



辽宁省“十二五”普通高等教育本科省级规划教材

概率论与数理统计

(第二版)

主编 罗敏娜 吴志丹 王 涛



科学出版社

辽宁省“十二五”普通高等教育本科省级规划教材

概率论与数理统计

(第二版)

主 编 罗敏娜 吴志丹 王 涛

副主编 耿 莹 丁 巍 杨淑辉

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是普通高等院校非数学专业“概率论与数理统计”基础课教材,参照研究生入学数学考试大纲编写而成。

全书共 9 章,主要内容包括:随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、数理统计在经济中的应用。每节配有习题,每章末(第 9 章除外)均有小结、知识体系图及自测题,书后附有参考答案。

本书可作为理工类、经管类本科生的教材,也可作为自学考试、硕士研究生考试的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/罗敏娜,吴志丹,王涛主编.—2 版.—北京:科学出版社,2019.1

辽宁省“十二五”普通高等教育本科省级规划教材

ISBN 978-7-03-060366-1

I. ①概… II. ①罗… ②吴… ③王… III. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 002870 号

责任编辑:王胡权/责任校对:郭瑞芝
责任印制:师艳茹/封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 5 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2019 年 1 月第 二 版 印张:17

2019 年 1 月第七次印刷 字数:338 000

定价:45.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版前言

本书第一版面世已经六年了,在此期间不少高等院校的同行使用此书作为参考并提出许多宝贵建议,在此对大家的关心和支持表示衷心的感谢.本书2013年还被评为辽宁省“十二五”普通高等教育本科省级规划教材.教研组结合过去六年来使用本书的教学实践经验及考研数学的新动态,对第一版教材内容进行了部分的修订,现对修订的主要内容作如下说明:

- (1) 增加了本章知识体系图,利于学生知识体系的构建.
- (2) 调整部分内容的顺序,使其更加符合学生的认知规律,教学更为顺畅.
- (3) 调整语言叙述的方式,以浅显易懂的方式介绍数学概念和公式.
- (4) 重新设置例题,提高例题的代表性和应用性.
- (5) 增加了部分练习题,提高题目的典型性,便于学生掌握相关的基础知识和基本概念.

最后由罗敏娜教授及吴志丹老师对全书进行了仔细地统稿及校订,在本书的再版过程中得到数学同仁的大力支持和帮助,再次表示由衷的感谢.

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不妥之处,恳请专家、同行和广大读者不吝赐教.

编 者

2018年10月

第一版前言

本书是由沈阳师范大学概率论与数理统计课程组的教师在多年教学实践的基础上编写的,从编写体例、知识结构、重点难点,到许多具体的细节处理,都经过了课程组教师的深入讨论.在编写的过程中,也参考了国内外许多同类优秀教材.

概率论与数理统计课程是学生在大学里首次接触到的以随机现象为研究对象的数学课程,考虑到课程本身及教学对象的特殊性,本书在编写时遵循了下列原则:

- (1) 理论体系科学严谨,语言叙述通俗易懂、详略得当.
- (2) 弱化理论推导,突出应用性特点,贴近生活实际.
- (3) 结构合理,脉络清晰,概念准确,重点突出.
- (4) 从实际问题出发引入概念、建立定理、选择例题、设置习题.
- (5) 归纳解题方法和技巧,使读者“有法可依”.
- (6) 尽可能交代清楚知识产生的背景.

全书共 9 章,主要内容包括:随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、概率统计在经济中的应用.每节都配有习题,每章末(除第 9 章)都设有本章小结并配有自测题,书后附有参考答案.

本书可作为普通高等院校非数学专业本科生学习概率论与数理统计的大学数学基础课教材,也可作为工程技术人员、自然科学工作者和社会科学工作者的自学用书.

在本书编写过程中得到了沈阳师范大学计算中心的领导及科学出版社的领导和编辑的大力支持,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,热诚希望专家、同行和广大读者不吝赐教.

编 者

2012 年 1 月

目 录

第二版前言

第一版前言

绪论	1
第 1 章 随机事件与概率	6
1.1 随机事件和样本空间	6
1.1.1 随机现象和随机试验	6
1.1.2 样本空间与随机事件	7
1.2 事件间的关系与运算	9
1.2.1 事件间的关系与运算	9
1.2.2 事件的运算性质	10
1.3 随机事件的概率	12
1.3.1 概率的公理化定义	12
1.3.2 概率的性质	13
1.3.3 概率的三种计算方法	14
1.4 条件概率与乘法公式	21
1.4.1 条件概率	21
1.4.2 乘法公式	23
1.5 全概率公式与贝叶斯公式	24
1.6 事件的独立性与伯努利概型	26
1.6.1 事件的独立性	26
1.6.2 伯努利概型	29
本章小结	30
本章知识体系图	31
自测题 1	31
第 2 章 随机变量及其分布	33
2.1 随机变量	33
2.2 离散型随机变量及其概率分布	34
2.2.1 离散型随机变量及其分布律	34
2.2.2 几种常见的离散型随机变量及其分布律	35
2.3 随机变量的分布函数	40

2.4 连续型随机变量及其概率密度	43
2.4.1 连续型随机变量的定义	43
2.4.2 几个重要的连续型随机变量及其密度函数	45
2.5 随机变量函数的分布	52
2.5.1 离散型随机变量函数的分布	52
2.5.2 连续型随机变量函数的分布	53
本章小结	55
本章知识体系图	56
自测题 2	56
第 3 章 多维随机变量及其分布	58
3.1 二维随机变量及其分布函数	58
3.1.1 二维随机变量	58
3.1.2 联合分布函数	58
3.1.3 边缘分布函数	60
3.2 二维离散型随机变量	61
3.3 二维连续型随机变量	65
3.3.1 二维连续型随机变量的联合分布与边缘分布	65
3.3.2 常见的二维连续型随机变量	69
3.4 条件分布	72
3.4.1 二维离散型随机变量的条件分布	72
3.4.2 二维连续型随机变量的条件分布	74
3.5 随机变量的独立性	77
3.5.1 二维离散型随机变量的独立性	77
3.5.2 二维连续型随机变量的独立性	78
3.6 两个随机变量函数的分布	80
3.6.1 二维离散型随机变量函数的分布	80
3.6.2 二维连续型随机变量函数的分布	82
本章小结	88
本章知识体系图	89
自测题 3	90
第 4 章 随机变量的数字特征	92
4.1 数学期望	92
4.1.1 离散型随机变量的数学期望	93
4.1.2 连续型随机变量的数学期望	94
4.1.3 随机变量函数的数学期望	94

4.1.4 数学期望的性质	97
4.2 方差	99
4.2.1 方差的定义及其计算公式	99
4.2.2 方差的性质	101
4.2.3 切比雪夫不等式	102
4.3 常见分布的数学期望和方差	103
4.3.1 两点分布	103
4.3.2 二项分布	103
4.3.3 泊松分布	104
4.3.4 均匀分布	104
4.3.5 指数分布	105
4.3.6 正态分布	106
4.4 协方差与相关系数	107
4.4.1 协方差的定义与性质	108
4.4.2 相关系数的定义与性质	109
4.4.3 独立和不相关的关系	111
4.4.4 矩	111
4.4.5 协方差阵	112
本章小结	113
本章知识体系图	114
自测题 4	115
第 5 章 大数定律与中心极限定理	117
5.1 大数定律	117
5.1.1 依概率收敛的概念	117
5.1.2 大数定律的定义	118
5.1.3 几个重要的大数定律	119
5.2 中心极限定理	121
5.2.1 中心极限定理的客观背景	121
5.2.2 两个常用的中心极限定理	121
本章小结	125
本章知识体系图	126
自测题 5	126
第 6 章 数理统计的基本概念	128
6.1 引言	128
6.1.1 数理统计的思想方法	128

6.1.2 数理统计的内容	128
6.2 总体与样本	129
6.2.1 总体及其分布	129
6.2.2 简单随机样本	129
6.3 统计量及其分布	131
6.3.1 统计量	131
6.3.2 三大统计分布	134
6.3.3 抽样分布定理	137
6.4 分位数	141
本章小结	143
本章知识体系图	144
自测题 6	144
第 7 章 参数估计	146
7.1 点估计	146
7.1.1 点估计的概念	146
7.1.2 矩估计	147
7.1.3 极大似然估计	149
7.2 估计量的评选标准	156
7.2.1 无偏性	156
7.2.2 有效性	158
7.2.3 一致性	160
7.3 区间估计	161
7.3.1 置信区间的概念	162
7.3.2 置信区间的求法	162
7.4 正态总体均值的区间估计	165
7.4.1 单个正态总体均值 μ 的置信区间	166
7.4.2 两个正态总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间	168
7.5 正态总体方差的区间估计	172
7.5.1 单个正态总体方差 σ^2 的置信区间	172
7.5.2 两个正态总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间	175
7.6 单侧区间估计	177
本章小结	181
本章知识体系图	182
自测题 7	182
第 8 章 假设检验	185

8.1 假设检验的基本概念	185
8.1.1 假设检验基本问题的提法	185
8.1.2 假设检验的基本思想	186
8.1.3 假设检验的步骤	187
8.1.4 假设检验的两类错误	189
8.2 正态总体均值的假设检验	191
8.2.1 单个正态总体均值 μ 的检验	191
8.2.2 两个正态总体均值 μ_1, μ_2 的检验	193
8.3 正态总体方差的假设检验	199
8.3.1 单个正态总体方差 σ^2 的检验	199
8.3.2 两个正态总体方差 σ_1^2, σ_2^2 的检验	201
8.4 单侧假设检验	206
8.4.1 正态总体均值的检验	206
8.4.2 正态总体方差的检验	212
8.5 假设检验与区间估计之间的关系	217
本章小结	221
本章知识体系图	222
自测题 8	223
第 9 章 概率统计在经济中的应用	226
9.1 回归分析	226
9.1.1 回归模型和回归方程	226
9.1.2 参数 β_0, β_1 的最小二乘估计	228
9.1.3 预测问题	228
9.2 质量管理的统计方法	230
9.2.1 统计过程管理	230
9.2.2 控制图	230
9.3 统计决策简介	233
9.3.1 统计决策概述	233
9.3.2 期望值准则决策法	234
9.3.3 最大可能性决策法	235
9.3.4 决策树	236
9.3.5 贝叶斯决策法	237
参考答案	239
附录	250
附表 1 泊松分布表	250

附表 2 正态分布表	251
附表 3 χ^2 分布上侧分位数表	252
附表 4 t 分布上侧分位数表	254
附表 5 F 分布上侧分位数表	255

绪 论

概率论与数理统计是高等教育中一门重要的公共基础课,所讨论和研究的问题与我们的现实生活有着密切的联系,在近代物理、自动控制、地震预报和气象预报、工厂产品质量控制、农业试验和公用事业等方面都有广泛的应用.课程的主要内容包括:随机事件和概率,一维和 multidimensional 随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律与中心极限定理,参数估计,假设检验等内容.

概率论研究对象是随机现象,而统计学恰恰充满了无处不在的随机现象.数理统计学是一门以概率论作为基础、应用性极其广泛的基础性学科,伴随着概率论的发生而发展起来.

一、概率论的发展历程

概率论学科的发展经历了萌芽时期、古典概率时期、分析概率时期、公理化概率时期和现代多元化发展时期五个阶段.

概率论起源于赌博问题.意大利数学家卡尔达诺 (Cardano, 1501—1576) 最早在其著作《游戏机遇学说》中对“赌金分配”问题进行了讨论.1654年法国的一位名为梅尔的骑士,向法国数学家帕斯卡 (Pascal, 1623—1662) 提出了一个令他苦恼很久的问题,史称“赌金问题”.

正如泊松 (Poisson, 1781—1840) 所说:“赌金分配问题乃是概率论学科的起源问题.”该问题也吸引了荷兰数学家惠更斯 (Huygens, 1629—1695), 时值惠更斯游学巴黎,对这一问题进行了更为深入的思考,并于1657年出版了自己的著作——《论赌博中的计算》,该著作被认为是最早的概率论著作.

在卡尔达诺、帕斯卡、费马、惠更斯等数学家留给世人的资料中,出现了一些概率论概念与定理,比如数学期望,概率加法定理、乘法定理,这些概念与定理的出现标志着概率论的诞生.

概率论诞生后进入了古典概率论时期.在这一时期雅各布·伯努利 (Jacob Bernoulli, 1654—1705) 对概率论发展做出了重要贡献.他的著作《猜度术》被认为是其一生中最重要的著作.“伯努利大数定律”就在这本书中首次提出,是对“大数定律”的最初讨论.雅各布对大数定律的陈述与现代的标准概率论著作十分一致.大数定律是描述随机事件在大量重复试验中呈现的必然规律,在多个统计量与单一概率值之间建立了演绎关系,推动概率论走向了更广阔的应用空间.雅各布的工作对于概率论学科的建立起到了奠基的作用,使其成为一门独立的数学分支.在雅各布·伯努利之后,法国数学家们将概率论又向前推进了一步.棣莫弗 (De Moivre, 1667—1754) 得出了概

率论的一些重要结果,并提出了概率论学科的一系列新概念,如概率乘法法则,正态分布和正态分布率的概念.蒲丰提出了著名的“蒲丰问题”,引进了几何概率.泊松则推广大数定理,提出了著名的泊松分布.

随着微积分在概率论中的应用,概率论发展到了分析时代.拉普拉斯(Laplace, 1749—1827)的工作使得概率论走向了严密和系统,成为科学概率论.他在《概率的分析理论》(于1812年出版)中对古典概率的优秀成果进行了总结.该书的最大成就在于将数学分析作为工具处理概率论问题,使得概率论这门学科从零散的组合技巧向分析方法进行了巨大过渡,是现代概率论萌生和发展的前奏,推动概率论学科迈向全新的发展阶段.拉普拉斯的著作也存在不足,对概率定义的讨论还不够深入.19世纪概率论研究的中心发生了迁移,俄罗斯逐步形成了世界概率论的研究中心.圣彼得堡数学学派在概率论研究的第一时期吸收了古典概率论的精华,在拉普拉斯《分析概率论》的框架内进一步发展了概率论.该学派的杰出人物切比雪夫(Чебышев, 1821—1894)集中研究了极限理论,他的思想奠定了圣彼得堡概率论学派的研究基础.以其名字命名的有“切比雪夫不等式”和“切比雪夫大数定律”.马尔可夫(Морков, 1856—1922)是切比雪夫的学生,他延续了老师的研究工作,推广了大数定律和中心极限定理的应用范围.概率论学科在十九世纪成长迅速,但是仍不能称之为严格的演绎科学.

19世纪数学公理化思潮泛滥,在其影响下,概率论步入了公理化时期.法国数学家庞加莱(Poincaré, 1854—1912)、博雷尔(Borel, 1871—1956)、俄国数学家伯恩斯坦(Bernstein, 1880—1968)和奥地利数学家米西斯(Mises, 1883—1953)都对概率论的公理化做了初步尝试.1900年,德国数学家希尔伯特(Hilbert, 1862—1943)明确提出建立概率论公理化体系问题.但是在测度论与实变函数理论未被引入之前,这些公理化理论不够完善.圣彼得堡数学学派在概率论研究的第二时期为概率论走向公理化历程起到了决定性作用.1926年,柯尔莫哥洛夫(A. N. Kolmogorov, 1903—1987)推导了依概率收敛的弱大数定律成立的充分必要条件.将测度论引入概率论,对法国数学家博雷尔提出的强大数定律问题给出了最一般的结果,从而实现了弱大数定律到强大数定律的推广.大数定律的完善成为概率论公理化的前奏.1933年,柯尔莫哥洛夫以德文出版经典著作《概率论基础》.柯尔莫哥洛夫在著作中建立了六条公理和一系列的基本概念,推动概率论走向了公理化的道路,该体系得到了学界的普遍认可.自此概率论成为一门严密的数学分支,并通过集合论与实变分析、泛函分析和偏微分方程等数学分支建立了密切联系.

二、数理统计的发展历程

数理统计学通过建立数学模型,收集整理数据,进行统计推断、预测和决策.数理统计方法在工农业生产、自然科学和技术科学以及社会经济领域中都有广泛的应用.

简单的统计思想古来有之,古希腊的哲学家已注意到各种统计问题.现代意义的数理统计学主要起源于研究总体、变差和简化数据,19世纪萌芽并发展,20世纪

成熟.

英国政治算术学派代表约翰·格朗特 (John Graunt, 1620—1674) 出版著作《对死亡表的自然观察和政治观察》, 这可以看作是统计学的开端. 书中通过大量观察试验的方法, 并发现了一系列的人口统计规律, 如在非瘟疫时期, 一个大城市每年死亡人数有统计规律, 一般疾病和事故的死亡率较稳定, 而传染病的死亡率波动较大. 新生儿的男女比例为 1:1 等. 威廉·配第 (William Petty, 1623—1687) 是一位与格朗特同时代的经济学家, 1676 年出版著作《政治算术》, 书中利用大量的数据对英国、法国、荷兰三国的经济实力进行了比较, 他运用了数字、重量、尺度等进行数量对比分析的方法, 奠定了经济统计学基础. 他认为应该建立中央统计部为统计人口的有关状况来收集一些数据, 其中应包括出生、死亡、婚姻、收入、教育和商业等方面的统计数据.

在格朗特的研究基础上, 科学家对人口统计学进行了更深入的研究, 大大推动了这一研究进展. 哈雷 (Edmond Helley, 1656—1742) 改进了格朗特的生命表并且给出了死亡率的概念. 对概率论的发展作出重要贡献的雅各布·伯努利和拉普拉斯同样对统计学有一定研究, 雅各布的弱大数定律证明了大样本均值的合理性. 拉普拉斯首先把数学分析系统地运用于概率论, 由此导致了建立在概率论基础上的统计学发生了质的飞跃.

19 世纪初期, 高斯 (Gauss, 1777—1855) 在计算行星轨道时, 采用“最小二乘法”对观测数据进行误差分析, 并在对“测地问题”的研究过程中进一步完善了最小二乘法和对统计规律的研究. 高斯曾开设过“最小二乘法及其在科学中的应用”课程, 近代抽象数学的先驱戴德金 (Dedekind, 1831—1916) 就曾选修过高斯的最小二乘法课程. 高斯的工作使得统计学从对观测数据的单纯描述, 向重视推断进行过渡.

对现代数理统计学的建立做出重要贡献的还有英国统计学家 K. 皮尔逊 (K. Pearson, 1857—1936), 他提出“总体”的概念, 以群体作为统计学的研究对象, 是“大样本统计”的前驱. K. 皮尔逊还提出了估计参数的一种方法——矩法估计, 发展了德国测地学者赫尔默特发现的 χ^2 分布. K. 皮尔逊的学生戈塞特 (W.S.Gosset, 1876—1937) 提出样本应从总体中随机地抽取的观点, 由此统计学的研究对象从群体现象转变为随机现象.

英国数学家费希尔 (Fisher, 1890—1962) 的工作使得数理统计学作为一门独立学科分离出来, 他提出了许多重要的统计方法, 发展了正态总体下各种统计量的抽样分布, 建立系统的相关分析与回归分析; 费希尔与叶茨 (F.Yates, 1902—1994) 共同创立试验设计这一统计分支, 同时也是假设检验的先驱.

1946 年, 瑞典数学家 H. 克拉默 (H. Cramer, 1893—1985) 发表了有关“用测度论系统总结数理统计”的论文《统计学的数学方法》, 标志着现代数理统计学的成熟. 之后, 美籍罗马尼亚数学家沃尔德 (A. Wald, 1902—1950) 提出了序贯分析和统计决策

理论, 引起了战后数理统计思想的革新.

时至今日, 大数据时代的来临, 对于统计学的发展而言是机遇. 统计学依赖于样本统计, 样本数量不足会导致样本估计误差增大, 大数据时代下, 收集整理庞大的数据信息的成本大大降低, 数据信息发展表现出总体即是样本的态势, 弥补了样本统计的不足.

大数据时代的来临, 对于统计学的发展而言也是挑战. 现阶段传统统计学相关方法难以适用于大数据分析, 亟待开发大数据动态分析、数据流算法等.

大数据为传统统计学带来了严峻的考验, 也为传统统计学有效发展创造了良好的契机.

现代社会, 计算机的高速发展, 渗透到各个学科当中, 提供了有力的计算工具, 对概率统计学科起到了巨大的推动作用, 大大拓展了概率统计的应用领域. 使得这一科学与复杂网络、临床医学、认知理论、遗传学、生物学、经济学、计算机科学、地球科学、神经学、信息论、控制论和核反应堆安全等学科深度交叉融合, 形成了一些新的学科分支和学科增长点.

三、概率论与数理统计在中国的发展

1880 年, 供职于江南制造局的英国传教士傅兰雅 (John Freyer, 1839—1928) 与中国数学家华衡芳 (1833—1902) 合作翻译了托马斯·迦罗威的《概率论》, 中文译著名为《决疑数学》, 一直未刊刻付印. 1896 年由实业家周学熙首次刊印, 这是传入中国的第一部概率论与数理统计著作. 但是由于当时的社会背景和译文采用汉字代替西方数学的符号和数字, 令人费劲, 影响并不大, 1903 年, 日本知名的学者横山雅男的《统计讲义录》中文版出版且流传极广.

中国概率统计领域内享有国际声誉的数学家有许宝騄、王梓坤、彭实戈等. 许宝騄 (1910—1970) 是 20 世纪最富创造性的统计学家之一, 拉开了中国概率论与数理统计学科研究的帷幕. 他在概率论领域的主要工作是对极限定理进行了较为深入的研究. 1938 年到 1945 年期间, 许宝騄对多元统计分析中的精确分布和极限分布得到了重要的结果, 导出正态分布样本协方差矩阵特征根的联合分布和极限分布, 这些结果是多元分析中的基石. 以上这两方面的工作确立了他在数理统计中的国际上的地位. 晚年致力于组合设计的构造, 也取得了重要成果.

王梓坤是中国科学院院士, 1955 年, 王梓坤赴莫斯科大学数学力学系攻读概率论. 他的导师是近代概率论的奠基人柯尔莫哥洛夫和杜布罗辛. 他在 60 年代主要研究马尔可夫链的构造, 在“生灭过程的构造与泛函分布问题”这一领域有开创性的贡献. 他在 70 年代出版了论著《布朗运动与位势》, 着重研究马尔可夫过程与位势论的关系. 还出版了《概率与统计预报》, 书中论述了地震的统计预报问题; 之后对多指标马尔可夫过程、超过程进行了深入研究. 80 年代, 他研究多指标马尔可夫过程, 并在国际上最先引进多指标奥思斯坦-乌伦贝克过程的定义, 并研究了它的性质; 90 年代初, 除

继续上述工作外,还从事超过程的研究,是当时国际上最活跃的课题之一.

彭实戈是中国科学院院士,在随机最优控制系统的最大值原理、倒向随机微分方程理论和非线性数学期望理论的研究方面取得了国际领先水平的原创性研究成果.他的研究结果对于概率论、统计学、风险分析、随机分析的发展有重要的推动作用.2010年,彭实戈在国际数学家大会上做了题为“倒向随机微分方程和非线性期望及其应用”的大会报告.他是第一位做1小时邀请报告的中国数学家,这标志着我国的概率统计研究正逐步走向世界前沿.

前辈们的工作奠定了概率论与数理统计这门学科的理论基础,大数据时代为概率论与数理统计学科提供了更广阔的舞台.

第 1 章 随机事件与概率

“概率论与数理统计”是以数量化的方法来研究随机现象及其规律性的一门应用数学学科. 20 世纪以来, 概率论向各个领域的渗透已成为近代科学技术发展的重要特征之一, 并被广泛地应用到生产、生活的各个方面, 其理论和方法正在为时代发展和社会建设发挥着不可替代的独特作用.

本章介绍的随机事件与概率是概率论中最基本、最重要的概念之一. 其主要内容包括: 随机事件和样本空间, 事件间的关系与运算, 概率的定义、性质及计算方法, 条件概率与乘法公式, 全概率公式与贝叶斯公式, 事件的独立性与伯努利概型.

1.1 随机事件和样本空间

1.1.1 随机现象和随机试验

我们所指的试验是一个广义的概念, 它可指对某个过程的记录、对一个问题的调查、各种科学实验等.

1. 随机现象

什么是随机现象? 这可以用两个简单的试验来阐明:

试验 1 一袋装有 3 个外形完全相同的白球, 从中任取一球;

试验 2 一袋装有 3 个外形完全相同但颜色不同的球, 从中任取一球.

对于试验 1, 根据其条件, 我们就能断定取出的必是白球. 像这样在试验之前能断定结果的现象称为**确定性现象**. 确定性现象非常广泛. 例如, 同种电荷互相排斥; 标准大气压下, 水加热到 100°C 会沸腾; 边长为 a, b 的矩形, 其面积必为 $a \cdot b$. 诸如此类都是确定性现象.

对于试验 2, 根据其条件, 在球没有取出之前, 不能断定取出的是哪种颜色的球. 我们把在试验之前无法知道确切结果的现象称为**随机现象**. 随机现象更是广泛地存在于客观世界之中. 例如, 抛一枚硬币, 落地后可能出现正面, 也可能出现反面; 新生婴儿可能是男孩, 也可能是女孩; 将来某日某种股票的价格可能涨, 可能跌, 也可能价格不变. 诸如此类都是随机现象.

2. 随机试验

试验常用大写字母 $E, E_1, E_2, \dots$ 表示. 下面看几个试验的例子:

E_1 : 掷一枚骰子, 观察朝上出现的点数;