世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学（下册）

学习辅导与习题解答

（理工类·简明版·第五版）

◎ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学（下册）

学习辅导与习题解答

（理工类·简明版·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（理工类·简明版·第五版）（下册）学习辅导与习题解答/吴赣昌主编. —北京：中国人民大学出版社，2019.1
21 世纪数学教育信息化精品教材. 大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-26644-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 001274 号

21 世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
高等数学（下册）学习辅导与习题解答
（理工类·简明版·第五版）
吴赣昌 主编
Gaodeng Shuxue Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www. crup. com. cn		
	http：//www. ttrnet. com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京七色印务有限公司		
规　　格	148 mm×210 mm　32 开本	**版　　次**	2019 年 1 月第 1 版
印　　张	11	**印　　次**	2019 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	415 000	**定　　价**	35.00 元

前　言

人大版“21世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新型“立体化教材”。教材自出版以来，历经多次升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育在新时代的教育改革要求，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国600余所高等院校广泛采用。

作者本次启动的“大学数学立体化教材”（第五版）的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件，为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境。

作者本次关于“大学数学立体化教材”（第五版）的改版具体包括：面向普通本科院校的“理工类·第五版”、“经管类·第五版”与“纯文科类·第四版”；面向普通本科少学时或三本院校的“理工类·简明版·第五版”与“经管类·简明版·第五版”；面向专升本或高职本科的“综合类·应用型本科版”；面向高职高专院校的“理工类·高职高专版·第四版”、“经管类·高职高专版·第四版”与“综合类·高职高专版·第三版”。

本次改版的指导思想：为帮助教材用户更好地理解教材中重要的概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验，包括数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D函数图形实验、3D函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等。与教材正文所举示例相比，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大。本系列教材于2017年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验。其中，大部分实验都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中。

为方便同学们使用最新版“大学数学立体化教材”，学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”。该系列教辅书均根据教材章节顺序建设了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的主要知识归纳、典型例题分析与习题解答等内容，而每一章的设计中包括了

该章的教学基本要求、知识点网络图、题型分析与总习题解答。上述设计有助于学生在课后自主研读这些教辅书时，更好更快地掌握所学知识，从而在较短时间内取得好成绩。

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了。事实上，你需要在课后花更多时间主动去做相关训练，才能真正掌握所学知识。而在课后的自学与练习过程中，首先要认真、反复地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解。

与传统的教材与教辅建设缺乏教学互动不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者团队，通过数苑网（www. sciyard. com）为本系列教材的用户提供在线学习服务。另外，用户还可扫描下方二维码并关注“数苑”公众号，通过在线学习栏目获得相关在线服务。

吴赣昌

2018 年 2 月 26 日

目　录

第 8 章　空间解析几何与向量代数

本章中我们先介绍向量的概念及向量的某些运算，然后介绍空间解析几何，其主要内容包括平面和直线方程、一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题. 这些方程的建立和问题的解决是以向量作为工具的. 正像平面解析几何的知识对于学习一元函数微积分是不可缺少的一样，本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学将起到重要作用.

本章教学基本要求：

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.
2. 掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），了解两个向量垂直与平行的条件.
3. 掌握单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式及其运算.
4. 掌握平面方程和直线方程及其求法，会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题.
5. 理解曲面方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.
6. 了解空间曲线的参数方程和一般方程.
7. 了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程.

§8.1　向量及其线性运算

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 8-1-1 和表 8-1-2.

表 8-1-1　　**向量的概念**

定义	既有大小又有方向的量称为向量.
表示	用空间有向线段来表示向量. $\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示以 M_1 为起点、M_2 为终点的向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段所指方向表示向量的方向.
自由向量	与起点位置无关而只考查其大小和方向的向量.
向量相等	大小与方向都相同的向量，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.
向量的模	向量的大小即有向线段的长度称为向量的模，记为 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert$.

单位向量	模等于 1 的向量称为单位向量.
零向量	模等于 0 的向量称为零向量，零向量的方向是任意的.
平行向量	方向相同或相反的两个向量，即两有向线段平行，则称两向量平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.
方向角	非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴正向的三个夹角 α，β，γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.
方向余弦	非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 α，β，γ 的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.
负向量	设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则与 $\boldsymbol{a}$ 大小相同方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

表 8-1-2　　向量的线性运算及性质

加减运算	设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个向量，将 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点所构成的新的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，而 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.
数乘运算	设 $\boldsymbol{a}$ 为向量，λ 为一实数，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为一新的向量，它的模为：$\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$；方向如下规定： 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 一致； 当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 相反； 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.
性质	(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$； (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$； (3) $\lambda(u\boldsymbol{a})=u(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda u)\boldsymbol{a}$； (4) $(\lambda+u)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$； (5) 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

二、典型例题分析

例 1　设线段 AB 被 P_1，P_2，P_3，P_4 依次分为 5 等份，已知 $P_2(2,-2,2)$，$P_4(-2,4,-8)$，求点 A 及点 B 的坐标.

解　根据题意，可得：$\dfrac{\overrightarrow{P_2A}}{\overrightarrow{AP_4}}=-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\overrightarrow{P_2B}}{\overrightarrow{BP_4}}=-3$，分别设点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$\frac{2-x_1}{x_1-(-2)}=-\frac{1}{2},\ \frac{-2-y_1}{y_1-4}=-\frac{1}{2},\ \frac{2-z_1}{z_1-(-8)}=-\frac{1}{2},$$

解得　$x_1=6$，$y_1=-8$，$z_1=12$.

同理可建立方程　$\dfrac{2-x_2}{x_2-(-2)}=\dfrac{-2-y_2}{y_2-4}=\dfrac{2-z_2}{z_2-(-8)}=-3$，

解得　$x_2=-4$，$y_2=7$，$z_2=-13$.

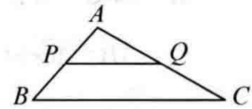
故　$A(6,-8,12)$，$B(-4,7,-13)$.

小结：本例也可以利用两点间的距离公式求解. 利用向量的关系进行求解或证明时，一定要注意向量的方向，对应地，它在数值上表现为正负号.

例 2 利用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边.

证 如例 2 图所示，设 P，Q 分别为$\triangle ABC$ 的两边 AB，AC 的中点，则

$$\overrightarrow{PA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$



例 2 图

且

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

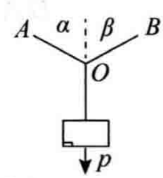
所以

$$\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{BC}.$$

例 3 重量为 p 的重物用绳索挂在 A，B 两个钉子上，如例 3 图所示. 设 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，求 A，B 所受的拉力 f_1，f_2.

解 根据质点 O 在水平方向和竖直方向上的受力平衡知：在水平方向上，质点 O 受到钉子 A 的拉力的大小为 $f_1\sin\alpha$ 的水平向左的分力和钉子 B 对质点 O 的拉力的水平向右的分力 $f_2\sin\beta$；在竖直方向上，竖直向上的力为钉子 A，B 对质点 O 的拉力的竖直向上的分力，分别为 $f_1\cos\alpha$ 和 $f_2\cos\beta$，竖直向下的力为重力 p，则

$$\begin{cases} f_1\cos\alpha+f_2\cos\beta=p \\ f_1\sin\alpha-f_2\sin\beta=0 \end{cases}，即\begin{cases} \frac{12}{13}f_1+\frac{4}{5}f_2=p \\ \frac{5}{13}f_1-\frac{3}{5}f_2=0 \end{cases},$$



例 3 图

解得 $f_1=\frac{39}{56}p$，$f_2=\frac{25}{56}p$.

小结：本例运用了力的平行四边形分解原理，这与平行四边形合成原理互逆.

三、习题 8-1 解答

1. 填空：

(1) 要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 应满足________；

(2) 要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 应满足________.

解 (1) $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$（利用平行四边形法则判断）；

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向（利用平行四边形法则判断）.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

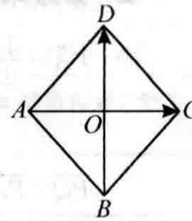
3. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

解　如题 3 图所示，利用平行四边形法则，得

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

同理，　$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$，



题 3 图

4. 把△ABC 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1，D_2，D_3，D_4，再把各分点与点 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

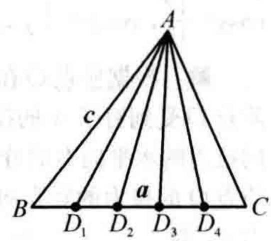
解　如题 4 图所示，$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{D_1D_2}=\overrightarrow{D_2D_3}=\overrightarrow{D_3D_4}=\overrightarrow{D_4C}$，所以

$$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{\boldsymbol{a}}{5}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$



题 4 图

§8.2　空间直角坐标系 向量的坐标

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 8-2-1 和表 8-2-2.

表 8-2-1　　**空间直角坐标系的概念**

坐标系	过空间一定点 O，按右手规则作三条相互垂直的数轴：x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），这样的三条坐标轴称为一个空间直角坐标系，点 O 称为坐标原点.
坐标面	由 x 轴与 y 轴确定的平面称为 xOy 坐标面； 由 y 轴与 z 轴确定的平面称为 yOz 坐标面； 由 x 轴与 z 轴确定的平面称为 xOz 坐标面.
卦限	三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，分别称为第Ⅰ卦限，…，第Ⅷ卦限.

点的坐标	空间上任意点M在三条坐标轴上的投影P, Q, R在各自轴上的坐标记为x, y, z, 则点M与有序数组(x, y, z)之间建立了一一对应关系，称(x, y, z)为点M的坐标，点M称为以(x, y, z)为坐标的点.
距离公式	设$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，则M_1与M_2之间的距离为 $$d=\|M_1M_2\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

表 8-2-2　　向量的坐标表示

向量的坐标	设向量$\boldsymbol{a}$在三条坐标轴x轴，y轴，z轴上的投影分别为a_x, a_y, a_z，则$\boldsymbol{a}$与有序数组$\{a_x, a_y, a_z\}$建立了一一对应关系，称有序数组$\{a_x, a_y, a_z\}$为向量$\boldsymbol{a}$的坐标，并记 $$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\} \text{ 或 } (a_x, a_y, a_z).$$ 这称为向量的坐标表示式.
坐标表示	设$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，则 (1) $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\}$； (2) $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.
向量的模与方向余弦	设$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{a}$的方向角为α, β, γ，则 (1) $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$； (2) $a_x=\|\boldsymbol{a}\|\cos\alpha$, $a_y=\|\boldsymbol{a}\|\cos\beta$, $a_z=\|\boldsymbol{a}\|\cos\gamma$； (3) 当$\|\boldsymbol{a}\|\neq 0$时， $$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\gamma=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{cases}.$$ 当$\|\boldsymbol{a}\|\neq 0$时，与$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量为 $$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$
向量在轴上的投影	设向量$\boldsymbol{a}$与数轴u轴的夹角为φ，则$\|\boldsymbol{a}\|\cos\varphi$称为向量$\boldsymbol{a}$在$u$轴上的投影，记为$a_u$或$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$，即 $$a_u=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\cos\varphi.$$

二、典型例题分析

例 1　设点 A 位于第Ⅰ卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=6$，求点 A 的坐标.

解　令 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$. 由关系式 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，得

$$\cos^2\gamma=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

因点 A 在第Ⅰ卦限，知 $\cos\gamma>0$，故

$$\cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

于是　$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|e_{\overrightarrow{OA}}=6\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right\}=\{3,3\sqrt{2},3\}$，

故点 A 的坐标为 $(3,3\sqrt{2},3)$.

小结：一个向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 刻画了此向量的方向，并且向量 $\boldsymbol{r}$ 分别与方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 的乘积即是向量 $\boldsymbol{r}$ 在空间直角坐标系中的坐标，即向量 $\boldsymbol{r}$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影. 另外，方向余弦还有一条重要性质：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 2　从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=\{8,9,-12\}$ 方向取长为 34 的线段 AB，求点 B 的坐标.

解　设点 B 的坐标为 (x,y,z)，则

$$\overrightarrow{AB}=\{x-2,y+1,z-7\},$$

且 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$x-2=8\lambda,\ y+1=9\lambda,\ z-7=-12\lambda,$$

$$34=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(8\lambda)^2+(9\lambda)^2+(-12\lambda)^2}$$

从而　$\lambda=2$，

所以点 B 的坐标为 $\{18,17,-17\}$.

小结：两向量方向相同表明两向量满足数乘关系，即两向量的对应分坐标成比例.

三、习题 8-2 解答

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：

$A(2,-2,3)$； $B(3,3,-5)$； $C(3,-2,-4)$； $D(-4,-3,2)$.

解 想象各点及各卦限在空间中的位置，易知上述各点依次在第Ⅳ，Ⅴ，Ⅷ，Ⅲ卦限.

2. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$A(2,3,0)$； $B(0,3,2)$； $C(2,0,0)$； $D(0,-2,0)$.

解 在 xOy，yOz，zOx 坐标面上的点的坐标中有一个为零，依次是 $z=0$，$x=0$ 与 $y=0$；在 x，y，z 轴上点的坐标中有两个坐标为零，依次为 $y=z=0$，$x=z=0$ 与 $x=y=0$.

本题所给四点依次在 xOy 面上，yOz 面上，x 轴上，y 轴上.

3. 求点 (a,b,c) 关于 (1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 关于坐标平面的对称点的坐标，只需将原坐标中的一个坐标改为相反数，使得两对称点的连线垂直于该坐标平面.

点 (a,b,c) 关于 xOy，yOz，zOx 面的对称点依次是 $(a,b,-c)$，$(-a,b,c)$，$(a,-b,c)$.

(2) 关于各坐标轴的对称点，可看成连续对两个坐标面施行了对称变换的结果，由 (1) 知，这时需将原三个坐标中的两个改成相反数.

点 (a,b,c) 关于 x，y，z 轴的对称点依次是 $(a,-b,-c)$，$(-a,b,-c)$，$(-a,-b,c)$.

(3) 关于原点的对称点的坐标，则需把原坐标的三个数都改成相反数，(a,b,c) 关于原点的对称点的坐标是 $(-a,-b,-c)$.

4. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，求出各垂足的坐标.

解 作坐标面的垂线，垂足在该坐标面上，因此对应的那个坐标为零，例如，过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 依次引 xOy，yOz，zOx 面的垂线，垂足坐标依次为

$$(x_0,y_0,0),\ (0,y_0,z_0),\ (x_0,0,z_0).$$

而坐标轴上的点有两个坐标为零. 因此若垂足在各坐标轴上，另两个坐标应为零. 于是，过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 作 x，y，z 轴垂线的垂足，其坐标依次是

$$(x_0,0,0),\ (0,y_0,0),\ (0,0,z_0).$$

5. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

解 过点 P_0 而平行于 z 轴的直线上的点的坐标为 (x_0,y_0,z)，即前两个坐标与 P_0 的坐标相同，而第三个坐标换成流动坐标 $z\in\mathbf{R}$.

过点 P_0 而平行于 xOy 面的平面上点的坐标为 (x,y,z_0)，即与 P_0 的第三

个坐标相同，而前两个坐标应换为流动坐标.

6. 求点 $M(5,-3,4)$ 到各坐标轴的距离.

解　由点 M 向各坐标轴作垂线，其垂足依次为 $N_1(5,0,0)$，$N_2(0,-3,0)$，$N_3(0,0,4)$. 因此，点 M 到各坐标轴的距离依次为

$$d_x=|N_1M|=\sqrt{0+(-3)^2+4^2}=5;$$
$$d_y=|N_2M|=\sqrt{5^2+0+4^2}=\sqrt{41};$$
$$d_z=|N_3M|=\sqrt{5^2+(-3)^2+0}=\sqrt{34}.$$

7. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解　设该点为 $M(x,y,z)$，因为 $M\in yOz$，所以 $x=0$，故该点的坐标为 $M(0,y,z)$，而 $|MA|=|MB|$，即

$$(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4^2+(y+2)^2+(z+2)^2,$$

整理得　$3y+4z=-5$.　①

同理，由 $|MA|=|MC|$，得

$$9+(y-1)^2+(z-2)^2=0+(y-5)^2+(z-1)^2,$$

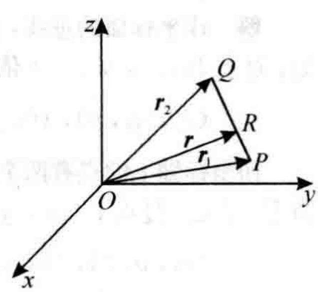
即　$4y-z=6$.　②

将方程 ① 与方程 ② 联立，解方程组，得 $y=1$，$z=-2$，所求点为 $(0,1,-2)$.

8. 设 P，Q 两点的向径分别为 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，点 R 在线段 PQ 上，且 $\dfrac{|PR|}{|RQ|}=\dfrac{m}{n}$，证明点 R 的向径为 $\boldsymbol{r}=\dfrac{n\boldsymbol{r}_1+m\boldsymbol{r}_2}{m+n}$.

证　如题 8 图所示，利用平行四边形法则，$\overrightarrow{RQ}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}$，$\overrightarrow{PR}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$，由 $\dfrac{|PR|}{|RQ|}=\dfrac{m}{n}$，且 P，R，Q 共线，得

$$\overrightarrow{PR}=\frac{m}{n}\overrightarrow{RQ}.$$



题 8 图

即　$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\dfrac{m}{n}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r})\Rightarrow\boldsymbol{r}=\dfrac{n\boldsymbol{r}_1+m\boldsymbol{r}_2}{m+n}$，命题得证.

9. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$，试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-0,-1-1,0-2\}=\{1,-2,-2\}$;

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2\{1,-2,-2\}=\{-2,4,4\}.$

10. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{6,7,-6\}$ 的单位向量.

解 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=\sqrt{121}=11.$

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right\}.$$

故平行于 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{a}^0$ 或 $-\boldsymbol{a}^0$，即为

$$\left\{\pm\frac{6}{11},\pm\frac{7}{11},\mp\frac{6}{11}\right\}.$$

11. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(3-4)^2+(0-\sqrt{2})^2+(2-1)^2}=2.$

设 α，β，γ 为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角，则

$$\cos\alpha=\frac{3-4}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{0-\sqrt{2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma=\frac{2-1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{1}{2}.$$

从而 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$.

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦分别满足

(1) $\cos\alpha=0$；(2) $\cos\beta=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$.

问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 设该向量为 $\boldsymbol{a}$. 因 $\cos\alpha=0$，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，故 $\boldsymbol{a}\perp Ox$ 轴，或 $\boldsymbol{a}/\!/ yOz$ 面.

(2) $\because\ \cos\beta=1$，

$\therefore\ \beta=0$，故 $\boldsymbol{a}/\!/Oy$ 轴且 $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴正向一致,或 $\boldsymbol{a}\perp xOz$ 面并与 y 轴正向一致.

(3) $\because\cos\alpha=\cos\beta=0$，$\therefore\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$，故 $\boldsymbol{a}/\!/Oz$ 轴，或 $\boldsymbol{a}\perp xOy$ 面.

13. 一向量的终点为点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴，y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求该向量的起点 A 的坐标.

解 设 $A(x,y,z)$，则

$\overrightarrow{AB}=\{2-x,-1-y,7-z\}.$

按题设，此向量在坐标轴上的投影依次为 4，-4 和 7，故

$$2-x=4,\ -1-y=-4,\ 7-z=7,\ 即\ x=-2,\ y=3,\ z=0,$$

从而所求起点为 $A(-2,3,0)$.

14. 求与向量 $\boldsymbol{a}=\{16,-15,12\}$ 平行，方向相反，且长度为 75 的向量 $\boldsymbol{b}$.

解 设所求向量为 $\boldsymbol{b}$，则

$$\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{a}=\{-16\lambda,\ 15\lambda,\ -12\lambda\},\ \lambda>0.$$

又　　$|\boldsymbol{b}|=75=\sqrt{(-16\lambda)^2+(15\lambda)^2+(-12\lambda)^2}=25|\lambda|\Rightarrow\lambda=3$，

故所求向量为 $\boldsymbol{b}=\{-48,\ 45,\ -36\}$.

§8.3　数量积　向量积　*混合积

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 8-3-1.

表 8-3-1　　　　数量积　向量积　混合积

数量积	定义	称 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos(\boldsymbol{a}\,\widehat{,}\,\boldsymbol{b})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.
	坐标表示	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ $\cos(\boldsymbol{a}\,\widehat{,}\,\boldsymbol{b})=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.
	性质	(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$; (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$; (3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$; (4) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.
向量积	定义	称 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，其大小为 $\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin(\boldsymbol{a}\,\widehat{,}\,\boldsymbol{b})$. 方向规定为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系.
	坐标表示	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$ $=\left\{\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right\}$.
	性质	(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$; (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$; (3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$; (4) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.
混合积	定义	称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的混合积.
	坐标表示	$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$.