21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

大学文科数学

学习辅导与习题解答

（第四版）

◎ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

大学文科数学

学习辅导与习题解答

（第四版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

大学文科数学（第四版）学习辅导与习题解答/吴赣昌主编．—北京：中国人民大学出版社，2019.3

21 世纪数学教育信息化精品教材．大学数学立体化教材

ISBN 978-7-300-26712-8

Ⅰ．①大… Ⅱ．①吴… Ⅲ．①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 028558 号

21 世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

大学文科数学学习辅导与习题解答

（第四版）

吴赣昌　主编

DaXue Wenke Shuxue Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社			
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**		100080
电　　话	010－62511242（总编室）	010－62511770（质管部）		
	010－82501766（邮购部）	010－62514148（门市部）		
	010－62515195（发行公司）	010－62515275（盗版举报）		
网　　址	http：//www.crup.com.cn			
	http：//www.ttrnet.com(人大教研网)			
经　　销	新华书店			
印　　刷	北京昌联印刷有限公司			
规　　格	148 mm×210 mm　32 开本	**版　　次**		2019 年 3 月第 1 版
印　　张	7.625	**印　　次**		2019 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	286 000	**定　　价**		25.00 元

前　言

人大版“21世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新型“立体化教材”。教材自出版以来，历经多次升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育在新时代的教育改革要求，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国600余所高等院校广泛采用。

作者本次启动的“大学数学立体化教材”（第五版）的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件，为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境。

作者本次关于“大学数学立体化教材”（第五版）的改版具体包括：面向普通本科院校的“理工类·第五版”、“经管类·第五版”与“纯文科类·第四版”；面向普通本科少学时或三本院校的“理工类·简明版·第五版”与“经管类·简明版·第五版”；面向专升本或高职本科的“综合类·应用型本科版”；面向高职高专院校的“理工类·高职高专版·第四版”、“经管类·高职高专版·第四版”与“综合类·高职高专版·第三版”。

本次改版的指导思想：为帮助教材用户更好地理解教材中重要的概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验，包括数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D函数图形实验、3D函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等。与教材正文所举示例相比，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大。本系列教材于2017年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验。其中，大部分实验都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中。

为方便同学们使用最新版“大学数学立体化教材”，学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”。该系列教辅书均根据教材章节顺序建设了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的主要知识归纳、典型例题分析与习题解答等内容，而每一章的设计中包括了

该章的教学基本要求、知识点网络图、题型分析与总习题解答。上述设计有助于学生在课后自主研读这些教辅书时，更好更快地掌握所学知识，从而在较短时间内取得好成绩。

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了。事实上，你需要在课后花更多时间主动去做相关训练，才能真正掌握所学知识。而在课后的自学与练习过程中，首先要认真、反复地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解。

与传统的教材与教辅建设缺乏教学互动不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者团队，通过数苑网（www.sciyard.com）为本系列教材的用户提供在线学习服务。另外，用户还可扫描下方二维码并关注“数苑”公众号，通过在线学习栏目获得相关在线服务。

吴赣昌

2018 年 2 月 26 日

目　录

第一部分　微积分

第 1 章　函数、极限与连续 …… 1

§1.1　函数 …… 1

§1.2　极限的概念 …… 6

§1.3　极限的运算 …… 8

§1.4　无穷小与无穷大 …… 10

§1.5　函数的连续性 …… 12

本章小结 …… 16

第 2 章　导数与微分 …… 30

§2.1　导数概念 …… 30

§2.2　函数的求导法则 …… 32

§2.3　函数的微分 …… 36

本章小结 …… 37

第 3 章　导数的应用 …… 49

§3.1　中值定理 …… 49

§3.2　洛必达法则 …… 51

§3.3　函数的单调性、极值与最优化 …… 53

本章小结 …… 56

第 4 章　不定积分 …… 69

§4.1　不定积分的概念与性质 …… 69

§4.2　换元积分法与分部积分法 …… 72

本章小结 …… 75

第 5 章　定积分及其应用 …… 81

§5.1　定积分概念 …… 81

§5.2　定积分的计算 …… 83
§5.3　广义积分 …… 85
§5.4　定积分的应用 …… 87
本章小结 …… 88
第6章　微分方程简介 …… 100
§6.1　微分方程的基本概念 …… 100
§6.2　一阶微分方程 …… 102
本章小结 …… 104

第二部分　线性代数

第7章　行列式 …… 110
§7.1　行列式的定义 …… 110
§7.2　行列式的性质 …… 113
§7.3　克莱姆法则 …… 116
本章小结 …… 118
第8章　矩阵与线性方程组 …… 128
§8.1　矩阵的概念 …… 128
§8.2　矩阵的运算 …… 130
§8.3　矩阵的初等变换 …… 133
§8.4　逆矩阵 …… 136
§8.5　矩阵的秩 …… 138
§8.6　线性方程组 …… 140
§8.7　线性方程组的应用 …… 142
本章小结 …… 145

第三部分　概率论与数理统计

第9章　随机事件及其概率 …… 160
§9.1　随机事件 …… 160
§9.2　随机事件的概率 …… 163
§9.3　条件概率 …… 166
§9.4　事件的独立性 …… 169
本章小结 …… 172
第10章　随机变量及其分布 …… 181
§10.1　随机变量的概念 …… 181

§10.2　离散型随机变量及其概率分布 …………………………… 183
§10.3　随机变量的分布函数 ……………………………………… 184
§10.4　连续型随机变量及其概率密度 …………………………… 187
§10.5　随机变量的数字特征 ……………………………………… 190
本章小结 ………………………………………………………… 194
第11章　数理统计的基础知识 ………………………………… 206
§11.1　数理统计的基本概念 ……………………………………… 206
§11.2　常用统计分布 ……………………………………………… 209
§11.3　抽样分布 …………………………………………………… 211
本章小结 ………………………………………………………… 214
第12章　参数估计与假设检验 ………………………………… 219
§12.1　参数估计 …………………………………………………… 219
§12.2　假设检验 …………………………………………………… 223
本章小结 ………………………………………………………… 227

第一部分 微积分

第1章 函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法. 因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

本章教学基本要求：

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法；了解函数的有界性、单调性、周期性与奇偶性；掌握函数关系的建立；了解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

2. 知道基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念及应用.

3. 了解数列极限和函数极限（包括左、右极限）的概念；知道极限的四则运算法则，会用两个重要极限.

4. 了解无穷小与无穷大的概念，了解无穷小比较方法，会利用等价无穷小求极限的方法.

5. 了解函数的连续与间断的概念，了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质.

6. 了解数学的历史地位、作用以及古代数学家的创造与杰出贡献.

§1.1 函 数

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表1-1-1至表1-1-4.

表1-1-1 **函数的概念**

定义	设 D 是一非空数集，如果 $\forall x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)，x\in D$， 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，也记为 D_f. 函数值的全体 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x)，x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

表示法	(1) 表格法；(2) 图像法；(3) 解析法：根据函数的解析表达式的不同，函数又分为显函数、隐函数和分段函数.
图形	平面点集 $\{(x, y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形. 函数 $y=f(x)$ 的图形一般为平面上的一条曲线.

表 1-1-2　　**函数的特性**

名称	定义	几何直观
有界性	若存在 $M>0$，使得 $\forall x\in D$，恒有 $$\lvert f(x)\rvert\leqslant M,$$ 则称 $f(x)$ 有界.	图形介于两直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.
单调性	设 x_1，x_2 为区间 I 内的任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 I 内单调增加（单调减少）.	从左往右看去，单调增加（单调减少）函数的图形上升（下降）.
奇偶性	设 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果 $\forall x\in D$，恒有 $$f(-x)=f(x)(f(-x)=-f(x)),$$ 则称 $f(x)$ 为偶函数（奇函数）.	偶函数（奇函数）的图形关于 y 轴对称（关于原点对称）.
周期性	如存在常数 $T>0$，使得 $\forall x\in D$，恒有 $$f(x+T)=f(x),$$ 则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.	每隔一个周期的图形形状相同.

表 1-1-3　　**数学建模**

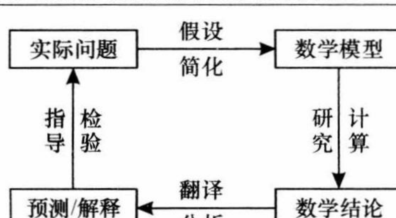
概念	在应用数学解决实际应用问题时，首先要将该问题量化，分析哪些是常量，哪些是变量，然后确定选取哪个作为自变量，哪个作为因变量，最后要把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来，依题意建立起它们之间的数学模型，建立数学模型的过程称为数学建模.
意义	数学模型的建立有助于我们利用已知的数学工具来探索隐藏于其中的内在规律，帮助我们把握现状、预测和规划未来，从这个意义上说，我们可以把数学建模设想为旨在研究人们感兴趣的特定的系统或行为的一种数学构想.
流程图	

表 1-1-4　　　　**初等函数**

反函数	如果函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 上不仅单值，而且单调，则把 y 看作自变量，x 看作因变量，得到的新函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上，仍将反函数 $x=\varphi(y)$ 记为 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$. 相对于反函数，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.
基本初等函数	① 幂函数　$y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$ ② 指数函数　$y=a^x(a>0,\ a\neq1)$ ③ 对数函数　$y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$ ④ 三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$ $y=\tan x$，$y=\cot x$ $y=\sec x$，$y=\csc x$ ⑤反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ $y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\varphi$， 则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，其中 u 称为中间变量.
初等函数	由常数和基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合运算所构成并可用一个解析式表示的函数统称为初等函数. 基本特征：在定义区间内初等函数的图形是不间断的.

二、典型例题分析

例 1　判断下面各组中的两个函数是否相同，并说明理由.

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$；

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$ 与 $g(x)=1-x$.

解　(1) 虽然这两个函数的表现形式不同，但它们的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 与对应法则均相同，所以这两个函数相同.

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$，所以当 $x>1$ 时 $f(x)\neq g(x)$，即这两个函数的对应法则不同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数.

小结：函数的定义域与对应法则称为函数的两大要素. 判断两个函数是否相同只需比较它们的定义域和对应法则是否相同，而与它们的表现形式没有必然的联系.

例 2　求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义，自变量 x 显然要满足：

$$\begin{cases}3-x>0\\ \sin x\neq0\\ 5+4x-x^2\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ x\neq n\pi\\ -1\leqslant x\leqslant5\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

所以，函数 $f(x)$ 的定义域

$$D_f=\{x|-1\leqslant x<3,\ x\neq 0\}=[-1,\ 0)\cup(0,\ 3).$$

小结： 求函数的定义域，即求使函数有意义的变量的范围，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集. 解题过程中，请熟记下列常用初等函数的定义域：

函数	定义域	零点
$y=\sqrt{x}$	$x\geqslant 0$	$x=0$
$y=\frac{1}{x}$	$x\neq 0$	
$y=\ln x$	$x>0$	$x=1$
$y=\sin x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$x=n\pi,\ n\in\mathbf{Z}$
$y=\cos x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$x=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}$
$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}$	$x=n\pi,\ n\in\mathbf{Z}$
$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$x=0$
$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$x=1$
$y=\arctan x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$x=0$

例 3　试证函数 $y=x+\ln x$ 在指定区间 $(0,\ +\infty)$ 内的单调性.

证　任取 $x_1,\ x_2\in(0,\ +\infty)$，不妨设 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\ln x_1-x_2-\ln x_2=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=x+\ln x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内单调增加.

小结： 判断函数单调性的方法一般有：(1) 利用单调性的定义判定；(2) 利用函数的导数来判断（参见教材第 3 章的有关内容）.

例 4　判断函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}$ $(-1<x<1)$ 的奇偶性.

解　因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\left[-\ln\frac{1+x}{1-x}\right]=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x),$$

所以，由定义知 $f(x)$ 是偶函数.

小结： 判断函数奇偶性时一般先算出 $f(-x)$ 的解析式，然后运用已知条件和计算技巧尽量把 $f(-x)$ 化成与解析式相仿的形式，最后根据定义作出判断，

另外一个有效方法是做和 $f(x)+f(-x)$ 或做差 $f(x)-f(-x)$，前者等于零，表明 $f(x)$ 是奇函数；后者等于零，表明 $f(x)$ 是偶函数.

例 5　设 $f(x)$ 是以正数 T 为周期的函数，证明 $f(Cx)$ $(C>0)$ 是以$\dfrac{T}{C}$为周期的函数.

证　设 $F(x)=f(Cx)$，则

$$F\left(x+\frac{T}{C}\right)=f\left[C\left(x+\frac{T}{C}\right)\right]=f(Cx+T)=f(Cx)=F(x),$$

所以，$f(Cx)$ 是以$\dfrac{T}{C}$为周期的函数.

小结：对于函数周期性，一般利用定义和周期函数的运算性质进行证明. 证明的关键在于从定义出发构造合适的 T，使得 $f(x+T)=f(x)$.

例 6　已知 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，求 $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数.

解　由题设，易得

$$x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1\\ 0, & y=0,\\ -\sqrt{-(1+y)}, & y<-1\end{cases}$$

故所求反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1\\ 0, & x=0\\ -\sqrt{-(1+x)}, & x<-1\end{cases}.$$

小结：反函数之“反”包括“三反”：定义域、值域、解析式，且原函数的定义域和值域是其反函数的值域和定义域. 反函数的一般求法：

$$y=f(x)\Rightarrow x=\varphi(y)\Rightarrow y=\varphi(x).$$

例 7　分析函数 $y=\arctan\cos e^{2x}$ 由哪些函数复合而成.

解　所给函数由

$$y=\arctan t,\ t=\cos v,\ v=e^s,\ s=2x$$

复合而成.

小结：复合函数分解原则：由外而内，逐层递进.

§1.2　极限的概念

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 1-2-1 至表 1-2-3.

表 1-2-1　　数列极限

数列极限（$\varepsilon-N$ 定义）	对于数列 $\{x_n\}$，如果存在固定常数 A 满足：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当 $n>N$ 时，恒有 $\lvert x_n-A\rvert<\varepsilon$，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限或称 $\{x_n\}$ 收敛于 A. 记为 $$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty).$$

表 1-2-2　　函数极限的定义

函数极限	1°自变量趋向无穷大时函数的极限 如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$. 2°自变量趋向有限值时函数的极限 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当 $x\to x_0(x\neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限或简称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限，记为 $$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

表 1-2-3　　函数极限的性质

唯一性	若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则其极限是唯一的.
有界性	若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$.
保号性	若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则存在常数 $\delta>0$，使得 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).
保号性推论	若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$)，则 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

二、典型例题分析

例 1 证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，其中$|q|<1$.

证 任给$\varepsilon>0$，若$q=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$；若$0<|q|<1$，欲使$|x_n-0|=|q^n|<\varepsilon$，必须$n\ln|q|<\ln\varepsilon$，即$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，故对任给$\varepsilon>0$，若取$N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当$n>N$时，就有$|q^n-0|<\varepsilon$，从而证得$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

小结：由数列极限的$\varepsilon—N$定义求N，实质是由已知值域逆推定义域，形式是转化为不等式求解，故一些不等式的计算技巧和常用的不等式须牢固掌握.

例 2 用数列极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+2n}{1-3n}=-\dfrac{2}{3}$.

证 由于$\left|\dfrac{5+2n}{1-3n}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right|=\left|\dfrac{17}{3(1-3n)}\right|=\dfrac{17}{9n-3}$ $(n\geqslant1)$，故要使

$$\left|\frac{5+2n}{1-3n}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|<\varepsilon,$$

只需$\dfrac{17}{9n-3}<\varepsilon$，

解得 $\dfrac{17}{\varepsilon}<9n-3$，$n>\dfrac{17}{9\varepsilon}+\dfrac{1}{3}$.

因此，对任给的$\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{17}{9\varepsilon}+\dfrac{1}{3}\right]$，则$n>N$时，

$$\left|\frac{5+2n}{1-3n}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|<\varepsilon\text{ 成立，即}\lim_{n\to\infty}\frac{5+2n}{1-3n}=-\frac{2}{3}.$$

小结：(1)在利用数列极限的定义来论证某个数列$\{x_n\}$的极限时，首先是对任意给定的正数ε，能够指出定义中所说的这种正整数N确实存在，但是没必要去求最小的N. 如果已知$|x_n-a|$小于某个量$\delta(n)$（这个量是n的一个函数），当这个量小于$\delta(n)$时，$|x_n-a|<\varepsilon$自然也成立. 一般地，令$|x_n-a|<\varepsilon$来求$\delta(n)$.

(2)本例具体的极限值未给出，需要自己观察猜想，根据指数函数的性质，不难猜想极限值为1，之后可以用$\varepsilon—X$语言加以论证，求法同$\varepsilon—N$语言.

例 3 若$f(x)>0$，且$\lim f(x)=A$. 问：能否保证有$A>0$的结论？试举例说明.

解 不能保证.

例如，设$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$\forall x>0$，有$f(x)=\dfrac{1}{x}>0$，

但　　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0=A.$

小结：注意本例的逆命题与极限的保号性的联系；另外，举出的反例揭示了函数本身的性质和函数的极限性质的区别.

§1.3　极限的运算

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 1-3-1 和表 1-3-2.

表 1-3-1　　**极限的运算法则**

四则运算	如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有 ①$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B$； ②$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot \lim g(x)=AB$； ③$\lim[kf(x)]=k\lim f(x)=kA$（$k$ 为常数）； ④$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）. 以上性质对数列的极限也成立.
复合运算（变量替换）	若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且在 x_0 的附近 $\varphi(x)\neq u_0$，又 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，令 $u=\varphi(x)$， 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

表 1-3-2　　**两个重要极限**

两个重要极限	①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$， 若 $\lim\varphi(x)=0$ 且 $\varphi(x)\neq 0$，则 $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$； ②$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$， 若 $\lim\varphi(x)=\infty$，则 $\lim\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

二、典型例题分析

例 1　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$，求 a，b 之值.

解　因 $\lim\limits_{x\to\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(25-a)x+b-\dfrac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}}=2.$$

故$\begin{cases}25-a=0\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2\end{cases}$，解得 $a=25$，$b=20$.

小结：已知函数是两个极限为无穷大的函数做差复合得到的，考虑到给定函数中有开方运算，故利用分母有理化化为易求极限的形式.

例 2 求极限 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ $(a_mb_n\neq0)$.

解 (1) 当 $m>n$ 时，分子和分母同除以 x^m，得

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m+a_{m-1}\dfrac{1}{x}+\cdots+a_1\dfrac{1}{x^{m-1}}+a_0\dfrac{1}{x^m}}{b_n\dfrac{1}{x^{m-n}}+b_{n-1}\dfrac{1}{x^{m-n+1}}+\cdots+b_0\dfrac{1}{x^m}}=\infty(\text{分母}\to0).$$

(2) 当 $m=n$ 时，分子和分母同除以 x^m，得

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m+a_{m-1}\dfrac{1}{x}+\cdots+a_0\dfrac{1}{x^m}}{b_n+b_{n-1}\dfrac{1}{x}+\cdots+b_0\dfrac{1}{x^m}}=\frac{a_m}{b_n}.$$

(3) 当 $m<n$ 时，分子和分母同除以 x^n，得

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m\dfrac{1}{x^{n-m}}+a_{m-1}\dfrac{1}{x^{n-m+1}}+\cdots+a_0\dfrac{1}{x^n}}{b_0+b_{n-1}\dfrac{1}{x}+\cdots+b_0\dfrac{1}{x^n}}=0.$$

小结：对于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中 $f(x)$，$g(x)$ 均为多项式时，分子和分母同除以 $f(x)$，$g(x)$ 中 x 的最高次项，利用 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$ $(k>0)$，求得结果.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\right]^{\frac{x}{x^2-1}}=e^0=1.$