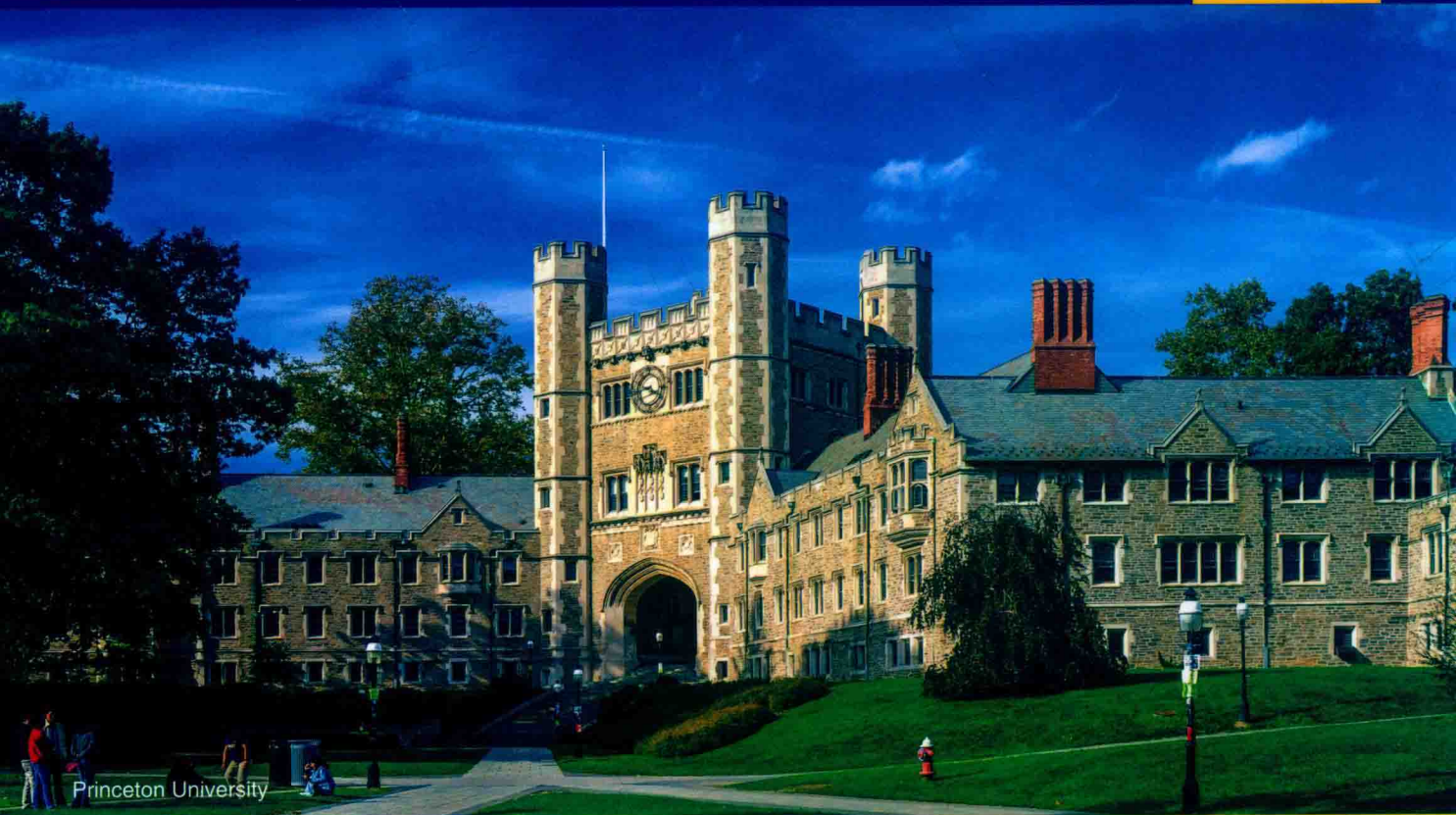


GRE & GMAT

数学考点精讲精练

吴强 编著



- 系统介绍GRE&GMAT知识考点
- 给出GRE&GMAT考试试题
- 对知识难点逐个剖析并一一突破
- 总结数学考点专业术语及解题技巧

GRE & GMAT 数学考点精讲精练

吴强 编著



图书在版编目(CIP)数据

GRE&GMAT数学考点精讲精练 / 吴强编著. — 杭州 :
浙江教育出版社, 2019.4
ISBN 978-7-5536-8116-0

I. ①G… II. ①吴… III. ①GRE—高等数学—自学参
考资料②高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第264594号

GRE&GMAT数学考点精讲精练

GRE&GMAT SHUXUE KAODIAN JING JIANG JING LIAN

吴 强 编著

责任编辑 赵清刚
美术编辑 韩 波
封面设计 李 倩
责任校对 马立改
责任印务 时小娟
出版发行 浙江教育出版社
地址: 杭州市天目山路40号
邮编: 310013
电话: (0571) 85170300 - 80928
邮箱: dywh@xdf.cn
网址: www.zjeph.com

印 刷 三河市良远印务有限公司
开 本 880mm×1160mm 1/16
成品尺寸 210mm×275mm
印 张 13.5
字 数 246 000
版 次 2019年4月第1版
印 次 2019年4月第1次印刷
标准书号 ISBN 978-7-5536-8116-0
定 价 58.00元

版权所有, 侵权必究。如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题, 请拨打服务热线: 010-62605166。

前 言

对于中国考生而言,在 GRE 和 GMAT 考试中最有把握拿分的部分就要属数学了,因为数学考查的内容大部分是中国考生在小学和中学阶段就已经学过的,而诸如微积分等高等数学的知识在考试中不会出现。尽管 GRE 和 GMAT 考试中的数学如此简单,当我们仔细统计时却发现考满分的人并不多。这存在三个共同的原因:

第一,考试时不可避免地会出现粗心,读题的粗心、计算的粗心和选择答案时的粗心。

第二, GRE 和 GMAT 数学考试考查的是数学知识在日常生活中的应用,是以英文出题,而我们一些考生由于英文水平较差,有时可能连题目的意思都无法完全理解。

第三,一些数学概念的中文表达我们非常熟悉,比如周长、等腰三角形、个位数字等,但是当这些概念用英文来表达时,我们却往往不知所云。

考生如果克服了以上三方面的原因,数学题还做不好,那么就要提高自己的数学知识了。在我担任 GRE 和 GMAT 教师时,深刻地感受到大部分文科考生的数学基础相对来说比较薄弱,数学考试对他们来讲有一定困难。这种情况对于 GMAT 学员更为突出,因为:

第一, GMAT 的考生大多数都是文科出身。

第二,许多考生因参加工作多年,已经把原有的数学知识忘得差不多了。

第三,尽管 GRE 和 GMAT 考试大纲基本一样,但是 GMAT 数学要比 GRE 数学难。

新东方的老师在课堂上为了要照顾大多数考生,基本上都是讲解考试中出现的一些难题,难以有充足的时间去系统讲解一些基本知识、列举一些由易到难的题目。市面上也很少有一本全面介绍 GRE、GMAT 数学知识的书推荐给考生。

笔者结合自己多年的教学经验和对机考的深刻认识,参照 GRE 和 GMAT 数学考试大纲编写了本书,并且对每一个考点的解释都比大纲详细得多,内容编写基本上是难易结合。本书也是市面上少有的综合阐述 GRE 和 GMAT 数学知识点的参考用书,不仅适合一般的文科考生备考使用,理工科考生也能够从中了解到许多知识。书中对于中国考生比较薄弱的章节,比如排列组合、概率、统计、正态分布、抽屉原理等考点都进行了详尽的叙述。毫不夸张地说,本书可以在短时间内使考生了解到 GRE 和 GMAT 数学考试的精髓,帮助广大考生取得一个满意的分数。

尽管本人已尽力确保本书的准确性,但因知识和能力有限,书中难免存在纰漏之处,欢迎各位读者不吝指正。联络信箱: dywh@xdf.cn。

吴 强

目 录

PART ONE: GRE & GMAT 数学题型介绍和解题技巧	1
第一章 GRE 数学题型介绍和解题技巧	1
第一节 Quantitative Comparison (数量比较题)	3
第二节 GRE 数学考试核心考点及中国考生常犯错误	9
第二章 GMAT 数学题型介绍和解题技巧	13
第一节 Problem Solving (问题求解题)	13
第二节 Data Sufficiency (数据充分题)	14
PART TWO: GRE & GMAT 数学综合知识	19
第一章 数论	19
第一节 数的概念	19
第二节 整数的正负性、奇偶性和质合性	26
第三节 因子和质因子	30
第四节 连续数及其性质	34
第五节 数的开方和乘方	37
第六节 数的除法和整除问题	40
第七节 最大公约数和最小公倍数	47
第八节 同余	48
第二章 比率和百分比	50
第三章 集合	55
第四章 排列组合和概率	63
第一节 计数	63
第二节 加法原理和乘法原理	65
第三节 排列	68

第四节 组合	71
第五节 概率	75
第五章 描述统计	85
第六章 正态分布	92
第七章 抽屉原理	96
第八章 代数	99
第一节 表达式和方程	99
第二节 一元二次方程	102
第三节 二元一次方程组	104
第四节 不等式	105
第五节 函数和运算自定义	109
第九章 数列	110
第一节 等差数列	110
第二节 等比数列	112
第三节 一般数列	114
第十章 几何	117
第一节 平面几何	117
第二节 立体几何	126
第三节 平面直角坐标系	130
第十一章 文字应用题	136
第一节 行程问题	136
第二节 工程问题	137
第三节 混合问题	139
第四节 利息问题	140
第五节 利润和折扣	141
第六节 文字几何题	142
第七节 一般常识	143
第十二章 最大值最小值问题	145
PART THREE: GRE & GMAT 数学模拟练习	148
Problem Solving Test One	148
Problem Solving Test One——Answers	154

Problem Solving Test One——Answers and Solutions	154
Problem Solving Test Two	158
Problem Solving Test Two——Answers	165
Problem Solving Test Two——Answers and Solutions	165
Problem Solving Test Three.....	170
Problem Solving Test Three——Answers	176
Problem Solving Test Three——Answer and Solutions	176
Quantitative Comparison Exercise and Answers	180
Data Sufficiency Exercise.....	189
Data Sufficiency Exercise——Answers	193
Data Sufficiency Exercise——Answers and Solutions	193
 附录: GRE & GMAT 数学分类术语表	 198
数论部分	198
代数部分 (algebra)	200
几何部分 (geometry).....	203
单位表达	206
文字应用	207

PART ONE

GRE & GMAT 数学题型介绍和解题技巧

第一章

GRE 数学题型介绍和解题技巧

GRE General Test 数学部分考查四方面的内容：

1. 算术 (*arithmetic*)
2. 代数 (*algebra*)
3. 几何 (*geometry*)
4. 数据分析 (*data analysis*)

GRE 数学测试学生以下几个方面的能力：

1. 掌握基本的算术技巧 (*basic mathematical skill*)
2. 理解基本的数学概念 (*understanding of elementary math concept*)
3. 熟悉数量推理 (*ability to reason quantitatively*)
4. 数学背景下解决问题的能力 (*solve problems in quantitative setting*)

GRE 数学考试中关于数字和图形的一些基本信息我们需要有所了解：

Numbers: All numbers used are real numbers; no imaginary numbers are used or implied.

(考试中出现的数都是实数，绝对不会有虚数出现。)

Figures: 1. Angle measures can be assumed to be positive.

(角度测量被假设为正角。)

2. Figures can be assumed to lie in a plane unless otherwise indicated.

(除非专门指出，否则图形被假设为在一个平面内。)

3. Figures that accompany questions are intended to provide information useful in

answering the questions. However, unless a note states that a figure is drawn to scale, you should solve these problems not by estimating sizes by sight or by measurement, but by using your knowledge of mathematics.

(伴随问题的图形是为解题提供有用信息。但除非图形被指出“drawn to scale”，即按比例画出，否则不能通过目测或者估计图形中的尺寸，而是应该根据相关的数学知识来答题。)

对于上面第三点的正确理解在考试中非常重要。我们通过几个例子来说明：

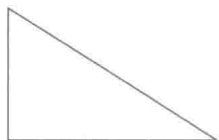


图 (1)



图 (2)

图(1)中是一个三角形。但是你绝对不能说它一定就是直角三角形。尽管其中有一个角看起来像直角，但是由于图中没有标明，我们不能根据目测认为它是直角。

对于 GRE 中的图形来说，图中画的是什么就是什么（比如图中画的是三角形，就绝对不能认为它是四边形）。但是我们不能够根据自己的主观意愿去估计图形中的尺寸、角度等数量的大小，除非图中已经明确标明“Drawn to Scale”。

例如图(2)中的三角形由于未给出判断信息，我们不能盲目地说它是钝角三角形，锐角、直角和钝角三角形三种情况都有可能。但是如果图(2)中明确标明“Drawn to Scale”，那么这个三角形一定是钝角三角形。

再例如下图(3)的平面直角坐标系中：

我们从图中读出点 A 落在第一象限内，那么点 A 就绝对不可能在 x 轴上或在 y 轴上，更不可能到其他象限中去。至于点 A 的横坐标和纵坐标我们无法知道其具体值。我们也无法判断点 A 的横坐标和纵坐标谁大谁小。

对于角度 x ，我们能够得到其范围 $0 < x < 90$ ，但是具体值是多少我们无法度量。

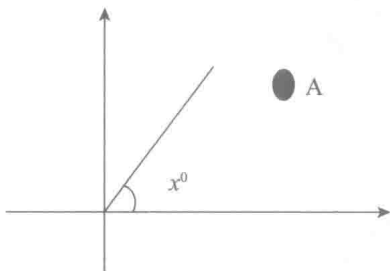


图 (3)

GRE 数学考试包括四类题型：

1. 数量比较题 (*Quantitative Comparison questions*)
2. 单项选择题 (*Multiple-choice questions—Select One Answer Choice*)

3. 多项选择题 (Multiple-choice questions—Select One or more Answer Choice)

4. 数字填空题 (Numeric Entry questions)

这四类题型所考查的知识点我们会详细阐述。Quantitative Comparison (数量比较题) 由于其考试形式的特殊性, 我们将专门介绍。

第一节 Quantitative Comparison (数量比较题)

A quantitative comparison question is a special type of math question in which you are asked to compare the relative values of two quantities. 我们首先来看一下数量比较题的形式:

例 1:

m, n, p are positive integers and $2mn = p$

Quantity A

m

Quantity B

p

(A) Quantity A is greater.*

(B) Quantity B is greater.

(C) The two quantities are equal.

(D) The relationship cannot be determined from the information given.

四个选项分别用 A、B、C、D 来表示, 我们在讲解的时候使用这四个字母来表示答案。

Quantitative Comparison Answers

Answer A (Quantity A 大于 Quantity B)

Answer B (Quantity B 大于 Quantity A)

Answer C (Quantity A 等于 Quantity B)

Answer D (Quantity A、Quantity B 两者无法比较)

比如例 1 中, 由于 $2mn = p$, 并且 m, n, p 都是正整数, 那么 $p > mn$, p 也一定大于 m , 即 Quantity B 大于 Quantity A, 选择 (B)。

Quantitative Comparison 题目往往考查考生两方面的能力:

1. reason quickly and accurately about the relative sizes of two quantities

(快速而又准确地推理两个数大小的能力)

2. perceive that not enough information is provided to make such a decision

(感知有没有足够信息判断两个数大小的能力)

* 由于在真实考试中, 凡涉及比较关系的题目选项均体现如上说法, 故全书练习部分对涉及此题型的选项均略。

在做 Quantitative Comparison 题目的时候,除了需要具有必备的数学知识外,还需要了解一些解题技巧和注意事项,这些在考试中会非常有用,下面列出了五点:

第一点:考生不要陷于冗长的演算,应尽量使用简洁的方法。强调速度和捷径。

因为仅仅是比较大小,能够分辨出谁大谁小就行,最终目的不是求出精确的数值。因此考生不要在计算两个数上浪费时间。许多题目在做进一步计算前,尽量看一下是否能够进行估算或者使用其他简洁的方法,使两个数能够比较。

避免冗长计算的方法之一是遇到一个题目,不要急于下笔计算,要先把两边的 Quantity 都认真看一下,观察两边的数是否会有一定的关系,从而简化运算。许多同学有这样的坏习惯,看完左边的 Quantity,如果是数字,就开始拼命计算;然后再去计算右边的 Quantity,从来不考虑两边数的联系。

例 2:

Quantity A

Quantity B

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + \frac{1}{96}$$

$$\frac{1}{20}$$

解:把 Quantity A 各项进行通分是比较笨的做法。分析两边的数,发现 $\frac{1}{20} = 5 \times \frac{1}{100}$,也就是可以认为 $\frac{1}{20}$ 是 5 个 $\frac{1}{100}$ 相加,这样和 Quantity A 中的各项一一比较。因为 $\frac{1}{99}, \frac{1}{98}, \frac{1}{97}, \frac{1}{96}$ 每一项都大于 $\frac{1}{100}$,所以 Quantity A 大于 Quantity B, (A) 为正确答案。

例 3:

Quantity A

Quantity B

$$\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$$

解: Quantity A 是 Quantity B 的倒数。对于倒数来讲有这么一条原理:

当数 $x > 1$, $x > \frac{1}{x}$, 比如 $20 > \frac{1}{20}$; 当 $0 < x < 1$, 那么 $x < \frac{1}{x}$, 比如 $\frac{1}{10} < 10$;

如果 x 是负数的话则刚好相反,

当 $-1 < x < 0$, 那么 $x > \frac{1}{x}$, 比如 $-\frac{1}{10} > -10$; 当 $x < -1$, 那么 $x < \frac{1}{x}$,

比如 $-2 < -\frac{1}{2}$;

现在 Quantity A 和 Quantity B 都是正数,根据上面的原理,只要看 Quantity B 和 1 的比较,如果 Quantity B 大于 1,那么就选 (B),否则选 (A)。

如果把 Quantity B 中的各项通分,最后当然能够求出具体的值。但从例 2 中我们知道没必要这么做。因为 $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}) < (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3})$, 也就是说 $0 < (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}) < 1$, 所以 Quantity A 要大于 Quantity B, (A)

is correct。

例 4:	<u>Quantity A</u>	<u>Quantity B</u>
	$\frac{335}{999}$	$\frac{110}{333}$

解: 根据估算, $\frac{335}{999}$ 要稍微大于 $\frac{1}{3}$, 而 $\frac{110}{333}$ 要稍微小于 $\frac{1}{3}$, 所以 (A) 为正确答案。

第二点: 某些时候数量比较题可以作为代数不等式来对待。

如果有必要, 计算时两边可以同时加减一个数、乘一个正数、对正数进行乘方、开方等运算, 这样做并不影响最后的结果。

例 5:	<u>Quantity A</u>	<u>Quantity B</u>
	$\frac{4}{5} - \frac{4}{7}$	$\frac{4}{7} - \frac{2}{5}$

解: 两个数都加上 $(\frac{2}{5} + \frac{4}{7})$, Quantity A 变为 $\frac{6}{5}$, Quantity B 变为 $\frac{8}{7}$, 两者继续都减 1, Quantity A 变为 $\frac{1}{5}$, Quantity B 变为 $\frac{1}{7}$, 当然选择 (A)。

第三点: 在做决定前要考虑所有可能的数字。包括正数、负数和零。

负数的乘法和乘方; 0 到 1 的数和大于 1 的数的乘方、开方以及除法之间的区别是考试中常设的陷阱。

数量比较题中经常出现一些变量, 有时可以用 0, 1 或 -1 等一些简单的数值来代入进行简单计算。当代入不同的数值, 得到不同的结果, 比如有些情况下是 Quantity A 大于 Quantity B, 有些情况下 Quantity B 大于 Quantity A, 有些情况下两者相等, 那么答案就必须选择 (D)。

例 6:	n is a positive integer	
	<u>Quantity A</u>	<u>Quantity B</u>
	$(-1)^{n-1}$	0

解: n 如果为 1, 那么 Quantity A 为 1, 大于 Quantity B。

n 如果为大于 1 的奇数, 那么 Quantity A 为 1, 大于 Quantity B。

n 如果为大于 1 的偶数, 那么 Quantity A 为 -1, 小于 Quantity B。

所以选择 (D) 无法比较。

例 7:

$$x^2 = 81$$

Quantity A

$$x$$

Quantity B

$$8$$

解: 对于这道题目, 许多同学想也没想就选择了(A), 因为 $9 > 8$, 按下 confirm 后才懊悔莫及。所以在做决定前一定要考虑所有的情况。 $x^2 = 81$, 那么 $x = \pm 9$, 一个大于 8, 一个小于 8, 所以无法与 8 比较大小, 选择(D)。

例 8:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$$

Quantity A

$$x$$

Quantity B

$$y$$

解: 这道题目也有许多同学上当, 既然 $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$, 那么 $x = 3, y = 5$, 所以选择(B), 但是这样做显然忘记了 x, y 可以为负数, 当 $x = -3, y = -5$ 时, 结果为 Quantity A 大于 Quantity B。所以两者结合起来考虑, 得到结果是(D)。

例 9:

Quantity A

$$(-6)^{36}$$

Quantity B

$$(-6)^{37}$$

解: 负数的偶数次方是正数, 奇数次方是负数, 所以选择(A)。

例 10:

$$xy < 0, yz < 0$$

Quantity A

$$xz$$

Quantity B

$$0$$

解: 题目中问的是 xz 的乘积和 0 的比较, 但是已知是 $xy < 0, yz < 0$, 如何得到 xz 呢? 可以通过把两个不等式相乘得到 $xy^2z > 0$, 由于 $y^2 > 0$, 所以 $xz > 0$, 选择(A)。

有些读者可能会说, 我一下子想不起来这么做, 我的做法是: 从 $xy < 0$ 中, 只能得到两种情况 $x > 0$ and $y < 0$ 或者 $x < 0$ and $y > 0$; 同样道理从 $yz < 0$ 也得到两种情况, 然后结合起来考虑 xz 的情况, 这样做远比上面的方法繁琐, 该怎么办呢。

我想在这里告诉大家, 本书除了阐述一些必考的知识点外, 还将就某一知识点的题目或者综合几个知识点的题目进行仔细讲解, 读完本书, 能够使你培养出简便答题的意识。

例 11:

$$\frac{x}{x-1} < 0$$

Quantity A

$$x$$

Quantity B

$$0$$

解：原不等式可以简化为两种情况：

1、 $x > 0$ and $x-1 < 0$, 得到 $0 < x < 1$;

2、 $x < 0$ and $x-1 > 0$, 得到 $x < 0$ 并且 $x > 1$, 无解。

综合 1 和 2 得到 $0 < x < 1$, 所以 (A) 为正确答案。

例 12:

$$n > 0$$

Quantity A

$$\frac{n^3 + 1}{n^2}$$

Quantity B

$$n + \frac{1}{n}$$

解：Quantity A 可以简化为 $n + \frac{1}{n^2}$, 两边都减去 n 得到 $\frac{1}{n^2}$ 和 $\frac{1}{n}$, 因此只要比较它们的大小。

当 $n > 1$, 显然 $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n}$, 当 $1 > n > 0$, 那么 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$, 所以选择 (D)。

例 13:

$$x^2 = y^2$$

Quantity A

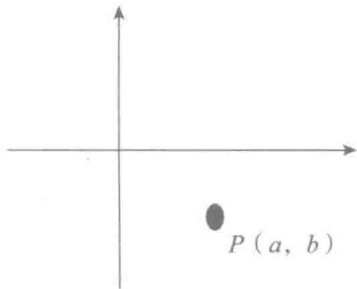
$$x$$

Quantity B

$$y$$

解：当然不能不加判断地就选择 (C), 因为完全可能 $|x| = |-x| = |y| = |-y|$, 需要考虑到正负之分, 因此 Quantity A 可能大于、等于或者小于 Quantity B, 答案为 (D)。

第四点：图形并不一定按比例给出，任何图形都不能仅仅根据表面来判断具体的长度、角度或者刻度等量的大小，必须根据题目中的已知信息来判断。



例 14:

Quantity A

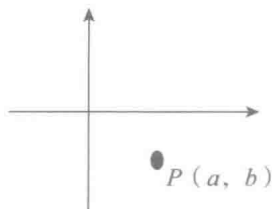
$$ab$$

Quantity B

$$0$$

解：从图中可以看出， P 明显是在第四象限，这个位置是确定的，是从图中读出来的，那么必然 $a > 0$, $b < 0$, $ab < 0$, 所以 (B) 为正确答案。

有些同学会说，你这种做法不对，假如 P 点的横坐标或纵坐标为 0, ab 不就等于零了吗？这种理解是错误的，既然我们已经从图中读出 P 点在第四象限，那么它就决不可能在 x 轴或者 y 轴上，更不可能在其他象限中，所以 ab 绝对不等于 0。



例 15:

Quantity A

$|a|$

Quantity B

$|b|$

解: 点 P 明显是在第四象限, 那么 $a > 0, b < 0$, 这是我们在上题已经得到的结果。但是对于 a, b 的绝对值来讲哪一个大呢? 稍微比划一下, 感觉上是等于。但是这么做是绝对不对的, 我们不能根据视觉上的判断来做题。点 P 在图中第四象限的什么地方我们是不知道的, a, b 谁的绝对值大, 我们不得而知, 所以选择(D)。

第五点: 要注意利用一些概念的性质灵活做题。

这些概念知识点将会在本书的第二部分详细阐述。

例 16:

n is a positive integer greater than 1

Quantity A

the greatest common divisor of $n+4$ and $n+5$

Quantity B

1

解: 既然 n 是大于 1 的整数, 那么 $n+4, n+5$ 必然是两个连续的正整数, 它们互质, 那么它们的最大公约数为 1, 所以选择(C)。

例 17:

Quantity A

The Standard Deviation of 1, 3,
5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

Quantity B

The Standard Deviation of 2, 4, 6,
8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

解: 如果做这道题目时把两边的值硬算出来的话, 显然是不明智的。我们仔细观察一下这两个数列, 第二个数列中的数对应项比第一个数列中的数都大 1, 那么根据标准方差的性质, 这两个数列的 standard deviation 完全相等, 所以选择(C)。

第二节 GRE 数学考试核心考点及中国考生常犯错误

一、GRE 数学的核心考点

GRE 的数学考试,主要包括以下内容:

1. Arithmetic (算术)

divisibility	可约性
factorization	因式分解
prime numbers	质数
remainders	余数
odd and even integers	奇偶数
arithmetic operations	算术运算
exponents	指数
radicals	根式
estimation	估算
percent	百分比
ratio	比率
rate	比例
absolute value	绝对值
the number line	数轴
decimal representation	十进制
sequences of numbers	数列

2. Algebra (代数)

operations with exponents	指数运算
factoring and simplifying algebraic expressions	因式分解和代数式的化简
relations	(代数)关系
functions	函数
equation	方程
inequalities	不等式
solving linear and quadratic equations and inequalities	解一次与二次方程及不等式
simultaneous equations and inequalities	解联立方程和不等式
setting up equations to solve word problems	列方程解数学题
coordinate geometry including graphs of functions, equations, and inequalities, intercepts, and slopes of lines.	坐标几何,也叫解析几何 包括函数的图像、方程、不等式以及截距和斜率。