世纪高教版

考研数学真题复习系列

微博：http://t.sina.com.cn/1434473485（世纪高教张剑锋）

历年考研数学真题解析及复习思路

数学一

赠送本

（1987--2006）

考研数学命题研究组

世纪高教编辑部

世纪高教官网下载：http://www.pchepmg.com

ISBN 978-7-5192-0663-5

世界图书出版公司

定价：46.80元

目 录

1987 年全国硕士研究生入学统一考试试题

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷 Ⅰ, Ⅱ 均为现在的数学一.

(试卷 Ⅰ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 与两直线 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行,且过原点的平面方程为________.

(2) 当 $x =$ ________ 时,函数 $y = x2^x$ 取得极小值.

(3) 由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = e + 1 - x$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积是________.

(4) 设 L 为取正向的圆周 $x^2 + y^2 = 9$,则曲线积分 $\oint_L (2xy - 2y)\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\mathrm{d}y =$ ________.

(5) 已知三维线性空间的一组基底为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,1)$,则向量 $\boldsymbol{u} = (2,0,0)$ 在上述基底下的坐标是________.

二、(本题满分 8 分)

求正常数 a 与 b,使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx - \sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a + t^2}}\mathrm{d}t = 1$ 成立.

三、(本题满分 7 分)

(1) 设 f, g 为连续可微函数,$u = f(x, xy)$,$v = g(x + xy)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、(本题满分 8 分)

求微分方程 $y''' + 6y'' + (9 + a^2)y' = 1$ 的通解,其中常数 a

五、选择题(本大题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1) 设常数 $k > 0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散.
(B) 绝对收敛.
(C) 条件收敛.
(D) 收敛或发散与 k 的取值有关.

(2) 设 $f(x)$ 为已知连续函数,$I = t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\mathrm{d}x$,其中 $t > 0$, $s > 0$,则 I 的值

(A) 依赖于 s 和 t.
(B) 依赖于 s, t 和 x.

(C) 依赖于 t 和 x,不依赖于 s.　　　　(D) 依赖于 s,不依赖于 t.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$.　　　　(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.　　　　(D) $f(x)$ 的导数不存在.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$,而 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 等于

(A) a.　　(B) $\dfrac{1}{a}$.　　(C) a^{n-1}.　　(D) a^n.

六、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n+1}$ 的收敛域,并求其和函数.

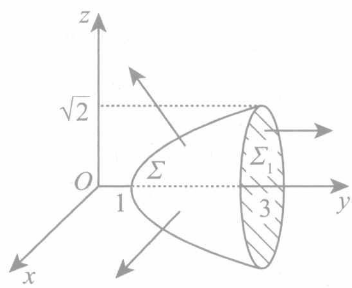
七、(本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\x=0,\end{cases}(1\leqslant y\leqslant 3)$

绕 y 轴旋转一周所成的曲面,它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$,如图.



八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微,对于 $[0,1]$ 上的每一个 x,函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内,且 $f'(x)\neq 1$,证明,在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x,使得 $f(x)=x$.

九、(本题满分 8 分)

问 a,b 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1,\end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多组解?并求出有无穷多组解时的通解.

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

(1) 设在一次试验中,事件 A 发生的概率为 p. 现进行 n 次独立试验,则 A 至少发生一次的概率为________;而事件 A 至多发生一次的概率为________.

(2) 三个箱子,第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球,第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球,第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球. 现随机地取一个箱子,再从这个箱子中取出 1 个球,这个球为白球的概

率等于__________. 已知取出的球是白球,此球属于第二个箱子的概率为__________.

(3) 已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$,则 X 的数学期望为__________,

X 的方差为__________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X,Y 相互独立,其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

(试卷 Ⅱ)

一、(本题满分 15 分)【同数学 Ⅰ　第一题】

二、(本题共 2 小题,满分 14 分)

(1) **(本题满分 6 分)** 计算定积分 $\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{-|x|}\,dx$.

(2) **(本题满分 8 分)**【同数学 Ⅰ　第二题】

三、(本题满分 7 分)

设 $z=f(u,x,y)$, $u=xe^y$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、(本题满分 8 分)【同数学 Ⅰ　第四题】

五、(本题满分 12 分)【同数学 Ⅰ　第五题】

六、(本题满分 10 分)【同数学 Ⅰ　第六题】

七、(本题满分 10 分)【同数学 Ⅰ　第七题】

八、(本题满分 10 分)【同数学 Ⅰ　第八题】

九、(本题满分 8 分)【同数学 Ⅰ　第九题】

十、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,λ_1 和 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值;$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量,试证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

1988 年全国硕士研究生入学统一考试试题

(试卷 Ⅰ)

一、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}$ 的收敛域.

(2) 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

(3) 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧,计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

二、填空题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1) 若 $f(t)=\lim_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$ __________.

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0,\\ x^3, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier)级数在 $x=1$ 处收敛于__________.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$,则 $f(7)=$ __________.

(4) 设 4 ×4 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量,且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$, $|\boldsymbol{B}|=1$,则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ __________.

三、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时, 该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小.
(B) 与 Δx 同阶的无穷小.
(C) 与 Δx 低阶的无穷小.
(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解,若 $f(x_0)>0$,且 $f'(x_0)=0$,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处

(A) 取得极大值.
(B) 取得极小值.
(C) 某邻域内单调增加.
(D) 某邻域内单调减少.

(3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$;及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$,则

(A) $\iiint_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2}x\mathrm{d}v$.
(B) $\iiint_{\Omega_1}y\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2}y\mathrm{d}v$.
(C) $\iiint_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$.
(D) $\iiint_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}v$.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则此级数在 $x=2$ 处

(A) 条件收敛. (B) 绝对收敛.

(C) 发散. (D) 收敛性不能确定.

(5) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (3 \leqslant s \leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是:

(A) 存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \mathbf{0}$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量,它不能用其余向量线性表出.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

四、(本题满分 6 分)

设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$,其中函数 f,g 具有二阶连续导数,求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^x$,且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合,求函数 $y=y(x)$.

六、(本题满分 9 分)

设位于点 $(0,1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$($k>0$ 为常数,r 为质点 A 与 M 之间的距离),质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$,求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

七、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^5$.

八、(本题满分 8 分)

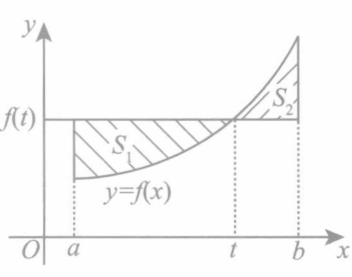
已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x 与 y;

(2) 求一个满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$. 证明:在 (a,b) 内存在唯一的 ξ,使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$,$x=a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$,$x=b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.



十、填空题(本题共3小题,每小题2分,满分6分)

(1) 设在三次独立试验中,事件 A 出现的概率相等.若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$,则事件 A 在一次试验中出现的概率是__________.

(2) 若在区间(0,1)内任取两个数,则事件"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"的概率为__________.

(3) 设随机变量 X 服从均值为10,均方差为0.02的正态分布.已知

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad \Phi(2.5) = 0.9938,$$

则 X 落在区间(9.95,10.05)内的概率为__________.

十一、(本题满分6分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$,求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

(试卷 Ⅱ)

一、(本题满分15分)【同数学 Ⅰ　第一题】

二、(本题满分12分)【同数学 Ⅰ　第二题】

三、(本题满分15分)【同数学 Ⅰ　第三题】

四、(本题共3小题,每小题6分,满分18分)

(1)【同数学 Ⅰ　第四题】

(2) 计算二次积分 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y} dy$.

(3) 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程,使 π 过已知直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$.

五、(本题满分8分)【同数学 Ⅰ　第五题】

六、(本题满分9分)【同数学 Ⅰ　第六题】

七、(本题满分6分)【同数学 Ⅰ　第七题】

八、(本题满分8分)【同数学 Ⅰ　第八题】

九、(本题满分9分)【同数学 Ⅰ　第九题】

1989 年全国硕士研究生入学统一考试试题

(试卷 Ⅰ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 已知 $f'(3)=2$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ ________.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$,则 $f(x)=$ ________.

(3) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=$ ________.

(4) 向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}=$ ________.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则矩阵 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

(A) 有且仅有水平渐近线.
(B) 有且仅有铅直渐近线.
(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线.
(D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线.

(2) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$,则点 P 的坐标是

(A) $(1,-1,2)$. (B) $(-1,1,2)$. (C) $(1,1,2)$. (D) $(-1,-1,2)$.

(3) 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解,C_1,C_2 是任意常数,则该非齐次方程的通解是

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$.
(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$.
(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$.
(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

(4) 设函数 $f(x)=x^2,0\leqslant x<1$,而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<+\infty$,其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$,$n=1,2,3,\cdots$,则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 等于

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{4}$. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $\boldsymbol{A}$ 中

(A) 必有一列元素全为 0.
(B) 必有两列元素对应成比例.
(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.
(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 设 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$,其中函数 $f(t)$ 二阶可导,$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(2) 设曲线积分$\int_C xy^2 \mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0) = 0$. 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 \mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

(3) 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x + z)\mathrm{d}v$,其中$\Omega$是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分)

将函数$f(x) = \arctan \frac{1 + x}{1 - x}$ 展为 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分)

设$f(x) = \sin x - \int_0^x (x - t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 f 为连续函数,求$f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明:方程 $\ln x = \frac{x}{\mathrm{e}} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\mathrm{d}x$ 在区间$(0, +\infty)$内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

有解,并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分)

假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,证明:

(1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(2) $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

九、(本题满分 9 分)

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2(a > 0)$ 上,问当 R 取何值时,球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大?

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

(1) 已知随机事件 A 的概率 $P(A) = 0.5$,随机事件 B 的概率 $P(B) = 0.6$ 及条件概率 $P(B | A) =$

0.8,则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$ __________.

(2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为0.6和0.5. 现已知目标被命中,则它是甲射中的概率为__________.

(3) 若随机变量 ξ 在(1,6)上服从均匀分布,则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是__________.

十一、(本题满分6分)

设随机变量 X 与 Y 独立,且 X 服从均值为1、标准差(均方差)为$\sqrt{2}$的正态分布,而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数.

(试卷 Ⅱ)

一、(本题满分15分)【同数学 Ⅰ　第一题】

二、(本题满分15分)【同数学 Ⅰ　第二题】

三、(本题满分15分)【同数学 Ⅰ　第三题】

四、(本题共3小题,每小题6分,满分18分)

(1)【同数学 Ⅰ　第四题】

(2) 求八分之一的球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界曲线的重心,设曲线的线密度 $\rho=1$.

(3) 设空间区域 Ω 由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成,其中 a 为正常数. 记 Ω 表面的外侧为 S, Ω 的体积为 V. 证明:

$$\oiint_S x^2yz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xy^2z^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(1+xyz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=V.$$

五、(本题满分7分)【同数学 Ⅰ　第五题】

六、(本题满分7分)【同数学 Ⅰ　第六题】

七、(本题满分6分)【同数学 Ⅰ　第七题】

八、(本题满分8分)【同数学 Ⅰ　第八题】

九、(本题满分9分)【同数学 Ⅰ　第九题】

1990 年全国硕士研究生入学统一考试试题

(试卷 Ⅰ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线$\begin{cases}x=-t+2,\\y=3t-4,\\z=t-1\end{cases}$垂直的平面方程是__________.

(2) 设 a 为非零常数,则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$__________.

(3) 设函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\0, & |x|>1,\end{cases}$则$f[f(x)]=$__________.

(4) 积分$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$的值等于__________.

(5) 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩是__________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设$f(x)$是连续函数,且$F(x)=\int_x^{e^{-x}}f(t)dt$,则$F'(x)$等于

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　　(B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　　(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

(2) 已知函数$f(x)$具有任意阶导数,且$f'(x)=[f(x)]^2$,则当n为大于2的正整数时,$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)$为

(A) $n![f(x)]^{n+1}$.　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$.　　(D) $n![f(x)]^{2n}$.

(3) 设α为常数,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性与α的取值有关.

(4) 已知$f(x)$在$x=0$的某个邻域内连续,且$f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点$x=0$处$f(x)$

(A) 不可导.　　(B) 可导,且$f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　(D) 取得极小值.

(5) 已知$\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$是对应齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系,$k_1$,$k_2$为任意常数,则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解(一般解)必是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

(2) 设 $z = f(2x-y, y\sin x)$,其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}$ 的通解(一般解).

四、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $z \geqslant 0$ 的部分.

六、(本题满分 7 分)

设不恒为常数的函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续,在开区间(a,b) 内可导,且$f(a) = f(b)$. 证明在(a,b) 内至少存在一点 ξ,使得$f'(\xi) > 0$.

七、(本题满分 6 分)

设四阶矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

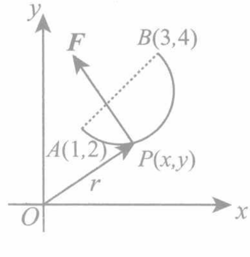
且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵,$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵,$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵. 将上述关系式化简并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

八、(本题满分 8 分)

求一个正交变换化二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 成标准形.

九、(本题满分 8 分)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用(见图). $\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于$\dfrac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所作的功.



十、填空题(本题共3小题,每小题2分,满分6分)

(1) 已知随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\ -\infty<x<+\infty$$

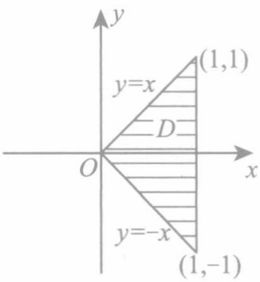
则 X 的概率分布函数 $F(x)=$ ________.

(2) 设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是0.4,0.3和0.6.若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$ ________.

(3) 已知离散型随机变量 X 服从参数为2的泊松(Poisson)分布,即 $P\{X=k\}=\frac{2^k e^{-2}}{k!},k=0,1,2,\cdots$,则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $E(Z)=$ ________.

十一、(本题满分6分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1,|y|<x$ 内服从均匀分布,求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.



(试卷 Ⅱ)

一、(本题满分15分)【同数学 Ⅰ 第一题】

二、(本题满分15分)【同数学 Ⅰ 第二题】

三、(本题满分15分)【同数学 Ⅰ 第三题】

四、(本题共3小题,每小题6分,满分18分)

(1)【同数学 Ⅰ 第四题】

(2) 求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y|_{x=e}=1$ 的特解.

(3) 过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线,该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形,求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

五、(本题满分8分)【同数学 Ⅰ 第五题】

六、(本题满分7分)【同数学 Ⅰ 第六题】

七、(本题满分6分)【同数学 Ⅰ 第七题】

八、(本题满分8分)【同数学 Ⅰ 第八题】

九、(本题满分8分)【同数学 Ⅰ 第九题】

1991 年全国硕士研究生入学统一考试试题

（试卷 Ⅰ）

一、填空题(本题共 3 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设$\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$则$\dfrac{d^2 y}{dx^2} =$ ________.

(2) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x,y)$ 在点$(1,0,-1)$处的全微分 $dz =$ ________.

(3) 已知两条直线的方程是 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$, $L_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$, 则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是________.

(4) 已知当 $x \to 0$ 时,$(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小,则常数 $a =$ ________.

(5) 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1} =$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线 $y = \dfrac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$

(A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线. (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

(2) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\dfrac{t}{2}\right) dt + \ln 2$,则 $f(x)$ 等于

(A) $e^x \ln 2$. (B) $e^{2x} \ln 2$. (C) $e^x + \ln 2$. (D) $e^{2x} + \ln 2$.

(3) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于

(A) 3. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

(4) 设 D 是 xOy 平面上以$(1,1)$,$(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域,D_1 是 D 在第一象限的部分,则$\iint\limits_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于

(A) $2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y dx dy$. (B) $2\iint\limits_{D_1} xy dx dy$.

(C) $4\iint\limits_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$. (D) 0.

(5) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵,则必有

(A) $\boldsymbol{ACB} = \boldsymbol{E}$. (B) $\boldsymbol{CBA} = \boldsymbol{E}$. (C) $\boldsymbol{BAC} = \boldsymbol{E}$. (D) $\boldsymbol{BCA} = \boldsymbol{E}$.

三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1) 求$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

(2) 设$\boldsymbol{n}$是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量,求函数$u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点$P$处沿方向$\boldsymbol{n}$的方向导数.

(3) 求$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}v$,其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与平面$z=4$所围成的立体.

四、(本题满分6分)

在过点$O(0,0)$和$A(\pi,0)$的曲线族$y=a\sin x(a>0)$中,求一条曲线L,使沿该曲线从O到A的积分$\int_L(1+y^3)\,\mathrm{d}x+(2x+y)\,\mathrm{d}y$的值最小.

五、(本题满分8分)

将函数$f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$展开成以2为周期的傅里叶级数,并由此求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的和.

六、(本题满分7分)

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)$,证明:在$(0,1)$内存在一点$c$,使$f'(c)=0$.

七、(本题满分8分)

已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$及$\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1)a,b为何值时,$\boldsymbol{\beta}$不能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合?

(2)a,b为何值时,$\boldsymbol{\beta}$有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的唯一的线性表示式?并写出该表示式.

八、(本题满分6分)

设$\boldsymbol{A}$是n阶正定阵,$\boldsymbol{E}$是n阶单位阵,证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$的行列式大于1.

九、(本题满分8分)

在上半平面求一条向上凹的曲线,其上任一点$P(x,y)$处的曲率等于此曲线在该点的法线段PQ长度的倒数(Q是法线与x轴的交点),且曲线在点$(1,1)$处的切线与x轴平行.

十、填空题(本题共2小题,每小题3分,满分6分)

(1) 若随机变量X服从均值为2,方差为σ^2的正态分布,且$P\{2<X<4\}=0.3$,则$P\{X<0\}=$________.

(2) 随机地向半圆$0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区

域的面积成正比,则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为__

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

(试卷 Ⅱ)

一、(本题满分 15 分)【同数学 Ⅰ　第一题】

二、(本题满分 15 分)【同数学 Ⅰ　第二题】

三、(本题满分 15 分)【同数学 Ⅰ　第三题】

四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)

(1) 求 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

(2) 计算 $I=\iint\limits_S -y\,dz\,dx+(z+1)\,dx\,dy$,其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

(3)【同数学 Ⅰ　第四题】

五、(本题满分 8 分)【同数学 Ⅰ　第五题】

六、(本题满分 7 分)【同数学 Ⅰ　第六题】

七、(本题满分 8 分)【同数学 Ⅰ　第七题】

八、(本题满分 6 分)【同数学 Ⅰ　第八题】

九、(本题满分 8 分)【同数学 Ⅰ　第九题】