

“十一五”国家重点图书



俄罗斯数学  
教材选译

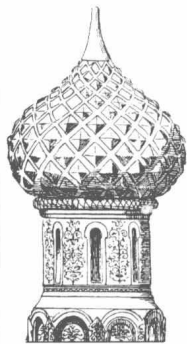
# 数学分析

(第一卷)(第7版)

□ B. A. 卓里奇 著

□ 李 植 译

高等教育出版社



俄罗斯数学

教材选译

“十一五”国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

# 数学分析

(第一卷)(第7版)

□ B. A. 卓里奇 著

□ 李 植 译

高等教育出版社·北京

图字 : 01-2017-3997 号

В.А. Зорич *Математический анализ* Часть I. Седьмое издание, дополненное.  
МЦНМО. Москва, 2015.

Originally published in Russian under the title

Mathematical Analysis by V. A. Zorich (Part I, 7th expanded edition, Moscow 2015)

MCCME (Moscow Center for Continuous Mathematical Education Publ.)

Copyright © V. A. Zorich

All Rights Reserved

## 数学分析·第一卷

Shuxue fenxi

## 图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析 : 第 7 版 . 第一卷 / (俄罗斯) B. A. 卓里奇著 ;  
李植译 . — 新 1 版 . — 北京 : 高等教育出版社 , 2019.2  
ISBN 978-7-04-028755-4

I. ①数… II. ①B… ②李… III. ①数学分析—高等  
学校—教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 285598 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 李 鹏 李华英 吴晓丽 和 静  
封面设计 王凌波 责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社  
社址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598  
网址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>  
<http://www.hepmall.com>  
<http://www.hepmall.cn>  
印刷 肥城新华印刷有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16  
印张 34.5  
字数 650千字  
版次 2019 年 2 月第 1 版  
印次 2019 年 2 月第 1 次印刷  
定价 79.00 元  
本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,  
请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
[物 料 号 28755-00]

## 内容简介

本书是作者在莫斯科大学力学数学系多遍讲授数学分析课程的基础上写成的,自1981年第1版出版以来,到2015年已经修订、增补至第7版。作者加强了分析学、代数学和几何学等现代数学课程之间的联系,重点关注一般数学中最有本质意义的概念和方法,采用适当接近现代数学文献的语言进行叙述,在保持数学一般理论叙述严谨性的同时,也尽量体现数学在自然科学中的各种应用。

全书共两卷,第一卷内容包括:集合、逻辑符号的运用、实数理论、极限和连续性、一元函数微分学、积分、多元函数及其极限与连续性、多元函数微分学。

本书观点较高,内容丰富新颖,所选习题极具特色,是教材理论部分的有益补充。本书可作为综合大学和师范大学数学、物理、力学及相关专业的教师和学生的教材或主要参考书,也可供工科大学应用数学专业的教师和学生参考使用。

# 《俄罗斯数学教材选译》序

---

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005年10月

# 中文版序言

---

我很高兴这本数学分析教材有了新的中文版. 我希望读者至少浏览一下本书的第 1 版序言摘录和后续各版序言, 以便了解本书的结构和特点, 以及我针对其使用方法向学生和教师提出的一些建议. 呈献给广大读者的这个中文版是全新的, 不仅文字经过重新翻译, 版面也经过重新设计.

本书内容有显著增加——为了不影响正文, 在每一卷最后补充了一系列附录.

在第一卷中补充了六个附录 (面向一年级学生的数学分析引言, 初论方程的数值解法, 初论勒让德变换, 初论黎曼-斯蒂尔切斯积分、 $\delta$  函数和广义函数, 欧拉-麦克劳林公式, 再论隐函数定理), 在第二卷中也补充了六个附录 (初论级数工具, 多重积分中的变量代换, 高维几何学与自变量极多的函数, 多元函数与微分形式及其热力学解释, 曲线坐标系中的场论算子, 现代牛顿-莱布尼茨公式与数学的统一).

这些附录对 (数学专业和物理学专业的) 学生和教师各有帮助. 最后一个附录可以视为全书的总结, 其中包括整个教材在观念上最重要的成就——建立了数学分析与数学其他分支之间的联系.

B. A. 卓里奇  
莫斯科, 2016 年

## 第 7 版和第 6 版序言

---

我刚刚为这本教材最新的英文版写了序言,其中同样适用于俄文第 7 版的内容,我认为可以在这里重复一下。

本教材此前各版出版后,科学并没有停滞不前。例如,费马大定理和庞加莱猜想得到了证明,找到了希格斯玻色子,等等。诸多成就,不胜枚举。这些发展虽然可能与经典数学分析教材没有直接关系,但是其间接表现是,本教材的作者在这段时间里也学习、思考、理解了一些东西,扩展了自己的知识储备,而这些扩展的知识甚至在讨论似乎完全无关的其他事物时也是有用的<sup>①</sup>。

除了俄文原版,本教材还有英文版、德文版和中文版。细心的各国读者在书中找到了很多错误。幸好,这都是一些局部的错误,主要是印刷错误。当然,这些错误在新版中已经得到修正。

俄文第 7 版与第 6 版的主要区别是在正文之后补充了新的附录。在第一卷中补充了一个附录(欧拉-麦克劳林公式),在第二卷中补充了三个附录(多元函数与微分形式及其热力学解释,曲线坐标系中的场论算子,现代牛顿-莱布尼茨公式与数学的统一)。这些附录对(数学专业和物理学专业的)学生和教师各有帮助。最后一个附录可以视为总结,其中包括整个教程在观念上最重要的成就——建立了数学分析与数学其他分支之间的联系。

让我感到欣慰的是,本书在某种程度上不仅可供数学和物理学专业师生参考,而且对高等工科院校工科专业师生深入学习数学也有帮助。这激励我写出与热力学有关的一个附录,让数学与内容基础但内涵相当丰富的热力学紧密联系起来。

---

<sup>①</sup> 与阿达马一样,爱尔迪希也是一位长寿的数学家,下面的趣闻正是关于他的。某一位记者在采访年事已高的爱尔迪希时,最后问他有多少岁。爱尔迪希稍微思考后回答:“我记得,当我很年轻时,科学证实地球存在了 20 亿年。而现在,科学表明地球已经存在 45 亿年。因此,我大概有 25 亿岁。”



我高兴地看到, 新一代已经站在老一代的肩膀上成长起来, 他们的思考更广泛, 理解更深刻, 本领也更高强.

B. A. 卓里奇  
莫斯科, 2015 年

居住在不同国家的很多人利用各种机会向出版社或者我本人提供了在本书的俄、英、德或中文版中发现的各种错误 (印刷错误、谬误、遗漏), 我以自己和未来读者的名义向他们全体表示感谢. 在本书的俄文第 6 版中, 我考虑了这些意见并进行了相应修订.

现在已经清楚, 本书也适用于物理专业师生, 我对此非常欣慰. 无论如何, 我确实尽量把常规理论与它在数学内外的丰富应用实例结合起来.

第 6 版包括一系列附录, 它们可能对学生和教师有所帮助. 这首先是某些实际课堂材料 (例如第一和第三学期作为引言的头一次课的笔记), 其次是一些数学知识 (有些是当前正在研究的问题, 例如高维几何学与概率论的联系), 它们是本书基本内容的延伸.

B. A. 卓里奇  
莫斯科, 2011 年

# 第 5 版和第 3 版序言

---

在第 5 版中订正了发现的错误, 并局部修改了第 4 版正文.

B. A. 卓里奇  
莫斯科, 2006 年

本版第一卷继同一出版社出版了包含后续内容的第二卷之后面世, 并沿用了第二卷的版面设计, 以便保持统一性和继承性<sup>①</sup>. 重新绘制了插图, 订正了发现的印刷错误, 补充了一些习题, 还添加了一些补充文献. 在后附第 1 版序言中更全面地介绍了本书的内容和整个教程的某些特点.

B. A. 卓里奇  
莫斯科, 2001 年

---

<sup>①</sup> 本书第 2 版的第一卷和第二卷分别由两家出版社先后出版于 1997 年和 1998 年, 后者为便于阅读采用了更大的字号. ——译者

## 第 2 版序言

---

在本书第 2 版中,除了试图订正第 1 版的印刷错误<sup>①</sup>,还对叙述做了个别改动(主要涉及个别定理的证明方法)并补充了新的习题(通常是非常规题目).在本数学分析教程第 1 版序言中已经介绍了它的一般特点,指出了编撰的基本原则和方针.这里,我想就如何在教学过程中使用本书给出几点实际的说明.

任何一本教材,通常即可供学生使用,也可供教师使用,但他们各有自己的目的.最初,无论学生还是教师,都希望教材不仅包括按照规定必须有的最低限度的理论,而且尽量还包括丰富的应用实例、说明以及历史性和科学性注释,此外还能展示相互联系,指明发展前景.但是,学生在准备考试的时候,则希望看到需要在考场上掌握的内容,而教师在备课的时候,同样也只挑选能够并且必须在给定学时内讲解的内容.

因此应当注意,本教材的内容当然比编写时所依据的讲义宽泛得多.差别何在?第一,实际上为讲义补充了一整套习题,其中不仅包括练习题,而且包括丰富的自然科学或纯数学问题,这些问题关系到理论的相应章节,有时就是它们的重要推广.第二,在书中当然比在课堂上分析了更多例子,以便展示理论的实际应用.第三,许多章节和段落是有意识地作为传统内容的补充而写的,这在第 1 版序言的“关于引言”和“辅助材料”中已经说过.

我还要提醒,我在第 1 版序言中已经警告过学生和刚参加工作的教师,希望他们不要花太多时间去深究常规的前两章,因为这将大大拖延对数学分析本身的钻研并严重偏离主题.

---

<sup>①</sup> 由于第 1 版的排版并未保存下来,所以在订正印刷错误的同时必然又会出现一系列新的印刷错误,但对此不必苦恼.按照欧拉的看法,阅读数学文献正是因为印刷错误而变得趣味盎然.

我在书末附录中列出了近年来用于前两学期的与第一卷有关的单元测试题和考试大纲,这既是为了展示从常规的前两章中可以选取哪些内容进入实际课堂,也是为了集中给出该课程的整体教学大纲,并指出该大纲因听众不同而可能有一些变化。

当然,专业教师从考试大纲中既能看出教学顺序,也能看出基本概念和方法的相应发展程度,还能看出向第二卷内容的延伸(这时在第一卷中研究的问题已经能够在更一般的形式下被读者接受)。

最后,我想感谢那些对本书第 1 版提出批评和建设性意见的同事和学生,无论我是否认识他们。阅读 A. H. 柯尔莫戈洛夫和 B. И. 阿诺尔德的审阅意见对我来说特别有趣和有益。这两份审阅意见虽然在篇幅、形式和风格上有所不同,但在专业上却有那么多共同之处,真是令人振奋。

B. A. 卓里奇  
莫斯科, 1997 年

# 第 1 版序言摘录

---

牛顿和莱布尼茨在三百年前奠定了微积分学的基础,即使按照今天的标准来衡量,这仍然是科学史上,特别是数学史上最伟大的事件.

现在,(广义的)数学分析与代数交织在一起,构成了枝繁叶茂的现代数学之树的根基,使现代数学与非数学领域之间的联系一直生机勃勃.正是由于这个原因,无论人们对高等数学的认识多么有限,数学分析基础都是高等数学的必要组成部分,而这大概就是关于数学分析基础的众多著作面向不同读者群大量出版的原因.

本书首先面向具有以下愿望的数学专业学生:他们既想了解各基本定理的完全合乎逻辑的证明(理应如此),同时也关注这些定理在非数学领域中的应用.

鉴于上述情况,本书特点可大致归纳如下.

**叙述的特点.**在每个大标题范围内,叙述通常是归纳性的.有时,从问题的提出和对求解的启发性思考,直到基本概念和体系<sup>①</sup>的建立,都采用归纳方式.

开始阶段的叙述很详细,然后越来越简明扼要.

光滑分析这一有效工具是一个重点.在叙述理论时,我(按照自己的理解)力图提炼出最本质的方法和事实,避免以显著增加证明的复杂性为代价去尝试略略强化一些定理.

只要有助于揭示事物的本质,均采用几何方式进行叙述.

正文包含相当多例题,几乎每一节末尾都有一组习题,我希望这些习题甚至是正文理论部分的重要补充.遵循波利亚和塞格的绝妙经验,我常常尽量把数学上很优美或在应用中很重要的结果编写为适于读者的成套习题.

---

<sup>①</sup> 体系一词的原文为 формализм.按作者本人的解释,这是指在某个学科或领域中对某些现象建立起来的一套足够完整的常规理论,例如经典力学中的哈密顿体系.在数学中,体系意味着形式上自治的一套理论,包括基本概念的定义、理论基础(公理、假设、原理)和主要定理.——译者

内容的安排不仅受到布尔巴基数学结构<sup>①</sup>的影响,而且与数学分析的地位有关,它是统一的数学教育(更好的说法是自然数学教育)的组成部分.

**内容.** 全书分为两卷出版.

第一卷包括一元函数微分学和积分学以及多元函数微分学.

在微分学中特别关注了微分在变量变化特征的局部描述中作为线性标尺的作用.除了利用微分学研究函数关系(单调性、极值)的大量例子,还通过最简单的微分方程展示了数学分析语言的作用,这些微分方程是一些具体现象的数学模型,涉及内容丰富的诸多问题.

研究了一系列可化为重要初等函数来求解的问题(例如变质量物体的运动,核反应堆,大气压强,有阻力介质中的运动).更全面地使用了复数语言,特别地,导出了欧拉公式,证明了基本初等函数的统一性.

特意尽量用直观的材料在黎曼积分范围内叙述积分学,这对大多数应用来说已经绰绰有余<sup>②</sup>.指出了积分的各种应用,包括可以化为反常积分(例如引力场逃逸功和第二宇宙速度)或椭圆函数(存在约束时重力场中的运动,摆)的一些应用.

多元函数微分学是相当几何化的.例如,研究了隐函数定理的一些重要而且有用的推论,如曲线坐标,光滑映射和光滑函数的局部典范形式(秩定理和莫尔斯引理),以及条件极值理论.

第二卷的头两章概括了与连续函数理论和微分学有关的结果,其叙述采用一般的不变形式,以便自然地与多元实变函数微分学相衔接.第二卷还包括多元函数积分学,直到一般的牛顿-莱布尼茨-斯托克斯公式为止,从而使第二卷内容具有一定的完整性.

我们在第二卷序言中给出了关于第二卷的更全面的介绍,这里只有以下补充:除了已经列举的内容,第二卷还包括函数项级数(含幂级数和傅里叶级数),含参变量的积分(包括基本解、卷积和傅里叶变换),以及渐近展开理论(在教科书中通常很少介绍).

现在谈谈某些个别的问题.

**关于引言.**我没有为这门课程再写引言,因为大多数新入学的大学生在中学就已经具有关于微积分及其应用的初步知识,他们大概不希望再去阅读更为冗长的引言.作为其替换,我在头两章中介绍集合、函数、逻辑符号的运用以及实数理论,以便让昔日中学生的相应认识在数学上有所完善.

---

<sup>①</sup> 布尔巴基(N. Bourbaki)是组建于20世纪30年代的一个著名数学家群体(以法国数学家为主)的笔名,这些数学家致力于用公理方法在集合论基础上以最严格最一般的形式重构整个现代数学,并按照结构(例如代数结构、序结构、拓扑结构)重新对全部数学进行分类.参见正文第4页上的脚注,以及关于布尔巴基发展史的一本有趣著作:莫里斯·马夏尔.布尔巴基:数学家的秘密社团.胡作玄,王献芬译.长沙:湖南科学技术出版社,2011.——译者

<sup>②</sup> 众所周知,更“强”的积分要求对集合论进行更细致的非常规研究,但无助于提供有效的数学分析工具,而这些工具才是首先应当掌握的.

这些内容涉及数学分析的常规基础, 它们首先是为希望将来仔细研究经典数学分析基本概念和原理的逻辑结构的数学专业学生而写的. 数学分析本身始自第三章, 所以那些希望尽快掌握有效工具并了解其应用的读者, 在初次阅读时完全可以从第三章开始, 而在遇到疑问时再回过头来翻阅前面的章节. 我希望我也注意到了这些问题, 并预先在头两章中给出了解答.

**内容的划分.** 两卷内容按章节划分, 章的序号连续, 节在每一章内有单独的序号, 而小节仅在相应的节内加以编号. 为逻辑清晰和引用方便起见, 定理、命题、引理、定义和实例都单独列出, 并在每一节内加以编号.

**辅助材料.** 有几章是作为经典数学分析的自然延伸而写的. 这一方面包括已经提到的第一、二章, 内容涉及经典数学分析的常规基础, 另一方面包括第二卷的第九、十、十五章, 它们给出连续性理论、微分学和积分学的现代观点, 还包括第十九章, 其中叙述某些有效的渐近分析方法.

问题在于这些章节中的哪些内容可以纳入课程, 这与听众有关并由讲课教师决定. 不过, 这里引入的某些基本概念通常会出现在数学专业学生的任何课程中.

最后, 我想对提供帮助的人们表示感谢, 他们在友情和业务上的帮助对我写作本书是弥足珍贵和大有裨益的.

本教程相当细致地在许多方面与后续的现代大学数学课程相衔接, 例如微分方程、微分几何、复变函数论、泛函分析等课程. 为了实现这样的衔接, 在合作开设数学专业实验班期间, 与 B. И. 阿诺尔德, 特别是与 C. П. 诺维科夫的多次接触和讨论对我极有帮助.

我得到了国立莫斯科大学力学数学系数学分析教研室主任 H. B. 叶菲莫夫的许多建议.

我还感谢教研室和系里的同事们对我的胶印版讲义提出意见.

我在写作本书时使用了最近一段时间由学生记录的课堂笔记, 它们非常有用. 我向这些学生表示感谢.

我深深感谢出版社的审阅人 A. Д. 库德里亚夫采夫, B. П. 彼得连科, C. B. 斯捷奇金提出建设性意见, 其中相当多意见已经在本书中得到考虑.

B. A. 卓里奇  
莫斯科, 1980 年

# 目 录

---

《俄罗斯数学教材选译》序.....	i
中文版序言.....	iii
第 7 版和第 6 版序言.....	iv
第 5 版和第 3 版序言.....	vi
第 2 版序言.....	vii
第 1 版序言摘录.....	ix
第一章 一些通用的数学概念与记号.....	1
§1. 逻辑符号.....	1
1. 联词与括号 (1) 2. 关于证明的附注 (2) 3. 某些专门记号 (3) 4. 最后的附注 (3) 习题 (3)	
§2. 集合及其基本运算.....	4
1. 集合(集)的概念 (4) 2. 包含关系 (5) 3. 最简单的集合运算 (7) 习题 (9)	
§3. 函数.....	10
1. 函数(映射)的概念 (10) 2. 映射的简单分类 (13) 3. 函数的复合与互逆映射 (14) 4. 作为关系的函数. 函数的图像 (15) 习题 (18)	



§4. 某些补充.....	21
1. 集合的势(基数类) (21) 2. 公理化集合论 (22) 3. 关于数学命题的结构及其集合论语言表述的附注 (24) 习题 (25)	
<b>第二章 实数</b> .....	<b>28</b>
§1. 实数集的公理系统和某些一般性质 .....	28
1. 实数集的定义 (28) 2. 实数的某些一般的代数性质 (31) 3. 完备性公理与数集的上确界(下确界)的存在性 (35)	
§2. 最重要的实数类和实数运算方面的一些计算问题.....	37
1. 自然数与数学归纳原理 (37) 2. 有理数与无理数 (39) 3. 阿基米德原理 (42) 4. 实数集的几何解释与实数运算方面的一些计算问题 (44) 习题 (54)	
§3. 关于实数集完备性的一些基本引理 .....	57
1. 闭区间套引理(柯西-康托尔原理) (57) 2. 有限覆盖引理(博雷尔-勒贝格原理) (58) 3. 极限点引理(波尔查诺-魏尔斯特拉斯原理) (59) 习题 (59)	
§4. 可数集与不可数集 .....	60
1. 可数集 (60) 2. 连续统的势 (62) 习题 (62)	
<b>第三章 极限</b> .....	<b>64</b>
§1. 序列的极限.....	64
1. 定义和例子 (64) 2. 数列极限的性质 (66) 3. 数列极限的存在问题 (70) 4. 级数的初步知识 (78) 习题 (86)	
§2. 函数的极限.....	89
1. 定义和例子 (89) 2. 函数极限的性质 (92) 3. 函数极限的一般定义(基上的极限) (105) 4. 函数极限的存在问题 (109) 习题 (122)	
<b>第四章 连续函数</b> .....	<b>125</b>
§1. 基本定义和实例.....	125
1. 函数在一个点的连续性 (125) 2. 间断点 (129)	
§2. 连续函数的性质.....	131
1. 局部性质 (131) 2. 连续函数的整体性质 (133) 习题 (140)	
<b>第五章 微分学</b> .....	<b>144</b>
§1. 可微函数.....	144
1. 问题和引言 (144) 2. 在一点处可微的函数 (148) 3. 切线. 导数和微分的几何意义 (150) 4. 坐标系的作用 (153) 5. 例题 (154) 习题 (159)	
§2. 基本的微分法则.....	160
1. 微分运算和算术运算 (160) 2. 复合函数的微分运算 (163) 3. 反函数的微分	