 对 $x \in X$, 定义映射 $f(x) = d(x, x_0)$, 则不难验证 $f(x)$ 是 $X$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射 (函数).

连续可以利用极限进行描述, 下面的定理反映了连续和极限之间的联系, 证明留作习题.

**定理 1.1** 设 $X, Y$ 是两个距离空间, $T: X \to Y$, $x_0 \in X$, 则下列两个命题等价.

(1) $T$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续;

(2) 对 $X$ 中任意点列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, 则 $Tx_n \to Tx_0$ $(n \to \infty)$.

## 1.2　距离空间的可分性、完备性与紧性

在实数空间 $\mathbf{R}$ 中, 任何实数都可以用有理数逼近, 即有理数在 $\mathbf{R}$ 中稠密; $\mathbf{R}$ 中任何 Cauchy 序列的极限是实数, 即 $\mathbf{R}$ 是完备的; 此外, $\mathbf{R}$ 中任何有界数列必有收敛子列, 即 $\mathbf{R}$ 是列紧的. 实数空间 $\mathbf{R}$ 的这三个良好性质, 对研究 $\mathbf{R}$ 上函数性质起到了关键作用. 本节, 我们将在一般距离空间中引入类似概念并研究其性质.

### 1.2.1　可数集

为了叙述距离空间的一般性质和概念, 我们在本段对集合元素数量 "多少" 进行数学严格的描述. 在集合元素有限时, 描述集合元素数量是自然的; 但是当集合数量无限时, 如何定量描述集合元素数量, 以及比较两个无穷多元素集合之间的 "多少" 关系是无穷集合理论的重点. 19 世纪 70 年代, 德国数学家 Cantor 开创了无穷集合理论, 很好地解决了无穷集合元素个数的衡量问题. 在学习本节之后, 你会惊讶地发现所有自然数和所有有理数居然 "一样多".

**定义 1.4**　*设 $A, B$ 是两个集合, 如果存在 $A$ 到 $B$ 的一一映射 (既是单射也是满射), 则称 $A$ 与 $B$ 对等, 记为 $A \sim B$.*

显然两个有限集 (元素个数有限) 对等的充要条件是它们的元素个数相同, 从而有限集不可能与它的真子集对等, 但是无限集 (元素个数无限) 却完全不一样.

**例 1.8**　令 $A = \{$全体偶数$\}$, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, 令

$$T : A \longrightarrow \mathbf{Z}, \quad Tx = \frac{1}{2}x,$$

则 $T$ 是 $A$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一一映射, 从而 $A \sim \mathbf{Z}$.

更进一步的, 我们可以得到如下关于无限集的性质.

**定理 1.2**　*任何无限集必与它的某真子集对等.*

证明: 设 $A$ 为一个无限集, 取出一个元素 $a_1 \in A$, 由于 $A$ 为无限集, 则 $A - \{a_1\} \neq \varnothing$. 同样办法, 在 $A$ 中可以依次取出一列互异元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 记集合 $B = A - \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, $C = A - \{a_1\}$. 定义映射 $T : A \to C$ 如下

$$Ta = \begin{cases} a, & a \in B, \\ a_{k+1}, & a = a_k, \end{cases}$$

则 $T$ 是 $A$ 到 $C$ 的一一映射, 从而 $A \sim C$.　　证毕.

**定义 1.5**　*和自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集合称为可数集, 不能和 $\mathbf{N}$ 对等的无限集称为不可数集.*

由定义可知, 若 $A$ 是可数集, 则 $A$ 全体元素可表示成无穷序列的形式, 即

$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

如整数集 $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots, -n, n, \cdots\}$ 是可数集. 下面的定理说明可数集是 "最小" 的无限集.

**定理 1.3** 任意无限集必含有一个可数子集.

证明: 可数子集的构造方法和定理 1.2 证明构造类似, 详细过程在此省略. 证毕.

**定理 1.4** 有限或可数个可数集的并仍然是可数集; 可数个有限集的并 (若为无限集) 也是可数集.

证明: 不失一般性, 我们只证明可数个可数集的并情形, 其他情形类似. 假设 $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ 为一列可数集, 并假定 $A_n \bigcap A_m = \varnothing (n \neq m)$, 于是有

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \cdots\},$$

$$\nearrow \ \nearrow \ \nearrow$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \cdots\},$$

$$\nearrow \ \nearrow \ \nearrow$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \cdots\},$$

$$\cdots$$

依照对角线原则 (箭头所示) 可把 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 中全部元素排成如下形式

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \cdots,$$

所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集. 证毕.

由这个定理可以得到下面一个重要的事实.

**定理 1.5** 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证明: 由于每个有理数可以表示成既约分数 $p/q$, 其中 $p, q$ 为整数, 且规定 $q \in \mathbf{N}$. 对每个 $q \in \mathbf{N}$, 记 $A_q = \{p/q : p \in \mathbf{Z}\}$. 则 $\mathbf{Q} = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} A_q$ 为可数个可数集的并, 故 $\mathbf{Q}$ 为可数集.

证毕.

并不是所有的无限集都是可数集, 下面举一个不可数集的例子.

**例 1.9** 点集 $(0,1) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}$ 是不可数集.

证明: 假设 $(0,1)$ 是可数集, 则 $(0,1)$ 中全体数可以排成一列 $x_1, x_2, \cdots$. 将每个 $x_n$ 用十进制小数表示, 则有

$$x_1 = 0.t_{11}t_{12}t_{13}\cdots,$$

$$x_2 = 0.t_{21}t_{22}t_{23}\cdots,$$

$$\cdots$$

其中所有的 $t_{ij}$ 都是从 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中取值, 并且对每个 $i$, 数列 $\{t_{ij} : j = 1, 2, \cdots\}$ 应有无限个不为 0, 即小数 $0.32000\cdots$ 应改写为 $0.31999\cdots$.

作十进制小数 $x = 0.b_1b_2\cdots$, 当 $t_{ii} = 1$ 时, 令 $b_i = 2$; 而当 $t_{ii} \neq 1$ 时, 令 $b_i = 1$. 显然 $x \in (0,1)$, 且由于对每个 $n$, $b_n \neq t_{nn}$, 故 $x \neq x_n$, 这与假设矛盾, 从而 $(0,1)$ 是不可数集. 证毕.

### 1.2.2　距离空间的可分性

**定义 1.6**　设 $(X,d)$ 是一距离空间, $A,B$ 是 $X$ 的子集. 若对 $y\in B$ 以及 $\varepsilon>0$, 都存在 $x\in A$ 使得 $d(x,y)<\varepsilon$, 则称 $A$ 在 $B$ 中稠密.

我们考察距离空间 $X$ 是否具有某种性质时, 往往先在它的稠密子集上考察, 然后通过极限过程得到 $X$ 相应的性质, 这是引入稠密这个概念的原因. 利用稠密性, 我们引入距离空间另外一个概念.

**定义 1.7**　如果度量空间 $X$ 存在一个可数的稠密子集, 那么称 $X$ 是可分的.

由于有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集, 并且 $\mathbf{Q}$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 中是稠密的, 从而可以得到下面的性质.

**例 1.10**　$\mathbf{R}^n$ 是可分的.

并不是所有的距离空间都是可分的, 下面给出一个不可分的空间.

**例 1.11**　$(l^\infty,d_\infty)$ 是不可分的.

证明: 假设 $l^\infty$ 是可分的, 则存在可数稠密子集, 记为 $A$. 在 $l^\infty$ 中构造以下一个子集 $B$.

$$B=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)^{\mathrm{T}}:x_n\in\mathbf{N},0\leqslant x_n\leqslant 9\}.$$

集合 $B$ 与区间 $[0,1]$ 可以建立如下一一对应,

$$T:B\leftrightarrow[0,1]:T\boldsymbol{x}=T\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)^{\mathrm{T}}\}=0.x_1x_2\cdots.$$

由于 $[0,1]$ 是不可数的, 从而 $B$ 是不可数的.

由于 $A$ 在 $l^\infty$ 中稠密, 从而 $\bigcup\limits_{a\in A}B\left(a,\dfrac{1}{4}\right)=l^\infty$, 其中 $B\left(a,\dfrac{1}{4}\right)$ 表示以 $a$ 为中心, $\dfrac{1}{4}$ 为半径的球. 由于 $A$ 可数, $B$ 不可数, 所以至少存在 $B$ 中两个不同点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 落在某一个球 $B\left(a_0,\dfrac{1}{4}\right)$ 内. 从 $B$ 的元素构造可得 $d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 1$, 但是

$$d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant d_\infty(\boldsymbol{x},a_0)+d_\infty(\boldsymbol{y},a_0)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

矛盾, 所以 $l^\infty$ 不可分.　　证毕.

**例 1.12**　$X$ 是一个不可数集, 在 $X$ 上定义离散距离 $d$ (见例 1.1), 类似上例证明方法, 可以证明 $(X,d)$ 不可分.

### 1.2.3　距离空间的完备性

一个实数序列是否收敛等价于该数列是否是 Cauchy 序列, 但是该结论在一般的度量空间中是不成立的, 其主要原因在于实数空间具有一定良好的性质——完备性. 为此, 我们需要将完备性引入距离空间中.

**定义 1.8**　设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是距离空间 $(X,d)$ 中的点列, 若对任何 $\varepsilon>0$, 都存在 $N\in\mathbf{N}$, 使得当 $n,m>N$ 时有 $d(x_m,x_n)<\varepsilon$, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 列. 如果 $X$ 中任何 Cauchy 列都在 $X$ 中收敛, 则称 $X$ 是完备的.

下面分别举几个完备和不完备的例子.

**例 1.13**　$(\mathbf{R}^n,d_2)$ 是完备的.