UMSS

大学数学科学丛书 — 37

测度与概率教程

任佳刚 巫静 著

科学出版社

大学数学科学丛书 37

测度与概率教程

任佳刚　巫　静　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书讲述现代概率论与数理统计所需要的基本测度论知识，包括测度的构造、积分、乘积测度、赋号测度、L^p 空间、条件与独立及 Polish 空间上的测度等.

本书可供概率统计及相关方向的高年级本科生、研究生和科研工作者使用.

图书在版编目(CIP)数据

测度与概率教程/任佳刚，巫静著. —北京：科学出版社，2018.12

(大学数学科学丛书；37)

ISBN 978-7-03-059871-4

Ⅰ. ①测… Ⅱ. ①任… ②巫… Ⅲ. ①测度论-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.12；O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 273479 号

责任编辑：李 欣／责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 12 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2018 年 12 月第一次印刷 印张：18 1/2
字数：370 000

定价：88.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　　言

想起来是那样遥远 —— 从 Lebesgue 发表他建立的我们现在称之为 Lebesgue 测度与积分的几页纸的划时代的论文算起, 一个多世纪过去了. 一百年春风秋雨, 一百年春华秋实, Lebesgue 的工作经受住了时间和实践的检验 —— 这棵当年虽然幼小但却茁壮的树苗长成了枝繁叶茂的大树 —— 它的枝叶荫及了现代数学中的许多领域. 回望来路, 我们可以看到许多大大小小的数学家在树下辛勤劳作的身影; 展望未来, 它将长久地为后来者提供庇荫.

人们为什么需要它? 有无穷多条理由. 我们只要看一下概率论的情况就可以知道了.

在日常生活使用的数学术语中, “概率”恐怕是出现频率最高的词之一了, 也许连“之一”也可以去掉. 虽然对古典概型而言, 理解“概率”只需要直观经验, 然而要真正从数学上严格定义“概率”这个概念, 却绝非易事 —— 这正如我们在生活中经常使用“力”这个词, 但物理上的“力”却是另有含义并有严密的分类的; 也正如对电和磁的阴阳极概念的划分与研究不能像《易经》那样大而化之. 事实上, 将概率公理化是如此的重要与困难, 以至于它包含在希尔伯特的 23 个数学问题中; 而这一任务的完成则归功于另一位数学巨人 ——Andrey Nikolaevich Kolmogorov. 而他之所以能完成这一任务, 是因为他独具慧眼地站在了第三位巨人也就是 Lebesgue 的肩膀上.

现在大学本科的初等概率论的标准教材几乎都是使用 Kolmogorov 的公理化体系来讲述概率论的. 因而我们知道, 概率云云, 无非就是一个定义在样本空间上的测度. 然而, 初等概率论中讲述了许多没有严格证明的结论. 例如, 我们都学过下面这个结论: 设 ξ 为一连续型随机变量, 分布密度函数为 f, 则对于任意 Borel 可测函数 F, $F(\xi)$ 也为随机变量且

$$E[F(\xi)] = \int F(x)f(x)dx.$$

一般教材并没有给出这个结论的证明. 这倒不是所有的作者不约而同地忽视了这个问题, 而是因为只凭初等概率的知识是无法证明的. 再如, 我们学过独立随机变量序列的种种性质, 但却“忽略”了一个基本问题: 这种序列是否存在? 如果它们根本就不存在的话, 我们所学的一切岂不全是空中楼阁? 还有, 如果你足够细心, 那么就应该注意到了在那里只对连续型和离散型的随机变量定义了条件数学期望. 那么, 一般的情形呢?

当然, 所有这些并不是粗心所造成的忽略, 而是在初等概率论中, 根本就无法回答这些问题.

而有了测度论, 就可以严格地解决这些问题. 当然, 历史的发展证明, 测度论对概率论的作用远不止于此. 并且, 事情起了、正在起、还会起 —— 变化: 概率论的需求反过来又推动了测度论的发展. 例如, 随机变量分布律的密度函数的研究就促进了测度空间上微分理论的建立. 并且, 谁知道呢, 概率论的需求不是建立测度论的原始动力之一? 我们的意思是说, 想想 Borel 吧, 他是 Lebesgue 的老师, 建立了如下的强大数定律: 以 μ_n 表示 Bernoulli 试验中前 n 次试验成功的次数, 那么

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}=p\right)=1.$$

你学习这个结果时一定不会纠结, 但我们猜 Borel 一定纠结过: 左边的那个概率到底有没有意义? 也就是说 P 后面的那一摊子究竟是不是事件? 你要知道那时 Kolmogorov 还没有横空出世! Borel— 大数定律 —Lebesgue—Kolmogorov, 藏在漂亮的概率论的测度化公理体系后面的历史迷雾, 谁, 能够拨开?

大江东去浪淘尽 …… 这是苏轼说的.

测度论是如此重要, 以致这方面的鸿篇巨著可谓是汗牛充栋了. 那么, 我们为什么还要写本书, 有必要写本书吗?

我们真的不敢说有必要. 事实上, 我们一直是把它作为自己用的讲义写的. 写的时候我们考虑了下列因素: 读者对象、课时、我们从自己的研究工作和教学工作中感受到的必备的内容, 以及我们自己学习测度论的一些心得.

我们心目中的读者对象是平庸如我们的人. 所以, 如果你足够聪明, 你可以直接去读本书后面参考文献所列的优秀专著或教本, 而不必读本书. 此外, 内容的选取也受到课时的限制. 如果你有足够的时间去学习更多的知识, 你依然可以直接去读这些专著. 请原谅我们没有列出 P. R. Halmos 的著作 *Measure Theory*. 时光飞逝, 这部哺育了包括本书作者之一在内的几代人的经典, 从现代的观点和需求来看, 也许有点 “老” 了. 呜呼, 光阴荏苒, 谁能不老呢?!

这里的内容都是从现存的各种著述中取材的, 不同的只是编排上的区别而已. 在学习、运用和讲授测度论的过程中, 对我们产生影响较大的有参考文献中列出的和没有列出的许多著作. 这些影响渗透在本书中的各个角落, 恕不一一标明了. 此外就是加上了一些自己的理解. 我们愿意将自己的理解拿出来和读者分享, 就是因为它们是我们自己的学习心得, 哪怕是不完善的心得, 也愿意拿出来接受读者的指正.

我们没有弄巧成拙吗, 没有画蛇添足吗, 没有歪批三国吗, 没有犯低级错误而留下笑柄吗, 没有犯不那么低级的错误而误人子弟吗? 这一切只能留待时间、实践

和读者检验了. 我们诚惶诚恐, 如履薄冰. 唯一让我们有勇气同意出版的理由是来自朋友、学生和科学出版社编辑的热情鼓励.

因此我们非常感谢:

1. 阅读和使用过本书不同阶段的初稿的朋友们, 特别是刘继成、徐嗣棪、张华和黄永辉, 他们对各个阶段粗糙的初稿的肯定给予了我们写作本书的信心和勇气, 他们细心地发现并指出了初稿中的许多错误和模糊之处, 并提出了很多改进意见.

2. 使用过本书作为教材的各个年级的学生们, 特别是李悦、杨芳、张为正、崔勇、王圣等同学, 他们提出的疑问和建议以及发现的错误改善了本书质量; 特别是王圣, 他非常仔细地核对了所有的习题并撰写了答案.

3. 科学出版社李欣编辑. 没有她的建议和鼓励, 我们根本不会想到整理这份讲义.

4. 国家自然科学基金 (No.11471340, 11671408, 11871484) 的资助.

当然, 对依然留下来的问题, 我们自己要负全责. 由于使用电脑写作, 修改起来特别方便, 所以每看一遍都觉得有值得修改的地方. 但显然, 我们必须有一个停时. 所以, 我们就在这里停下来, 剩下的缺憾, 就留待读者指教, 这里先表示感谢!

在本书完稿之际, 我们特别怀念我们的老师、法国科学院已故院士、随机变分学 (Malliavin calculus) 的创始人 Paul Malliavin 教授. 他言传身教, 教导我们刻苦学习, 勤奋工作, 献身科学. 谨以这本不成样子的小书, 作为一朵无名的小花, 敬献于他的灵前 —— 他离开我们已经八年了.

哦, 一年又一年……

任佳刚　巫静

2018 年 7 月于广州

记号与约定

1.

$$a \wedge b := \min\{a, b\}, \quad a \vee b := \max\{a, b\},$$

$$\wedge_{i \in I} a_i = \inf\{a_i, i \in I\}, \quad \vee_{i \in I} a_i = \sup\{a_i, i \in I\}.$$

2.

$\rightrightarrows$: 一致收敛

$\upuparrows$: 单调上升一致收敛

$\downdownarrows$: 单调下降一致收敛

如果少一个箭头，则表示同样的收敛，但未必一致.

3. a.e. 表示几乎处处，a.s. 表示几乎必然，a.a. 表示几乎所有.

目　录

第 1 章　可测集与可测函数

本章引入后面要用的一些基本概念, 并给出基本术语和记号.

1.1　基本术语

假设读者已经知道了集合论的基本概念 —— 你们当然知道了, 不是吗?

我们考虑问题时, 总会局限在一定的范围内. 随着问题的变化, 这个范围也会变化. 但当一个问题确定下来后, 这个范围一般也会随之确定下来. 这样的一个范围, 称为空间, 或有时为了强调其大而称为全空间. 例如, 我们在数学分析中考虑一元微积分时, 这个空间是 $\mathbb{R}^1$; 考虑 n 元微积分时, 它是 $\mathbb{R}^n$; 在初等概率论中, 这个空间是样本空间即所有可能的试验结果构成的空间; 等等. 以后如不特别声明, 我们都假定已预设了这样一个全空间: 一切元素、子集等都是来自这个空间的. 我们现在用 X 表示这个空间. X 的子集一般用带上、下标 (绝大多数情况下是下标) 或不带标的大写字母表示; 空集用 $\varnothing$ 表示.

我们当然也知道下列的集合运算:

1. 并

$$E_1 \cup E_2 := \{x; x \in E_1 \text{ 或 } x \in E_2\}, \quad \cup_{i\in I} E_i := \{x;\ \text{存在 } i \in I,\ \ x \in E_i\}.$$

2. 交

$$E_1 \cap E_2 := \{x; x \in E_1 \text{ 且 } x \in E_2\}, \quad \cap_{i\in I} E_i := \{x;\ \text{任意 } i \in I,\ \ x \in E_i\}.$$

为省事, $E_1 \cap E_2$ 也往往写成 E_1E_2. 若 $E_1E_2 = \varnothing$, 则 $E_1 \cup E_2$ 往往用 $E_1 + E_2$ 表示; 或者说表达式 $E_1 + E_2$ 自动意味着 $E_1E_2 = \varnothing$, 无须另行声明.

这是最基本的集合运算. 要学会将一些我们熟悉的东西用这种运算符号表示出来. 例如, 设 f_n, f 是具有相同定义域 X 的函数, $x \in X$, 那么我们知道 $f_n(x)$ 收敛到 $f(x)$ 是指“对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$”. 由于“任意”就是“交”,“存在”就是“并”, 故翻译成集合语言, 其收敛的集合可表示为

$$\cap_{\varepsilon>0} \cup_{N=1}^{\infty} \cap_{n\geqslant N} \{x; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

以后我们还要经常用到以下概念.

3. 示性函数

$$1_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

示性函数在有些文献中称为特征函数. 但由于概率论中特征函数是另一种函数的唯一称呼, 我们选择将上述函数称为示性函数.

集合与其示性函数相互唯一确定, 即

$$E = F \Longleftrightarrow 1_E = 1_F.$$

现在设 $E_n \subset X$, $n = 1, 2, \cdots$. 我们定义如下.

4. 上极限

$$\begin{aligned} \limsup_n E_n :&= \{x : \exists \text{无穷多个 } n \text{ 使 } x \in E_n\} \\ &= \{x : x \in E_n \text{ i.o.}\} \\ &= \{x \in X : \forall n, \exists k \geqslant n \text{ 使 } x \in E_k\} \\ &= \cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty E_k. \end{aligned}$$

这里第一个等号和第二个等号后面的描述实际上是完全一样的, 只不过把中文换为英文 —— i.o. 是 infinitely often 的缩写, 写起来会简洁一些.

5. 下极限

$$\begin{aligned} \liminf_n E_n :&= \{x \in X : \text{只有有穷多个 } n \text{ 使 } x \notin E_n\} \\ &= \{x \in X : \exists n, \forall k \geqslant n, x \in E_k\} \\ &= \cup_{n=1}^\infty \cap_{k=n}^\infty E_k. \end{aligned}$$

易见上极限和下极限的关系是: $\liminf_n E_n \subset \limsup_n E_n$, 这很有点像数列的上、下极限之间的关系. 回忆当数列的上、下极限相等时, 则极限存在, 因此我们可以类比地定义集合序列的极限.

6. 极限

若 $\limsup_n E_n = \liminf_n E_n$, 则称极限存在, 且记为 $\lim_n E_n$.

7. 单调列

若 $\forall n$, $E_n \subset E_{n+1}$, 则称为单调上升列, 记为 $E_n \uparrow$. 此时极限存在且 $\lim_n E_n = \cup_n E_n$.

若 $\forall n$, $E_n \supset E_{n+1}$, 则称为单调下降列, 记为 $E_n \downarrow$. 此时极限存在且 $\lim_n E_n = \cap_n E_n$.

8. 余集

集合 E 的余集定义为

$$E^c := \{x : x \notin E\}.$$

显然有

$$E \subset F \Longleftrightarrow E^c \supset F^c.$$

注意余集与全空间是有关系的, 空间不一样, 同一个集合的余集当然也不一样.

9. 差

$$E \setminus F := E \cap F^c.$$

如果 $F \subset E$, 则为了强调此点的时候也称此差为真差, 写为 $E - F$. 或者说, 符号 $E - F$ 自动意味着 $F \subset E$. 当然, 这并不意味着 $E \setminus F$ 就一定不能表示真差.

10. 对称差

$$E \triangle F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

11. 运算法则

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A,$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(\cup_{i\in I} A_i) \setminus B = \cup_{i\in I}(A_i \setminus B).$$

12. De Morgan 原理

$$(\cup_{i\in I} E_i)^c = \cap_{i\in I} E_i^c, \quad (\cap_{i\in I} E_i)^c = \cup_{i\in I} E_i^c.$$

因此有

$$F \setminus (\cup_{i\in I} E_i) = \cap_{i\in I}(F \setminus E_i), \quad F \setminus (\cap_{i\in I} E_i) = \cup_{i\in I}(F \setminus E_i).$$

1.2 常 用 集 类

以 X 的子集为元素的集合称为集类. 我们以后要研究的集类全都满足的运算性质. 下面依次引入这些集类.

定义1.2.1　设 $\mathscr{S}$ 是非空集类. 称 $\mathscr{S}$ 是半环, 如果

(1) $\varnothing \in \mathscr{S}$;

(2) $A,\ B \in \mathscr{S} \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathscr{S}$;

(3) 对任意 $A, B \in \mathscr{S}$, $A \subset B$, $B \setminus A$ 可表示为 $\mathscr{S}$ 中有限个两两互不相交集合的并.

而如果还有 $X \in \mathscr{S}$, 则 $\mathscr{S}$ 称为半代数.

注　由于 $B \setminus A = B \setminus A \cap B$, 故 (2) + (3) 意味着任意差 $B \setminus A$ 均可以表示 $\mathscr{S}$ 中有限个两两互不相交集合的并.

例1.2.2　设 $X = (-\infty, +\infty)$, $\mathscr{S} = \{[a, b), -\infty < a \leqslant b < +\infty\}$. 则 $\mathscr{S}$ 为半环.

例1.2.3　设 X 为任意空间, I 是任意指标集, $A_i \subset X, \forall i$ 且 $i \neq j$ 时 $A_iA_j = \varnothing$. $\mathscr{S} = \{\varnothing, A_i,\ i \in I\}$. 则 $\mathscr{S}$ 为半环.

例1.2.4　设 $X = [0, 1)$, $\mathscr{S} = \{[a, b), 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1\}$. 则 $\mathscr{S}$ 为半代数.

定义1.2.5　设 $\mathscr{R}$ 为非空集类. 若

$$E, F \in \mathscr{R} \Rightarrow E \cup F,\quad E \cap F,\quad E \setminus F \in \mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为环.

在环的定义中, 条件 $E \cap F \in \mathscr{R}$ 实际上是多余的: 它可以从另外两条推出. 事实上我们有如下命题.

命题1.2.6　设 $\mathscr{R}$ 为对并和差封闭的集类, 则

(1) $E, F \in \mathscr{R} \Rightarrow E \triangle F, E \cap F \in \mathscr{R}$.

(2) $E_i \in \mathscr{R}, i = 1, 2, 3, \cdots, n \Longrightarrow \cup_{i=1}^n E_i \in \mathscr{R},\quad \cap_{i=1}^n E_i \in \mathscr{R}$.

证明　(1)

$$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E),$$

$$E \cap F = (E \cup F) - (E \triangle F).$$

(2) 归纳法.　　Q.E.D.

之所以在环的定义中保留对交的封闭性质是因为这样看起来自然一些, 并且这一点反正是要明确的. 而有了上面的命题, 在验证一个集类是环的时候我们就可以省略一步. 同时我们还有下面的命题.

命题1.2.7　$\mathscr{R}$ 为环当且仅当 $\mathscr{R}$ 关于并及真差封闭.

证明　必要性显然. 充分性: 事实上, 设 $E, F \in \mathscr{R}$, 则 $E \cup F \in \mathscr{R}$, 因而 $E - F = E \cup F - F \in \mathscr{R}$.　　Q.E.D.

现在来看一些环与非环的例子.

例1.2.8　设 X 是一集合, 则 X 的所有有限子集构成的集类是环.

例1.2.9　$\mathscr{R} := \{\cup_{i=1}^n [a_i, b_i), n = 1, 2, \cdots, -\infty < a_i \leqslant b_i < +\infty\}$ 是环.

证明是简单的. 首先易见 $\mathscr{R}$ 对有限交与并均封闭. 又因为

$$[a,b)\setminus[c,d)\in\mathscr{R},$$

所以由 De Morgan 原理

$$\begin{aligned}&\cup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\setminus\cup_{j=1}^{m}[c_j,d_j)\\=&\cup_{i=1}^{n}([a_i,b_i)\setminus\cup_{j=1}^{m}[c_j,d_j))\\=&\cup_{i=1}^{n}\cap_{j=1}^{m}([a_i,b_i)\setminus[c_j,d_j))\\\in&\mathscr{R}.\end{aligned}$$

这样的一个具体结果实际上可推广到一般的情形, 见引理 1.3.4. 此外, 读者可以自己验证下面两个例子.

例1.2.10 设 X 是一无穷集合, n 是一整数, 则 X 的所有由 n 个元素组成的有限子集构成的集类不是环.

例1.2.11 $\mathscr{R}:=\{[a,b),-\infty<a\leqslant b<+\infty\}$ 不是环.

定义1.2.12 一个环 $\mathscr{R}$ 若含全空间, 则称为代数.

例 1.2.9 只是环而不是代数. 但下面的集类是代数:

$$\mathscr{A}:=\{\cup_{i=1}^{n}[a_i,b_i),\ -\infty\leqslant a_i\leqslant b_i\leqslant\infty\},\tag{2.1}$$

这里约定当 $a=-\infty$ 时, $[a,b)=(-\infty,b)$.

要验证一个集类为代数, 当然可以直接用定义, 先证明它为环, 再验证它包含全空间. 但通过下面的结果去验证会更快捷一些.

命题1.2.13 一非空集类 $\mathscr{R}$ 为代数的充要条件是下面两条之一成立:

(1) $\mathscr{R}$ 对并及余封闭;

(2) $\mathscr{R}$ 对交及余封闭.

证明 两个条件的必要性显然, 下面证充分性. 设全空间为 X.

(1) 设 $\mathscr{R}$ 对并及余封闭, 首先, 注意任取 $F\in\mathscr{R}$, 有 $F^c\in\mathscr{R}$, 从而

$$X=F\cup F^c\in\mathscr{R}.$$

其次, 设 $F,E\in\mathscr{R}$, 则

$$E\setminus F=E\cap F^c=(E^c\cup F)^c\in\mathscr{R},$$

所以 $\mathscr{R}$ 是代数.

(2) 设 $\mathscr{R}$ 对交及余封闭, $E,F\in\mathscr{R}$. 则 $F^c\in\mathscr{R}$, 故 $\varnothing=F\cap F^c\in\mathscr{R}$, 进而 $X=\varnothing^c\in\mathscr{R}$.

又 $E^c,F^c\in\mathscr{R}$, 故 $E^c\cap F^c\in\mathscr{R}$, 进而 $E\cup F=(E^c\cap F^c)^c\in\mathscr{R}$. Q.E.D.