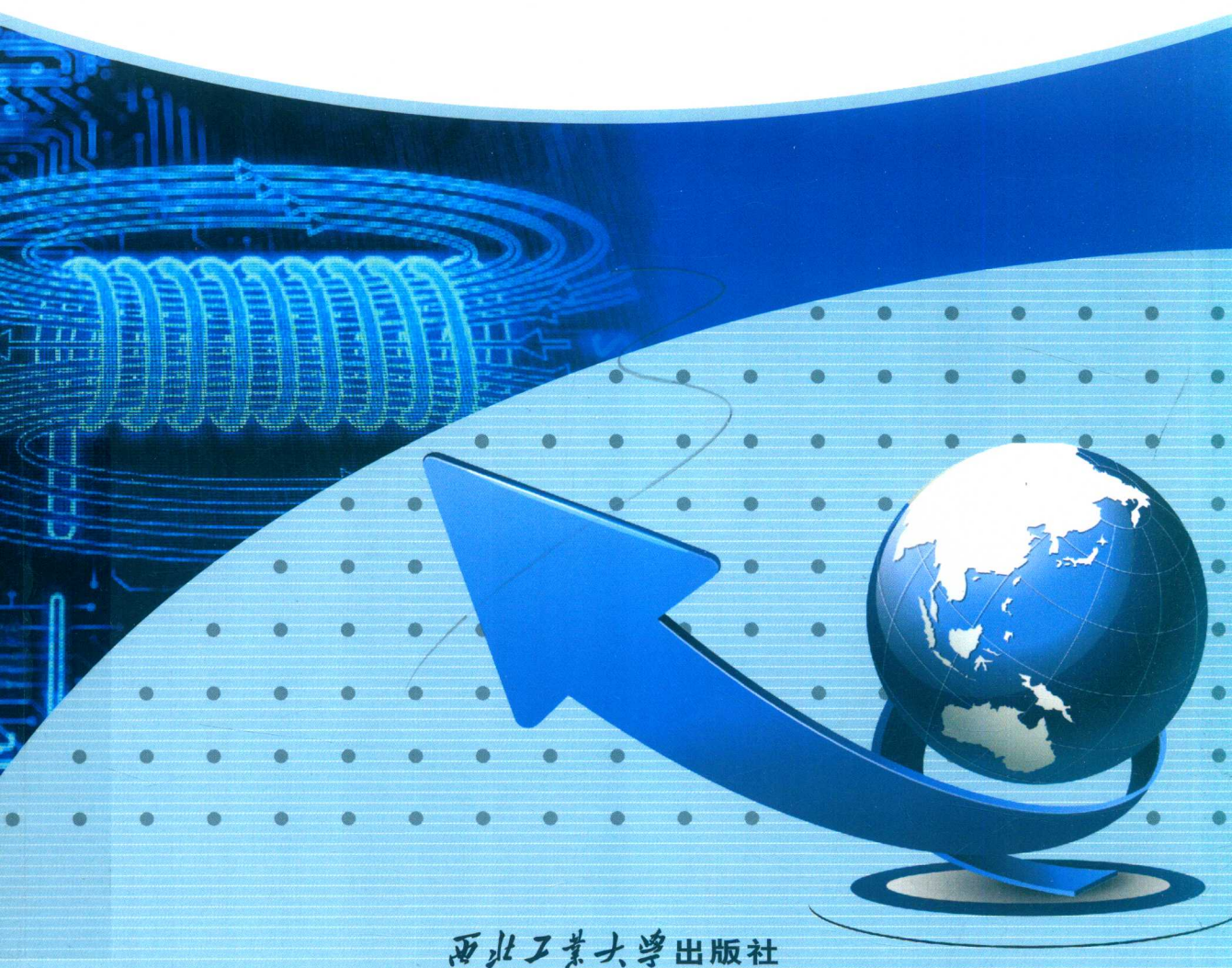




工业和信息化部“十二五”规划教材

工程电磁场

骆光照 付朝阳 ©编著



西北工业大学出版社



工业和信息化部“十二五”规划教材

GONGCHENG DIANCICHANG

工程电磁场

骆光照 付朝阳 编著



西北工业大学出版社

西安

【内容简介】 本书为工业和信息化部“十二五”规划教材。全书分为9章。第1章场论基础,介绍场的基本概念以及解决场的问题的数学方法。第2章电介质与导体、第3章静电场、第4章恒定电场为电场部分,对电介质材料、电场的基本理论、电场的分析方法作详细介绍。第5章磁介质与铁磁材料、第6章恒定磁场为磁场部分,对磁介质材料、磁场的基本理论以及分析方法作详细介绍。第7章为磁路的计算方法,对电磁场问题的解决方法作有效补充。第8章为时变电磁场的基本原理,对时变电磁场的一般性规律进行简要概述。第9章为典型的工程电磁场问题,以实际的例子将工程电磁场问题具体化。

本书每一章都附有一定量的习题,便于读者对所学的内容自我检测、加深理解。

本书可作为高等学校电气工程学科本科生的教材,也可作为诸如电机学、电力系统分析、电器技术、电磁兼容及无线能量传输技术等专业课程的学习提供理论支撑。

图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场/骆光照,付朝阳编著. —西安:西北工业大学出版社,2018.5
ISBN 978-7-5612-5253-6

I. ①工… II. ①骆… ②付… III. ①电磁场—高等学校—教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第255067号

策划编辑:杨军

责任编辑:李阿盟

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072

电话:(029)88493844 88491757

网址:www.nwpup.com

印刷者:陕西省富平县万象印务有限公司

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:13.5

字数:328千字

版次:2018年5月第1版

2018年5月第1次印刷

定价:39.00元

前 言

工程电磁场主要探讨在工程领域中电磁场和电磁波产生、转换及相互作用的机理。电、磁能量的相互转换主要以电磁场和电磁波的形式出现,常见的电动机和发电机就是以电磁能转换为媒介来实现电能和机械能的相互转换的,继电器、接触器及电磁断路器等电器设备的工作也是通过电磁能量转换实现的;在电力传输系统中,各类电压、功率等级的变电设备、传输线等工作时 also 存在着复杂的电磁场耦合关系;工业现场中各种电磁系统或设备在工作时所构成的电磁环境中会产生相互影响,其原因也是电磁能量的相互转换。可见,工程电磁场是电气工程专业的重要的技术基础理论,为诸如电机学、电力系统分析、电器技术、电磁兼容及无线能量传输技术等专业课程的学习提供理论支撑。

电磁场不像客观存在的实体物质容易感知,因其抽象性,工程电磁场是一门较难学习的课程。在教材编写的过程中,笔者反复琢磨、对比,以易学易懂为目标,对全书的章节做了合理化的编排。

第1章为场论基础,介绍场的基本概念以及梯度、散度和旋度等基本概念。相比其他同类教材,本章对梯度、散度、旋度等相关概念作简要介绍,篇幅简短,旨在巩固这些概念,为后面的学习作铺垫。另外,边界条件作为电磁场的一个重点与难点,本章提前对电磁场的边界条件问题作简要概述,加深印象,以便于后续章节的学习。

第2章电介质与导体、第3章静电场、第4章恒定电场应当作为一个整体进行学习。相比以往的教材中对电介质与导体较为简单的描述,本书对电介质与导体作详细介绍,让读者更加易于理解静电场、恒定电场。

第5章磁介质与铁磁材料、第6章恒定磁场同样应当作为一个整体进行学习。磁介质作为分析磁场的载体,有必要加深理解。第5章详细分析物质产生磁性的机理,对铁磁材料作详细介绍。在第5章的基础上,第6章内容的理解将更加容易。

第7章为磁路的计算方法。磁路作为电磁场问题分析的另一手段,是对电磁场问题解决方法的有效补充。通过对磁路的基本概念、气隙磁导的计算方法、磁路计算方法的学习,能够初步解决基本的电磁场问题,也为后续的场路结合分析方法奠定基础。

第8章为时变电磁场的基本原理。时变电磁场更具一般性,前面静电场、恒定电场、恒定磁场均为时变电磁场的特例。积分形式、微分形式的麦克斯韦方程总结时变电磁场的一般性规律。

第9章为典型的工程电磁场问题。本章以实际的例子将工程电磁场问题具体化,对前述章节的理论分析作有效补充。通过实际的例子,反馈前面所学,使得前面所学知识得到实践。

本书相较于国内其他教材,具有以下两方面的特色。

(1)在保持电磁场基本内容的前提下,将电介质与导体、磁介质与铁磁材料分别单独列为

一章,与静电场和恒定磁场分开介绍,并适当增加铁磁材料特性曲线及性能指标的介绍,突出强调介质特性对电磁问题的影响,有助于促进学生更好地理解介质对电磁问题的影响。

(2)针对电气工程专业培养特色,本书适当增加内容。第7章磁路的计算方法对等效磁路、简单磁路和复杂磁路的计算问题进行详细介绍,从路的角度对电磁场的场论分析进行有效补充。第9章典型的工程电磁场问题,内容更加翔实并具有针对性,给出一些典型的实际例子。这两章内容具有明显的工程背景,理论与实际联系紧密,突出工程电磁场这门课程的实用价值。

本书第1,2,5,7,8章和第9章的9.1~9.3节由骆光照编写,第3,4,6章和第9章的9.4节由付朝阳编写。在编写本书的过程中,凝聚了方学礼及其他多位同学的辛勤汗水。刘卫国、窦满峰、马瑞卿等教授提出过很多建设性的意见和建议。西北工业大学出版社的杨军老师为本书的顺利出版花费了大量心血,起到不可或缺的作用,在此表示诚挚的谢意。特别要感谢的是哈尔滨工业大学的李勇教授和西安交通大学的王曙鸿教授,他们在百忙之中精心审阅了本书,提出了许多中肯的建议和修改意见,使得本书能够进一步完善和提升。希望本书能够为电气工程学科的本科生在工频电磁场方面的学习带来方便。

由于水平和经验有限,书中难免存在疏漏和不妥之处,真诚希望使用本书的师生提出宝贵意见,以便对本书作进一步的完善与提高。

编著者

2017年8月

目 录

第 1 章 场论基础	1
1.1 场的概念	1
1.2 场的分类	2
1.3 等值面和矢量线	3
1.4 场的数学描述方法概述	6
1.5 标量场的方向导数与梯度	6
1.6 矢量场的通量和散度	9
1.7 矢量场的环量和旋度	12
1.8 哈密尔顿算子	15
1.9 电磁场的边界条件问题概述	18
习题一	18
第 2 章 电介质与导体	20
2.1 电介质	20
2.2 电流和电流密度	23
2.3 导体	24
习题二	29
第 3 章 静电场	30
3.1 真空中的静电场	30
3.2 电介质中的静电场	37
3.3 静电场的唯一性定理	50
3.4 镜像法	52
习题三	56
第 4 章 恒定电场	58
4.1 恒定电场的基本定律	58
4.2 媒质分界面上的边界条件	59
4.3 基本定理的微分形式与拉普拉斯方程	62
4.4 恒定电场与静电场的比较	64
习题四	66
第 5 章 磁介质与铁磁材料	67
5.1 物质表现出磁性的机理	67

5.2	磁通密度	69
5.3	磁介质的磁化	70
5.4	物质的磁性分类	71
5.5	物质磁化的特性曲线	74
5.6	铁磁性材料的分类	77
	习题五	94
第 6 章	恒定磁场	95
6.1	真空中的恒定磁场	95
6.2	磁介质中的恒定磁场	99
6.3	恒定磁场的边界条件	100
6.4	磁场的标量磁位与拉普拉斯方程	102
6.5	磁场的矢量磁位及泊松方程	105
	习题六	109
第 7 章	磁路的计算方法	110
7.1	电磁系统举例	110
7.2	磁路的概念及其基本定律	113
7.3	磁路计算的任务	118
7.4	气隙磁导的计算	119
7.5	简单磁路计算	129
7.6	复杂磁路计算	137
7.7	永磁磁路的计算	149
	习题七	156
第 8 章	时变电磁场的基本原理	161
8.1	法拉第电磁感应定律	161
8.2	全电流定律	163
8.3	时变电磁场的麦克斯韦方程	166
8.4	时变电磁场的边界条件	167
8.5	电磁动态位及其微分方程	170
	习题八	172
第 9 章	典型的工程电磁场问题	173
9.1	导体系统的电容计算	173
9.2	电导与电阻的计算	180
9.3	电感的计算	187
9.4	基于有限元法的电气设备分析	199
	习题九	206
附录	主要符号说明	208
	参考文献	210

第1章 场论基础

本章主要介绍场的基本概念及在解决场的问题中要用到的主要数学工具和方法。场的概念具有通用性,涉及许多应用领域,而不仅仅局限于电磁场。因此,有必要对场的基本概念、场的分类作简单介绍。在场的分析讨论中,梯度、散度和旋度是基本的数学工具。通过介绍标量函数方向导数的概念,给出梯度的定义及直角坐标系中梯度的计算公式;通过介绍矢量函数通量的概念,给出散度的定义及直角坐标系中散度的计算公式;通过介绍矢量函数环量和环量面密度的概念,给出旋度的定义及直角坐标系中旋度的计算公式。此外,为了简化运算,还给出哈密尔顿算子的定义和基本运算规则,用哈密尔顿算子表示梯度、散度和旋度。

1.1 场的概念

在许多科学、技术问题中,常常要考虑某种物理量(如温度、密度、电位、力、速度等)在空间的分布和变化规律。为了探索和揭示这些规律,引入场的概念。

场指物理量在时空中的分布情况,通常用空间位置函数来表征。具体来说,在全部空间或部分空间内的每一点,都对应着某个物理量的一个确定值,这个值可以是标量、矢量,也可以是张量,那么就定义在这个空间内确定了该物理量的一个场。如果物理量是标量,空间内形成的场称为标量场,如电势场、温度场、密度场等;如果物理量是矢量,空间内形成的场称为矢量场,如电场、速度场、力场等。对矢量场进行更一般化的推广,便有张量场的概念,广义相对论的应力能场是典型的张量场。本书对张量场不作讨论。

场的一个重要属性是它对空间的占有,它把物理状态作为空间的函数来描述,在此空间区域中,除了有限个点或某些表面外,场函数是处处连续的。另外,场也有可能包含与时间的相关性,若物理状态与时间无关,则为静态场;反之,则为动态场或时变场。

场的概念可以推广到各个领域,可以说包罗万象。

人体的正常温度是大体稳定的,但身体各个部分的温度会有差别,甚至各个部分随着一日的朝夕变化,温度也会有轻微变化;发高烧、发低烧时,人体温度就会有较大变化。可以说,人体就是一个典型的时变温度场。

常见的河流是一个流速场,也是最为典型的场,河流中水流的特征几乎囊括了场的所有特征。河中心水流快,靠近两边河岸的地方水流慢;当人要趟过一条河时,河底、河中部、河表面的水流对人体的冲击也不一样;一条河水的大体流向是朝一个方向的,但河面的水纹表明具体到河流空间的某一点,水流速度的方向不一样;在河流的局部会有回流的现象,有些地方会有漩涡;河中同一个空间点,随着季节的变化,水流的速度大小都会变化。

场的实际例子不胜枚举,因此对场的研究与人类的科学进步、生活需要息息相关。

1.2 场的分类

从前面的例子可以看出,场有很多相关因素,因此场的分类也具有多样性。按不同的方式分类,场可以分为标量场和矢量场、恒定场和时变场、无源场和有源场、无旋场和有旋场等。

一、标量场和矢量场

场空间中的每一点都对应着一个特征物理量,把这个特征物理量叫作场量。

场量为标量的场称为标量场,如温度场、密度场、能量场和电场等。

场量为矢量的场称为矢量场,如速度场、力场、流速场、电场和磁场等。

在直角坐标系中,场空间内任意一点 M 可以由三个坐标 x, y, z 确定,一个标量场和一个矢量场可分别用坐标的标量函数和矢量函数表示,即

$$u(M) = u(x, y, z) \quad (1-1)$$

$$\mathbf{F}(M) = \mathbf{F}(x, y, z) \quad (1-2)$$

标量场函数只表示 M 点处场量值的大小,没有方向。

矢量函数 $\mathbf{F}(M)$ 的坐标还可写成

$$\mathbf{F}(M) = F_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + F_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + F_z(x, y, z)\mathbf{e}_z \quad (1-3)$$

式(1-3)中,函数 $F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)$ 分别是矢量函数 \mathbf{F} 在直角坐标系中三个坐标轴上的投影,为三个标量函数; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 分别为 Ox, Oy, Oz 轴正方向的单位矢量。

设 α, β, γ 分别为矢量 \mathbf{F} 与三个坐标轴正方向之间的夹角,称为方向角, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为方向余弦。根据矢量与其分量之间的关系,矢量函数 $\mathbf{F}(M)$ 可写成

$$\mathbf{F}(M) = F \cos \alpha \mathbf{e}_x + F \cos \beta \mathbf{e}_y + F \cos \gamma \mathbf{e}_z \quad (1-4)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{F_x}{F} \\ \cos \beta &= \frac{F_y}{F} \\ \cos \gamma &= \frac{F_z}{F} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

矢量场函数表示 M 点处场量值的大小和方向,利用方向余弦,确定了场量的方向。

二、恒定场和时变场

若场量仅与空间位置有关而不随时间变化,则称这种场为恒定场,例如恒定电场、恒定磁场。

如果场量不仅与空间位置有关,而且随时间变化,则称这种场为时变场,如交流电磁场。

标量时变场、矢量时变场分别用下式表示:

$$u(M) = u(x, y, z, t) \quad (1-6)$$

$$\mathbf{F}(M) = \mathbf{F}(x, y, z, t) \quad (1-7)$$

式中, t 为时间变量。

三、无源场和有源场

若在某一空间内的所有点上, 矢量场的散度都等于零, 则称该区域内的矢量场为无源场, 反之则称为有源场。如磁场是无源场, 因为磁感线是闭合的, 无头无尾, 如图 1-1 所示; 而静电场是有源场, 电场线始于正电荷, 终于负电荷, 如图 1-2 所示。

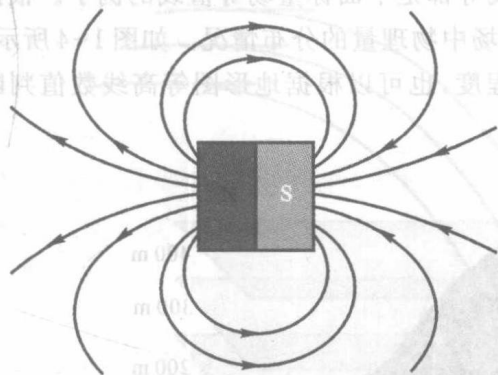


图 1-1 磁铁的闭合磁力线

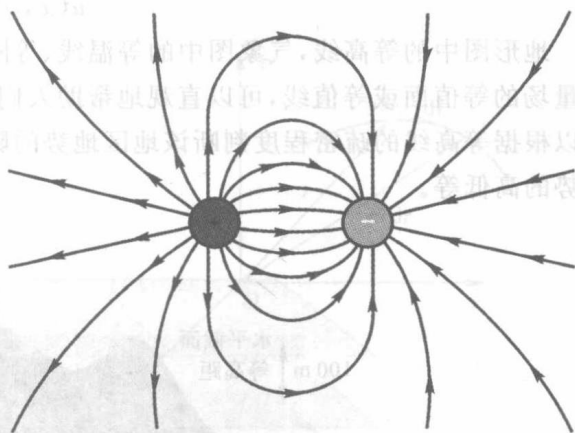


图 1-2 静电场的电场线

四、有旋场和无旋场

若在某一空间内的所有点上, 矢量场的旋度都等于零, 则称该区域内的矢量场为无旋场, 反之则称为有旋场。如静电场是由相对静止的电荷激发的电场, 没有变化的磁场, 因此旋度为零, 是无旋场, 如图 1-2 所示。而磁感线是闭合的, 无头无尾, 恒定磁场是有旋场, 如图 1-1 所示。

1.3 等值面和矢量线

一、标量场的等值面

等值面是指由标量场中使函数 $u(M)$ 取得相同数值的点所组成的曲面。在 $Oxyz$ 坐标系中, 设标量场函数 $u(M)$ 是空间的连续函数, 通过空间内任何一点 M_0 , 可以作出这样的—个曲面 S , 在 S 的每—点处, 函数 $u(M)$ 的值都等于 $u(M_0)$, 即在曲面 S 上, 函数 $u(M)$ 保持着同一数值 $u(M_0)$ 。例如温度场的等值面, 就是由温度相同的点所组成的等温面; 电位场中的等值面, 就是由电位相同的点所组成的等位面。显然, 等值面的方程可以表示为

$$u(x, y, z) = C \quad (1-8)$$

式中, C 为常数, 随着 C 的取值不同, 可以得到一系列的等值面, 称为等值面族, 如图 1-3 所示。

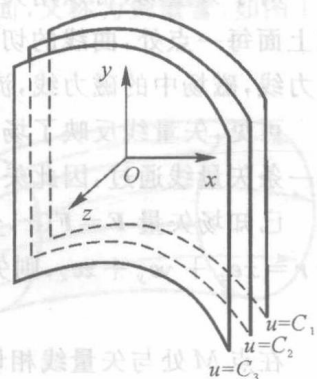


图 1-3 等值面族

等值面族可以充满整个标量场的空间。等值面互不相交, 如

果相交,则函数 $u(x, y, z)$ 在相交处就不具有唯一的函数值。场中的每一点只与一个等值面对应,即经过场中的一个点只能作出一个等值面。用等值面族表示标量场时,一般将每两个相邻等值面的场量值之差设为定值。

同理,在二维直角坐标系中,函数 $u(x, y)$ 所表示的平面标量场中,具有相同数值 C 的点,就组成平面标量场的等值线,在 xOy 平面上的等值线的方程为

$$u(x, y) = C \quad (1-9)$$

地形图中的等高线,气象图中的等温线、等降水线等都是平面标量场等值线的例子。根据标量场的等值面或等值线,可以直观地帮助人们了解场中物理量的分布情况。如图 1-4 所示,可以根据等高线的疏密程度判断该地区地势的陡缓程度,也可以根据地形图等高线数值判断地势的高低等。

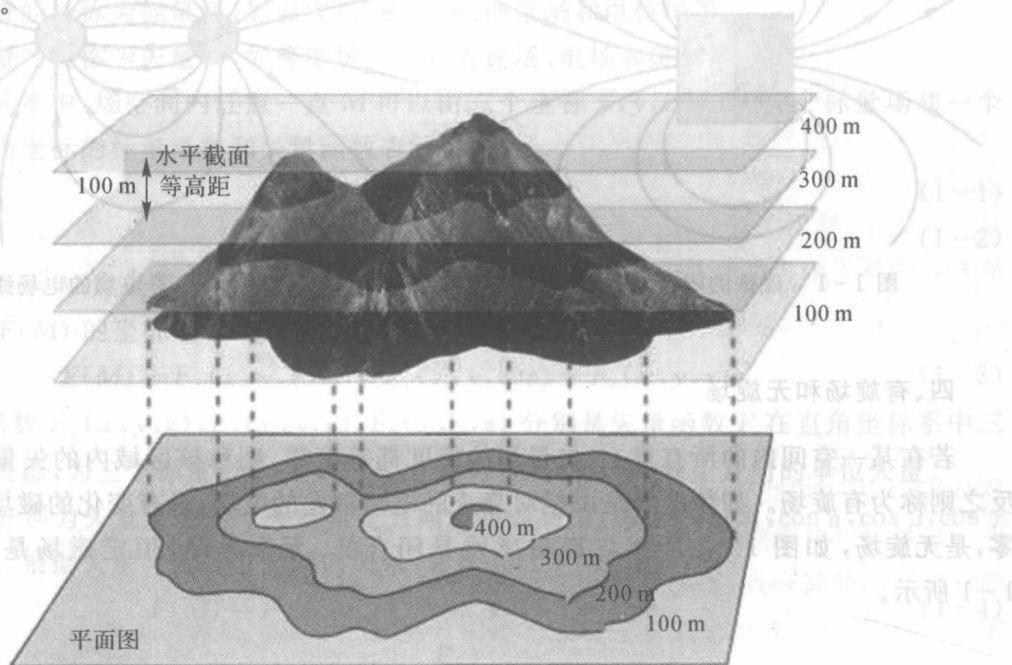


图 1-4 地理学中的等高线

二、矢量场的矢量线

对于矢量场,可以用矢量线来形象地表示其分布情况。所谓矢量线,就是这样的曲线,在它上面每一点处,曲线的切线方向和该点的场矢量方向相同,如图 1-5 所示。例如静电场中的电力线,磁场中的磁力线,流速场中的流速线等都是矢量线的例子。

可见,矢量线反映了场矢量在线上每一点的方向。一般说来,矢量场中的每一点均有唯一的一条矢量线通过,因此矢量线应是一族曲线,充满了整个矢量场所在的空间。

已知场矢量 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, 如图 1-6 所示, 设 $M(x, y, z)$ 为矢量线 l 上的任一点, 其矢径为 $\mathbf{r} = xe_x + ye_y + ze_z$, 则矢量微分为

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z \quad (1-10)$$

在点 M 处与矢量线相切的矢量,按矢量线的定义,它必定在点 M 处与场矢量方向相同,场矢量为

$$\mathbf{F}(M) = F_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + F_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + F_z(x, y, z)\mathbf{e}_z \quad (1-11)$$

因此有

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad (1-12)$$

这就是矢量线所满足的微分方程,其解为矢量线族。再利用过 M 点这个条件,即可求出过 M 点的矢量线。

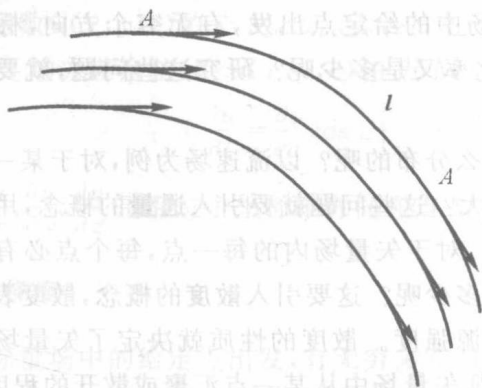


图 1-5 矢量线

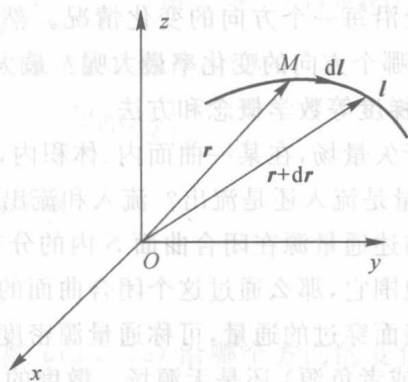


图 1-6 矢量微分

因为矢量线的方向即场矢量的方向,所以矢量线方程又可以用矢量式表示为

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1-13)$$

将各分量代入式(1-13)可得

$$(F_z dy - F_y dz)\mathbf{e}_x + (F_x dz - F_z dx)\mathbf{e}_y + (F_y dx - F_x dy)\mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad (1-14)$$

因此得到

$$\left. \begin{aligned} F_z dy - F_y dz &= 0 \\ F_x dz - F_z dx &= 0 \\ F_y dx - F_x dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

当函数为单值、连续且有一阶连续偏导数时,矢量线族不仅存在,而且充满矢量场所在的空间,且互不相交。因此,对于场中的任意一条曲线 C (非矢量线),在该曲线上的每一点处,也仅有一条矢量线通过,这些矢量线就构成了一张通过曲线 C 的曲面,称为**矢量面**,如图 1-7 所示。显然,在矢量面上的任一点 M 处,场的对应矢量 $\mathbf{F}(M)$ 都位于此矢量面在该点的切平面内。当 C 为一封闭曲面时,通过 C 的矢量面,就构成了一个**管形曲面**,又称为**矢量管**,如图 1-8 所示。

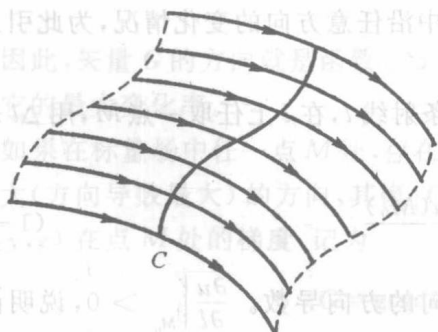


图 1-7 矢量面

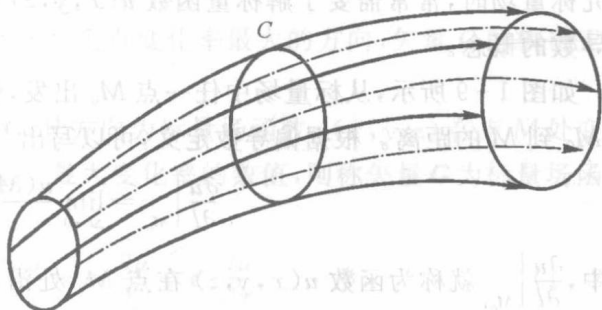


图 1-8 矢量管

1.4 场的数学描述方法概述

通过标量场的等值面或等值线、矢量场的矢量线只能大致地了解场的分布情况,是一种整体性的了解,对于分析场的具体分布规律还是不够的。

研究标量场的一个重要方面就是要对它的局部进行了解,要分析标量函数 $u(M)$ 在场中各个点处沿每一个方向的变化情况。然而,从场中的给定点出发,有无穷个方向,标量函数 $u(M)$ 沿哪个方向的变化率最大呢? 最大的变化率又是多少呢? 研究这些问题,就要引入方向导数、梯度等数学概念和方法。

对于矢量场,在某一曲面内、体积内,场是怎么分布的呢? 以流速场为例,对于某一闭合曲面 S , 流量是流入还是流出? 流入和流出哪个更大? 这些问题就要引入通量的概念,用通量的正负来描述通量源在闭合曲面 S 内的分布情况。对于矢量场内的每一点,每个点必有一个闭合曲面包围它,那么通过这个闭合曲面的通量是多少呢? 这要引入散度的概念,散度表示单位体积的表面穿过的通量,可称通量源密度或通量源强度。散度的性质就决定了矢量场是有源场(正源或者负源)还是无源场。散度的大小表征矢量场中从某一点汇聚或散开的程度。

河水流动时,常常会看到漩涡的现象,对于流速场,怎么来描述漩涡呢? 漩涡在场空间内是怎么分布的呢? 这需要引入环量的概念,环量描述的是矢量沿某一闭合曲线 L , 空间某一点的旋涡源分布情况。环量为零,说明在闭合曲线 L 包围的曲面内,没有漩涡;环量不为零,则说明有漩涡。用环量来衡量某一闭合曲面内有无漩涡,因此,矢量场又可分为无旋场和有旋场。那么闭合曲线 L 内的漩涡的强弱又怎么描述呢? 引入旋度的概念,旋度表示在闭合曲线 L 内单位面积的环量,可称为旋涡源密度或旋涡源强度。环量和旋度都有方向,矢量场中某点旋度的方向就是该点旋涡源的轴线方向,而旋度的大小表征了场量绕着这一点产生旋涡趋势的大小。这就描述清楚了矢量场旋涡源在空间的分布规律。

从数学上引入梯度、散度、旋度的概念来描述场,能够把场的具体分布规律用定量化的方法描述得更为清楚。

1.5 标量场的方向导数与梯度

一、方向导数的定义

标量场的等值面或等值线可以形象地帮助人们了解物理量在场中的总体分布情况,但在研究标量场时,常常需要了解标量函数 $u(x, y, z)$ 在场中沿任意方向的变化情况,为此引入方向导数的概念。

如图 1-9 所示,从标量场中任一点 M_0 出发,引一条射线 l , 在 l 上任取一点 M , 用 Δl 表示从 M_0 到 M 的距离。根据偏导数定义,可以写出

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} \quad (1-16)$$

式中, $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0}$ 就称为函数 $u(x, y, z)$ 在点 M_0 处沿 l 方向的方向导数。 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$, 说明函数

$u(x, y, z)$ 沿 l 方向是增加的; $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} < 0$, 说明函数 $u(x, y, z)$

沿 l 方向是减少的; $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = 0$, 说明函数 $u(x, y, z)$ 沿 l 方向无变

化。 $\left| \frac{\partial u}{\partial l} \right|$ 越大, 则 $u(x, y, z)$ 沿 l 方向变化越快。方向导数是

函数 $u(x, y, z)$ 在给定点处沿某一方向的变化率。

若函数 $u(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 l 的方向余弦, 则 $u(x, y, z)$ 在点 M_0 沿 l 的方向导数必然存在, 为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha \right|_{M_0} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta \right|_{M_0} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right|_{M_0} \quad (1-17)$$

式中, $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0}$ 是沿三个坐标轴方向在点 M_0 处的偏导数。

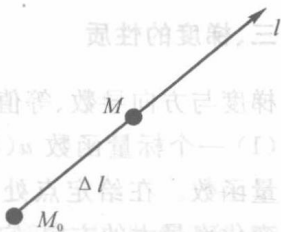


图 1-9 方向导数计算模型

二、梯度

从标量场中的给定点出发, 有无穷多个方向。函数 $u(x, y, z)$ 沿哪个方向的变化率最大呢? 这个最大的变化率又是多少呢?

在直角坐标系中, 标量函数的方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha \right|_{M_0} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta \right|_{M_0} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right|_{M_0} \quad (1-18)$$

l 方向的单位矢量为

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma \quad (1-19)$$

把式(1-18)中的 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0}$ 看作一个矢量 \mathbf{G} 沿三个坐标方向的分量, \mathbf{G} 可表示为

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}_x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} + \mathbf{e}_y \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} + \mathbf{e}_z \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \quad (1-20)$$

设 θ 为矢量 \mathbf{G} 与 \mathbf{e}_l 的夹角, 矢量 \mathbf{G} 与 \mathbf{e}_l 的点积恰好与式(1-18)右端相等, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_l = |\mathbf{G}| \cos \theta \quad (1-21)$$

必须强调指出, 式(1-20)确定的矢量 \mathbf{G} 在给定点是一个固定矢量, 它只与函数 $u(x, y, z)$ 有关, 而 \mathbf{e}_l 则是在给定点引出的任一方向上的单位矢量, 它与函数 $u(x, y, z)$ 无关。

可见, 随着 l 方向的改变, θ 发生变化, 方向导数值也随之变化。当 l 的方向与 \mathbf{G} 方向一致时, 方向导数值最大, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\max} = |\mathbf{G}| \quad (1-22)$$

因此, 矢量 \mathbf{G} 的方向就是函数 $u(x, y, z)$ 在给定点变化率最大的方向, 矢量 \mathbf{G} 的模也正好就是它的最大变化率。

如果在标量场中任一点 M 处, 存在矢量 \mathbf{G} , 其方向为标量场函数 $u(x, y, z)$ 在点 M 处变化率最大(方向导数最大)的方向, 其模 $|\mathbf{G}|$ 是这个最大变化率的数值, 则称矢量 \mathbf{G} 为标量场函数 $u(x, y, z)$ 在点 M 处的梯度, 记为

$$\mathbf{G} = \text{grad} u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-23)$$

三、梯度的性质

梯度与方向导数、等值面的关系如图 1-10 所示,梯度具有如下性质。

(1) 一个标量函数 u (标量场) 的梯度是一个矢量函数。在给定点处,梯度的方向就是函数 u 变化率最大的方向,它的模恰好等于函数 u 在该点的最大变化率的数值。又因函数 u 沿梯度方向的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\max} = |\mathbf{gradu}|$ 恒大于零,说明梯度总是指向函数 $u(x, y, z)$ 增大的方向。

(2) 函数 u 在给定点沿任意方向 l 的方向导数等于函数 u 的梯度在方向 l 上的投影。

(3) 在任一点 M ,标量场 $u(x, y, z)$ 的梯度垂直于过该点的等值面,也就是垂直于过点 M 的等值面的切平面。

根据这一性质,曲面 $u(x, y, z) = C$ 上任一点的单位法线矢量 \mathbf{e}_n 可以用梯度表示,即

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{gradu}}{|\mathbf{gradu}|} \quad (1-24)$$

例题 1-1 求标量场函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在 $M_0(1, 1, 0)$ 处沿 $l = 2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ 方向的方向导数,以及过点 $M_0(1, 1, 0)$ 处的梯度。

解

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

l 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}$$

则方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cos \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

梯度为

$$\mathbf{G} = \mathbf{gradu} \Big|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \mathbf{e}_x + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \mathbf{e}_y + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y$$

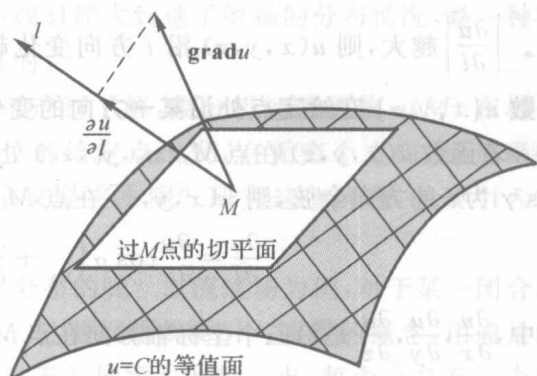


图 1-10 梯度、方向导数、等值面的关系

1.6 矢量场的通量和散度

一、通量

在场域中选取一曲面 S , 可以取曲面的任一侧作为曲面的正侧。通常, 以曲面法线方向作为曲面的正方向。如图 1-11 所示, 在曲面 S 上任取一点 M 与包含这点在内的一曲面元 dS , 过点 M 作曲面的法向单位矢量 e_n 。

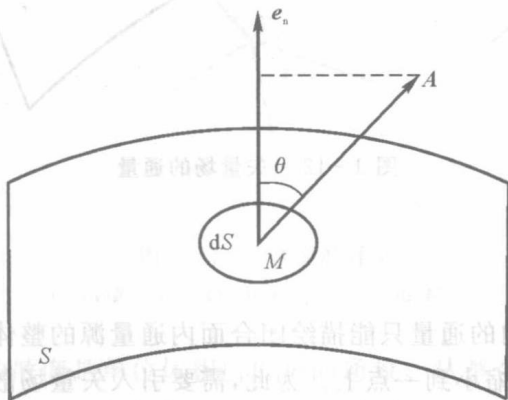


图 1-11 通量计算模型

矢量 $F(M)$ 在场中沿某一有向曲面 S 的曲面积分, 称为该矢量穿过曲面 S 的通量, 记为

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS \quad (1-25)$$

通量是一个标量。场矢量并不总是与曲面法线方向一致, 当场矢量与曲面法线方向之间夹角为锐角时, $d\Phi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} > 0$; 当场矢量与曲面法线方向之间夹角为钝角时, $d\Phi < 0$; 当场矢量与曲面法线方向垂直时, $d\Phi = 0$ 。

利用矢量线的概念, 通量也可以认为是穿过曲面 S 的矢量线总数, 如图 1-12 所示, 故矢量线也叫作通量线。式(1-25)中的矢量场 F 则可称为通量面密度矢量, 它的模 F 就等于在某点与 F 垂直的单位面积上通过的矢量线的数目。

如果 S 是一定体积的闭合曲面, 且规定外侧方向为法线方向, 则通过闭合曲面的总通量可表示为

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS \quad (1-26)$$

式(1-26)中的 Φ 表示从曲面内流出的正通量与流入的负通量的代数和。当 $\Phi > 0$ 时, 流出闭合曲面 S 的通量多于流入的通量, 这时 S 内必有发出通量线的源, 称为正源。当 $\Phi < 0$ 时, 流入闭合面 S 的通量多于流出的通量, 这时 S 内必有吸收通量线的源, 称为负源。当 $\Phi = 0$ 时, 流出与流入的通量相等, 这时 S 内的正源与负源的代数和为零, 或者 S 内没有源。这里说的正源和负源都叫通量源, 对应的场叫具有通量源的场(简称通量场)。

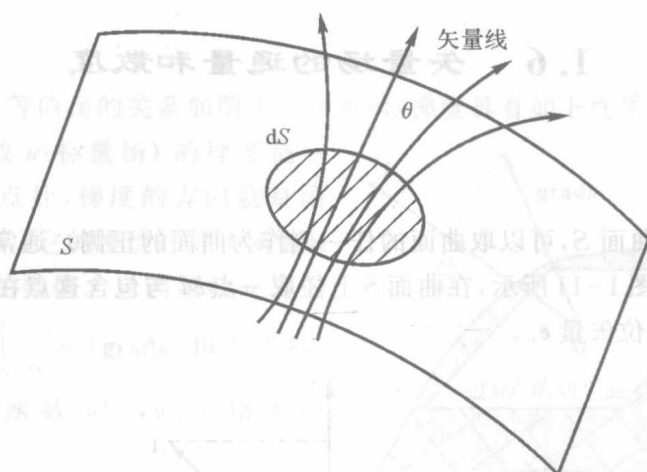


图 1-12 矢量场的通量

二、散度

矢量场在闭合曲面 S 内的通量只能描绘闭合面内通量源的整体情况。要分析场中任一点附近的情况, 必须将闭合面缩小到一点上。为此, 需要引入矢量场散度的概念。

在矢量场 \mathbf{F} 中任一点 M 处取一包围该点的任意闭合曲面 S , 闭合曲面 S 所包含的体积为

ΔV 。当 S 收缩到点 M 时, 即 $\Delta V \rightarrow 0$, 若极限 $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$ 存在, 称此极限为矢量场 \mathbf{F} 在点 M 的散度, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n dS}{\Delta V} \quad (1-27)$$

在直角坐标系中, 散度的计算公式为

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1-28)$$

$\operatorname{div} \mathbf{F}$ 表示在矢量场中任意一点处, 通过包围该点的单位体积的表面的通量, 因此 $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 可称为“通量源密度”。

矢量的散度是描述矢量场中任一点发散性质的量。需要注意的是, 矢量的散度是标量。矢量 \mathbf{F} 的散度形成一个标量场, 叫作矢量场 \mathbf{F} 的散度场。

应用散度概念可以分析矢量场中任一点的情况。在点 M 处, 若 $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$, 则该点有发出通量线的正源, 如图 1-13(a) 所示; 若 $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$, 则该点有吸收通量线的负源, 如图 1-13(b) 所示; 若 $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, 则该点无源, 如图 1-13(c) 所示。若在场中处处有 $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, 则称此场为无源场, 或称为无散场。

三、散度定理

设矢量场 $\mathbf{F} = F_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + F_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + F_z(x, y, z)\mathbf{e}_z$ 的各分量在闭合曲面 S 所围