北京建筑大学教材建设专项基金资助出版

LINEAR ALGEBRA

# 线性代数

北京建筑大学数学系　编著

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

北京建筑大学教材建设专项基金资助出版

LINEAR ALGEBRA

# 线性代数

北京建筑大学数学系 编著

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

## 内 容 提 要

本书包括行列式、矩阵、线性方程组理论、向量组的线性相关性、矩阵的特征值与特征向量、二次型等内容. 全书围绕"线性方程组理论"这一核心内容展开讨论, 环环相扣, 形成一个独立的数学知识模块. 书中详细阐述各部分内容的实际背景、与其他课程(如初等数学、高等数学、数值计算等)内容之间的联系, 又将线性代数置于整个数学课程体系之中.

本书可供高等院校工程类各专业、成人高校及自学者使用.



**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数 / 北京建筑大学数学系编著. 一北京：中国电力出版社，2019.3
ISBN 978-7-5198-2679-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①北… Ⅲ. ①线性代数–高等学校–教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 277919 号

出版发行：中国电力出版社
地　　址：北京市东城区北京站西街 19 号（邮政编码 100005）
网　　址：http://www.cepp.sgcc.com.cn
策划编辑：周　娟
责任编辑：杨淑玲（010-63412602）
责任校对：黄　蓓　王海南
装帧设计：王英磊
责任印制：杨晓东

印　　刷：三河市航远印刷有限公司
版　　次：2019 年 3 月第 1 版
印　　次：2019 年 3 月北京第 1 次印刷
开　　本：787mm×1092mm　16 开本
印　　张：11.75
字　　数：284 千字
定　　价：36.00 元

# 前　言

线性代数是高等院校一门重要的基础理论课程，是高校理工科学生的必修课程之一. 北京建筑大学历来对线性代数的教学工作十分重视，并取得了良好的效果. 在数学系全体教师的共同努力下，2006 年，我校线性代数课程被评为“校级优秀课程”. 然而，随着教育改革的深入，高等教育已由精英教育转变为大众化教育，过去的教学方式和教学内容已不能满足新形势的需要，我系原先采用的教材已不再满足新形势的需要. 例如，例题太少，不利于自学；过于追求理论的完整而忽略了实际应用等. 这不但会影响学生学习的积极性和主动性，也不利于对学生数学素质的培养. 为适应新形势的要求，北京建筑大学于 2006 年组织教师编写了校内试用教材《线性代数讲义》. 该讲义由刘长河老师执笔，代西武、吕大昭两位老师对全稿进行了多次认真审阅和修改.

校内试用的《线性代数讲义》有以下特点:

第一，结构完整，通过“线性方程组解的理论”这一线索，将各章内容联系起来，便于学生系统地掌握全部内容.

第二，每章配有知识脉络图，直观地描述出各知识点之间的相互联系，便于学生从宏观上掌握讲义内容.

第三，每节后面均有“导读与提示”部分，对该节内容进行分析和总结. 提出对各知识点掌握程度的要求，指出一些重要概念、定理在整个线性代数知识体系中的地位和作用，便于学生从微观上加深对每个基本知识单元的理解.

第四，叙述详尽，重点突出，删除一些繁杂的理论证明，代之以直观的实例或类比进行说明，使讲义变得通俗易懂，方便学生自学.

第五，每章配有习题，增加了例题的类型和数量. 详尽的解题过程，便于学生掌握基本知识和技能，提高他们的数学素质和能力；丰富的例题类型，可以提高学生的解题技巧. 为兼顾学有余力者的需求，讲义还配有一定难度的习题(加*号).

该讲义从 2007 年开始，刘长河、吕大昭、刘世祥等诸位老师在部分班级试用多遍，收到良好的效果. 通过大量的教学实践，老师们对该讲义的优缺点进行了认真的总结，并就讲义的讲授思路与外校专家进行了交流，得到了充分的肯定.

党的“十九大”以来，我国的科教事业迎来了新的发展机遇，我校办学定位也得到大幅提高，但该讲义逐步暴露出一些不足之处. 为此，我们在各级领导的关怀下，集数学系同仁之智慧，对《线性代数讲义》进行重新编写，屡易其稿，终于将本教材呈献在读者面前.

本教材从编写思路、内容取舍、读者定位等方面都有很大的提升，具体表现在:

对概念尽量采用实例引入，通俗自然. 每章后附有阅读材料，介绍了知识脉络图和知识结构图，既开阔了学生们的眼界，又激发了他们的学习兴趣.

阐述知识时，紧跟实例，便于读者入门和理解，将相关结论的证明集中放在每章的最后一节，能够满足各层次读者的需求，方便他们按需选学.

编写过程中充分关注线性代数知识同其他学科(比如高等数学、数值分析、图论)相关内容

的联系, 使读者能站在数学课群的高度学习线性代数, 克服了学习过程中的局限性.

本书采用“一人主笔, 众人把关”的编写模式. 全书由刘长河老师主笔, 多位老师分章审核. 具体分工如下: 侍爱玲(第 1 章); 张鸿鹰(第 2 章); 刘志强(第 3 章); 代西武、刘世祥(第 4 章); 吕大昭(第 5 章). 武利刚老师对全书进行了统一审查, 并提出了宝贵意见.

本教材在编写和出版过程中, 得到了理学院领导(特别是张长伦副院长)、数学系王丽萍和何强两位主任的大力支持. 数学系诸位同仁、试用班级的同学也都提出了许多宝贵的意见, 在此一并表示致谢!

受到各种主客观条件所限, 本教材不足之处在所难免, 敬请广大师生在使用过程中不吝赐教, 以便进一步修改和完善, 最终达到提高教学效果的目的.

北京建筑大学数学系　刘长河

2019 年 2 月

# 目　　录

# 第1章 行 列 式

**本章主要内容:**

1. $n$阶行列式的概念;
2. 行列式的性质及计算方法;
3. 克拉默(Cramer)法则.

**本章重点要求:**

1. 掌握有关行列式的基本概念;
2. 熟练掌握行列式的计算方法;
3. 会利用克拉默法则求解线性方程组.

## 1.1 二阶与三阶行列式

### 1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

请大家思考下面一个问题: 能否像一元二次方程的求根公式一样, 比较简便地给出二元线性方程组的求解公式? 现在我们就来分析这个问题.

给定二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1\text{-}1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1\text{-}2) \end{cases}$$

用消元法解之.

由式(1-1)$\times a_{22}$ − 式(1-2)$\times a_{12}$, 消去 $x_2$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

由式(1-2)$\times a_{11}$ − 式(1-1)$\times a_{21}$, 消去 $x_1$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 求得方程组(1-1)～(1-2)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1-3}$$

式(1-3)非常难记. 下面我们引入运算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-4}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式, 它有二行二列; $a_{ij}(i=1, 2;\ j=1, 2)$ 为其元素. $a_{ij}$ 的第一个下标 $i$ 称为行标, 第二个下标 $j$ 称为列标.

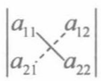

图 1-1 对角线法则

式（1－4）的计算称为对角线法则(图 1-1). 从 $a_{11}$ 到 $a_{22}$ 的对角线(实线)称为主对角线, 从 $a_{12}$ 到 $a_{21}$ 的对角线(虚线)称为副对角线, 于是有

二阶行列式=主对角线上的两元素之积 – 副对角线上的两元素之积.

利用二阶行列式的概念, 式(1-3)中 $x_1$, $x_2$ 的分子也可用二阶行列式表示, 即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则式(1-3)可以简记为, 当 $D\neq 0$ 时, 有

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1-5}$$

可以利用此公式求解二元线性方程组.

**例 1-1** 解方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2=0 \\ 3x_1-2x_2=11 \end{cases}$$

**解** 由于

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-2-9=-11\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 11 & -2 \end{vmatrix}=0-33=-33$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=11-0=11$$

因此, $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-33}{-11}=3$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{11}{-11}=-1$.

## 1.1.2 三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 & (1\text{-}6) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 & (1\text{-}7) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 & (1\text{-}8) \end{cases}$$

也可以像式(1-1)、(1-2)方程组那样很简单地表示其解. 这时, 需引入三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-9}$$

从式(1-9)看出: 三阶行列式含有 6 项, 每项均为不同行且不同列的三个元素的乘积再冠以正负号. 其规律遵循对角线法则(图 1-2): 图中三条实线看作是平行于主对角线的连线, 三条虚线看作是平行于副对角线的连线. 实线上的三个元素的乘积冠以“+”号, 虚线上的三个元素的乘积冠以“ − ”号.

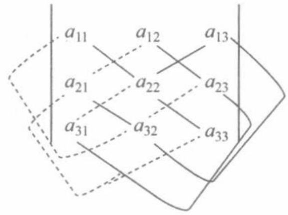

图 1-2　对角线法则

**例 1-2**　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&-3&1\\-2&1&-4\end{vmatrix}$$

**解**　按对角线法则, 有

$$\begin{aligned}D&=1\times(-3)\times(-4)+(-1)\times1\times(-2)+2\times3\times1-\\&\quad 1\times1\times1-(-1)\times(3)\times(-4)-2\times(-3)\times(-2)\\&=12+2+6-1-12-12\\&=-5\end{aligned}$$

**例 1-3**　求解方程

$$\begin{vmatrix}3&4&x\\2&x&0\\1&1&x\end{vmatrix}=0$$

**解**　三阶行列式

$$D=3x^2+0+2x-0-8x-x^2=2x^2-6x=2x(x-3)$$

由 $2x(x-3)=0$ 解得, $x=0$ 或 $x=3$.

可以推出: 当 $D\neq0$ 时, 三元线性方程组(1-6)～(1-8)有唯一解, 且其解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}$$

式中, $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$.

**例 1-4**　解方程组

$$\begin{cases}2x-4y+z=1\\x-5y+3z=2\\x-y+z=-1\end{cases}$$

**解**　因为

$$D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-8\neq0$$

所以此方程组有唯一解. 又因为

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11,\ D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=9,\ D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6$$

所以方程组的解为

$$x=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\ y=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},\ z=\frac{D_3}{D}=-\frac{3}{4}$$

## 导读与提示

**本节内容**:

1. 二、三阶行列式的定义;

2. 二、三阶行列式的求法——对角线法则;

3. 利用二、三阶行列式表示二、三元线性方程组的解的公式——二、三元线性方程组的克拉默法则(参看 1.7 节).

**本节要求**:

1. 理解二、三阶行列式的定义, 掌握行列式的本质——数;

2. 熟练利用对角线法则计算二、三阶行列式;

3. 会利用行列式解二、三元线性方程组.

读者很自然地就会联想到下面的问题:

如何表示四元、五元, 乃至更一般的 $n$ 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的解?

这就需要引入四阶、五阶, 乃至更一般的 $n$ 阶行列式等概念. 值得注意的是, 此时对角线法则已经失效. 对角线法则只适用于计算二、三阶行列式.

为学习 $n$ 阶行列式的理论, 需要先学习全排列、逆序数、对换等知识.

## 习题 1.1

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\-1&8&3\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}c&a&b\\b&c&a\\a&b&c\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

2. 利用行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 5x+2y=3, \\ 4x+2y=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 4x_1+2x_2+5x_3=4, \\ \qquad 2x_2+2x_3=6; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+2y+z=14, \\ \ \ x+\ \ y+z=10, \\ 2x+3y-z=1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} bx \ -ay \qquad\quad =-2ab, \\ \quad -2cy+3bz=bc \text{ (其中} a,b,c\neq 0\text{)}, \\ cx \qquad\quad +az=0. \end{cases}$

3. 如果 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ x & 4 & 7 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}=0$, 求 $x$.

4. 三个数的和等于 15, 第一个数减去第二个数的差等于第二个数减去第三个数的差, 第二个数与第三个数的和比第一个数大 1, 求这三个数.

## 1.2 全排列及其逆序数

本节内容主要为 1.4 节讲解一般的 $n$ 阶行列式的理论做准备.

### 1.2.1 全排列及其逆序数

把 $n$ 个不同元素排成一列, 叫作这 $n$ 个元素的全排列(简称排列). $n$ 个不同元素的排列的种数, 通常用 $P_n$ 表示. 显然, $P_n=n!$.

本节中只考虑由 $n$ 个自然数: $1, 2, \cdots, n$ 所组成的全排列.

在由 $n$ 个自然数: $1, 2, \cdots, n$ 所组成的全排列中, 按递增顺序的排列 $12\cdots(n-1)n$ 称为自然排列.

例如, 由三个自然数 1, 2, 3 所组成的所有全排列为

$$123, 132, 213, 231, 312, 321$$

123 为其自然排列. 其排列种数: $P_3=3!=6$.

在由 $n$ 个自然数: $1, 2, \cdots, n$ 所组成的全排列中, 通常规定从小到大为标准次序. 当两个数的次序与标准次序不同(即由大到小)时, 称为一个逆序. 一个排列中的所有逆序的总数叫作这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫作奇排列, 逆序数为偶数的排列叫作偶排列.

例如, 在上例中, 排列 132 的逆序数为 1, 它是奇排列; 而 312 的逆序数为 2, 它是偶排列.

### 1.2.2 逆序数的求法

不失一般性, 设由 $n$ 个自然数: $1, 2, \cdots, n$ 所组成的全排列

$$p_1p_2\cdots p_n$$

考虑每个元素 $p_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 如果比 $p_i$ 大且排在 $p_i$ 前面的元素有 $t_i$ 个, 就说 $p_i$ 这个元素的逆序数为 $t_i$ . 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中所有元素的逆序数之和, 称为此排列的逆序数, 记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$, 即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

**例 1-5**　求排列 32514 的逆序数

**解法 1**　在此排列中,

3 排在首位, $t_1=0$ ;

比 2 大且排在 2 前面的元素有 1 个: "3", $t_2=1$ ;

比 5 大且排在 5 前面的元素有 0 个, $t_3=0$ ;

比 1 大且排在 1 前面的元素有 3 个: "3, 2, 5", $t_4=3$ ;

比 4 大且排在 4 前面的元素有 1 个: "5" , $t_5=1$ .

所以, 此排列的逆序数为

$$\tau(32514)=\sum_{i=1}^{5}t_i=0+1+0+3+1=5$$

解法 1 是从左到右统计排列中各元素的逆序数, 也可以从右向左进行统计.

**解法 2**　也可按下列顺序求排列的逆序数:

在 1 前面, 比 1 大的数有 3 个;

在 2 前面, 比 2 大的数有 1 个;

在 3 前面, 比 3 大的数有 0 个;

在 4 前面, 比 4 大的数有 1 个;

在 5 前面, 比 5 大的数有 0 个.

所以, 此排列的逆序数为

$$\tau(32514)=3+1+0+1+0=5$$

解法 2 是按从小到大次序统计排列中各元素的逆序数, 也可以按从大到小次序进行统计.

## 导 读 与 提 示

**本节内容:**

1. 全排列与逆序数的概念;

2. 逆序数的求法.

**本节要求:**

1. 理解全排列与逆序数的概念;

2. 会求给定全排列的逆序数, 并判断其奇偶性;

全排列与逆序数对理解 $n$ 阶行列式的定义以及行列式性质的证明过程非常重要, 是深入学习行列式理论的基础, 应该掌握.

## 习　题　1.2

1. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数.

(1) 1234;　　(2) 4132;

(3) 24153;　　(4) 3746251;

(5) $13\cdots(2n-1)2\,4\cdots(2n)$;　　(6) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$.

2. 选择 $i, j$ 使

(1) $1274i56j9$ 为奇排列;

(2) $1i25j4897$ 为偶排列.

# 1.3　对　　换

在排列中, 将任意两个元素对调, 其余元素不动, 这种做出新排列的变换叫作对换. 例如,

$$4321 \xrightarrow{\text{对换第1, 第2两个元素}} 3421$$

**定理 1-1**　一次对换改变排列的奇偶性(证明见 1.9 节).

上例中, 排列 4321 的逆序数为 6, 是偶排列; 对换后, 得到排列 3421, 其逆序数为 5, 变为奇排列.

任一排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 都可经过一定次数的对换调成自然排列 $12\cdots n$.

**推论 1**　奇排列调成自然排列的对换次数为奇数; 偶排列调成自然排列的对换次数为偶数.

这是因为自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列, 把奇(偶)排列变成偶排列必须经过奇(偶)数次奇偶转换.

例如, 312 是偶排列(逆序数为 2), 将其调成标准排列 123 的对换次数一定是偶数; 132 是奇排列(逆序数为 1), 将其调成标准排列 123 的对换次数一定是奇数.

**推论 2**　在全体 $n$ 元排列集合中, 奇排列和偶排列个数相等.

因为, 任一排列 $\cdots i\ p_1p_2\cdots p_s\ j\cdots$ 都与一个与其奇偶性相反的排列 $\cdots j\ p_1p_2\cdots p_s\ i\cdots$ 对应.

例如, 由三个自然数 1, 2, 3 所组成的所有全排列有 6 个:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

其中 3 个奇排列: 132, 213, 321; 3 个偶排列: 123, 231, 312.

## 导 读 与 提 示

**本节内容:**

对换的定义、性质.

**本节要求:**

1. 理解对换的定义、性质;

2. “对换”的概念在证明 $n$ 阶行列式的两个定义的等价性时, 起着重要作用.

## 习 题 1.3

1. 利用对换将下列排列调成自然排列, 并统计所做对换的次数.

(1) 1324;　　(2) 4132;

(3) 53124;　　(4) 12456378.

2. 写出由四个自然数 1, 2, 3, 4 所组成的所有全排列, 并把它们分成奇排列和偶排列两类.

# 1.4 *n* 阶行列式的定义

## 1.4.1 *n* 阶行列式的定义

由三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-10}$$

可以看出:

(1) 式(1-10)右边的每一项都恰是三个元素的乘积, 这三个元素位于行列式的不同行、不同列. 如不考虑正负号, (1-10)式右边的任一项可写成: $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 其第一个下标(行标)是自然排列 123; 第二个下标(列标)的排列 $p_1p_2p_3$ 与三个自然数 1, 2, 3 所组成的所有(3!=)6 个全排列一一对应.

(2) 冠以"+"的三项的列标排列分别是: 123, 231, 312; 都是偶排列. 冠以"－"的三项的列标排列分别是: 132, 213, 321; 都是奇排列.

因此, 三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

式中, $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 是关于三个自然数 1, 2, 3 所组成的所有 6(=3!)个全排列求和.

同样, 二阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-11}$$

也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2} (-1)^{\tau(p_1p_2)} a_{1p_1}a_{2p_2}$$

式中, $\sum\limits_{p_1p_2}$ 是关于两个自然数 1, 2 所组成的所有 2(=2!)个全排列求和.

可把二、三阶行列式推广到 $n$ 阶行列式.

**定义**　$n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1-12}$$

式中, $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是关于 $n$ 个自然数 1, 2, ···, $n$ 所组成的所有 $n$!个全排列求和.

式(1-12)简记为 $\det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}$ 为行列式 $D$ 的$(i, j)$元素.

当 $n=1$ 时, 规定 $|a|=a$. 注意不要将一阶行列式与绝对值混淆.

### 1.4.2　用定义求 n 阶行列式的例子

从上面可以看出, 求二、三阶行列式的对角线法则和式(1-12)是一致的. 式(1-12)右端是 $n!$ 项的代数和. 用定义求 $n$ 阶行列式的值, 是一件困难的事情, 但特殊情况例外.

**例 1-6**　证明: $n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \text{ (对角行列式)}$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

式中, 未写出来的元素都是 0.

**证明**　第一式是显然的, 下面只证第二式.

若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}\quad(i=1,2,\cdots,n)$, 则依行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^t\,a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^t\,\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

式中, $t=\tau[n(n-1)\cdots 21]=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.　　证毕.

**例 1-7**　证明: 下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

**证明** $D$ 中可能不为 0 的元素 $a_{ip_i}$，其下标应满足：$p_i\leqslant i\,(i=1,2,\cdots,n)$，即

$$p_1\leqslant 1,\ p_2\leqslant 2,\cdots,\ p_n\leqslant n$$

于是, 在

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

中, 只有一个可能不为零的项

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}\,a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证毕.

同理可得上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角行列式, 下(上)三角行列式的计算公式常作为结论应用.

### 1.4.3 行列式定义的另一种形式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}\,a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn} \tag{1-13}$$

式中, $\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}$ 是关于 $n$ 个自然数 1, 2, ⋯, $n$ 所组成的所有 $n!$个全排列求和.

按照式(1-13), 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13} \tag{1-14}$$

**定理 1-2** $n\,(\geqslant 2)$ 阶行列式的两种定义方式(1-12)与式(1-13)等价(证明见 1.9 节).

## 导 读 与 提 示

**本节内容:**

1. $n$ 阶行列式的定义;