

结构分析
有限元程序应用

JIEGOU FENXI YOUXIANYUAN CHENGXU YINGYONG

齐欣 李翠娟 孟庆成 ○ 编著

张外借



西南交通大学出版社

结构分析有限元程序应用

齐 欣 李翠娟 孟庆成 编 著

西南交通大学出版社

— 147 —

图书在版编目 (C I P) 数据

结构分析有限元程序应用 / 齐欣, 李翠娟, 孟庆成
编著. —成都: 西南交通大学出版社, 2019.3
ISBN 978-7-5643-6794-7

I. ①结… II. ①齐… ②李… ③孟… III. ①结构力学—有限元法—程序设计—高等学校—教材 IV.
①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 049633 号

结构分析有限元程序应用

齐欣 李翠娟 孟庆成 / 编著

责任编辑 / 姜锡伟

封面设计 / 何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行

(四川省成都市二环路北一段 111 号西南交通大学创新大厦 21 楼 610031)

发行部电话: 028-87600564 028-87600533

网址: <http://www.xnjdcbs.com>

印刷: 四川森林印务有限责任公司

成品尺寸 185 mm × 260 mm

印张 11 字数 272 千

版次 2019 年 3 月第 1 版 印次 2019 年 3 月第 1 次

书号 ISBN 978-7-5643-6794-7

定价 28.00 元

课件咨询电话: 028-87600533

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

本教材作为结构分析的入门书籍，是“结构力学”接续课程“结构分析与计算机程序应用”课程的教程教材之一，结合通用有限元软件 SAP2000 的 V17 版本，提供给读者 SAP2000 的基础知识、基本内容 and 应用，使读者能够应用 SAP2000 的前处理生成框架、壳体和实体模型，认识有限元中常见的基本概念及软件的常用求解设定，应用 SAP2000 对模型进行静力和动力分析，并观察后处理结果。

全书共有 7 章，每章介绍一个或几个主题。大部分的章节包括对所介绍主题的演示例题以及简短讨论。编著者尽量选择简单有效、注重实用、注重方法的实例，便于读者学习、比较和借鉴，且每个实例都给出详细的操作步骤。全书以注重基本概念、注重操作性和实用性为原则，即使读者没有很深的有限元理论基础，也可以读懂，并可以通过实际操作模型来逐步掌握结构分析技巧。

第 1 章从总体上介绍了常见的结构分析方法和常用的有限元计算程序；第 2 章详细介绍了有限元程序的基本原理、基本计算流程、计算方法以及计算机实现方法；第 3 章介绍了有限元程序结构分析中所涉及的单元及其特性；第 4 章对 SAP2000 程序进行了概述；第 5 章结合 SAP2000 程序详细介绍了常见结构（梁、刚架、拱、桁架、组合结构）的静力分析方法和计算流程；第 6 章介绍了梁、刚架等结构在移动荷载作用下的影响线绘制方法；第 7 章介绍了模态分析的基本操作方法。

在本书的编写过程中，西南交通大学土木工程学院结构力学教研室罗永坤、黄慧萱、蔡婧、马珩、江南等多位老师提供了大力的支持，在此对他们表示衷心的感谢！

限于作者的能力和水平，书中难免存在不足之处，欢迎读者批评指正。

编著者

2019 年 2 月

目 录

1 绪 论	1
1.1 结构分析	1
1.2 工程结构分析	1
1.3 有限元基本理论	2
1.4 有限元法应用特点	3
1.4.1 计算机辅助工程	3
1.4.2 CAE 主要版块	3
1.5 软件介绍	4
2 有限元法原理介绍	6
2.1 有限元法概述	6
2.2 结构离散化	7
2.2.1 离散化概念	7
2.2.2 离散化单元类型	7
2.3 单元位移函数的选取	9
2.3.1 选取位移函数	9
2.3.2 三角形单元位移函数	10
2.3.3 位移函数和形函数性质	12
2.4 分析单元	13
2.5 总刚集成	15
2.5.1 总刚度方程的建立	15
2.5.2 总刚矩阵的特点	16
2.6 求解等效节点荷载、处理约束	17
2.7 求解总体方程	17
2.8 杆系有限元	17
2.8.1 结构离散化	17

2.8.2	单元分析	18
2.8.3	坐标转换	20
2.8.4	总刚集成和总体方程求解	22
2.9	有限元法和矩阵位移法	22
3	结构分析单元功能及特性	24
3.1	坐标系统	25
3.2	单位系统	26
3.3	线单元	26
3.3.1	框架单元	27
3.3.2	预应力筋/束单元	31
3.4	面单元	32
3.4.1	板壳单元	32
3.4.2	平面单元	34
3.4.3	轴对称实体单元	36
3.5	体单元	37
3.6	连接单元	37
3.6.1	线性连接单元	38
3.6.2	多段线弹性连接单元	38
3.6.3	多段线性塑性连接单元	38
3.7	节点连接和边界处理	38
3.7.1	节点连接	39
3.7.2	边界处理	40
3.7.3	建模注意事项	40
4	SAP2000 基本介绍	41
5	常见结构的静力分析	44
5.1	连续梁的静力分析	44
5.1.1	多跨静定梁	44
5.1.2	弹性支撑连续梁	53
5.2	平面刚架静力分析	62

5.3	桁架结构的静力分析	89
5.4	单跨拱结构的静力分析	97
5.5	组合结构的静力分析	107
5.6	空间刚架的静力分析	114
	习 题	123
6	移动荷载作用的结构分析	130
6.1	移动荷载概述	130
6.2	影响线的定义	130
6.2.1	静力法作影响线	131
6.2.2	机动法作影响线	132
6.3	SAP2000 绘制影响线的基本步骤	132
6.4	SAP2000 绘制梁影响线	133
6.5	桁架的影响线绘制	145
	习 题	156
7	模态分析	158
	参考文献	167

1 绪 论

1.1 结构分析

在各种工程构造物中用以支撑和传递荷载的骨架部分称为结构。房屋建筑中的梁柱体系，土木工程中的桥梁，各种地下洞室及支挡，以及水利工程中的水坝、闸门等都是结构的典型例子。图 1-1 中的鸟巢以及重庆朝天门大桥都可称之为结构。

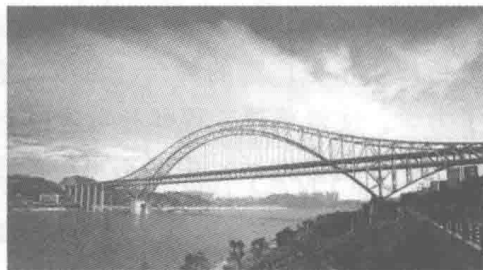
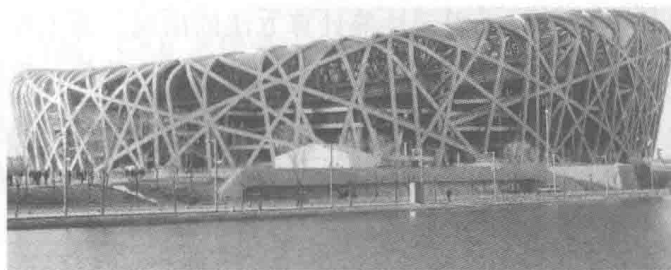


图 1-1 典型结构

人类早期的建筑更多的是从大自然中观察模仿和经验积累的产物。随着生产和技术的进步，人们对结构受力的规律，结构的强度、刚度和稳定性的认识不断加深，并从经验和试验中逐步形成了结构力学学科。通过广泛应用于工程建设实践，结构力学不断完善并成为一门指导工程建设的基础性科学。

结构分析是指用工程力学方法对结构进行分析，以检验结构是否满足规范规定的强度、刚度、稳定、尺寸等。结构分析方法与科学技术发展水平有着密切的关系，随着科学计算技术的发展而不断更新。在计算机出现之前，人们多以手算为主，他们将精力集中在如何构造一些巧妙的分析求解方法，既能解决问题，又不过于复杂，由此衍生了很多适用于不同情况的、有特色的求解技巧和方法。这些方法反映了结构力学分析中丰富的学术思想，但也暴露出受到计算手段的限制的缺陷，结构分析缺乏统一的、通用的分析计算方法。计算机出现后，计算手段的限制得到了解放，矩阵代数的方法有了用武之地，人们的注意力开始转向功能强大的计算机方法。

1.2 工程结构分析

步入 21 世纪，人类跨入信息时代，计算机技术无论从硬件还是软件上都在日新月异地发

展，信息化、数字化、网络化渗透在很多学科当中，也为很多学科提供了新的发展机遇。个人计算机的空前普及、计算技术的发展、计算机语言的更新换代，使计算机方法应用于经典结构力学中所有类型的问题，从而可进行精确的数值分析计算。工程结构分析也可称为数值模拟或者仿真计算（Numerical Simulation）。最早的仿真计算是用差分代替微分，将复杂的微分问题转换为代数问题，极大地简化了求解难度。

20 世纪 60 年代，有限元法（Finite Element Method, FEM）建立并取得了巨大的成功。它以经典牛顿力学为基础，为人们提供前所未有的能力：预测和理解复杂系统，模拟复杂的物理现象，利用这些模拟设计复杂的工程系统。它使力学这个古老学科成为对人类文明核心领域产生决定性影响的学科，对科学和技术已经产生了深远的影响。

20 世纪 70 年代，边界元法（Boundary Element method, BEM）建立。边界元法是在有限元法之后发展起来的一种精确高效的工程分析数值方法。与有限元法在连续体域内划分单元的基本思想不同，边界元法是只在定义域的边界上划分单元，用满足控制方程的函数去逼近边界条件。边界元法与有限元法相比，具有单元个数少、数据准备简单等优点。另外，有限条法、加权函数法、半解析半数值解法、离散元法、无限元法等计算方法的出现，为工程结构分析提供了更广阔的舞台，可以对更复杂的问题进行求解。从某种意义上说：数值计算解放了力学，使得普通工程师和学者也有机会从事复杂的力学分析。数值计算是工程结构设计、施工、科研与咨询活动中必不可少的手段。数值计算与实验互补，甚至可替代实验无法完成的工作。

1.3 有限元基本理论

有限元法是随着电子计算机的使用而发展起来的一种有效的数值计算方法。结构矩阵分析方法认为，整体结构可以看作是由有限个力学小单元相互连接而组成的集合体，每个小单元可以比作建筑中的砖瓦，通过分析单元获得的力学特性组装起来就提供了整体结构（建筑物）的力学特性。为什么要首先分析力学小单元的特性呢？为什么不能直接分析整体结构？人类的认识能力是有限的，多数情况下不可能一下子就弄清楚很复杂的东西，因此往往把复杂系统分解成形态较简单的单个元件（单元），通过研究其形态，再将这些元件重构为原系统得到整体形态。这是工程技术人员和科学家经常采用的分析问题的方法。

有限元法即表现出这种分析方法的特征。将一个物体划分成由多个单元（有限单元）组成的等价系统，这些单元以多个节点相互连接，或与边界线（或表面）相互连接，这个过程叫离散化。有限元法代替一次求解对应整体结构的问题，通过建立每一个有限单元的方程，并组合这些方程从而得出对应整个问题的解答。

电子计算机的出现和其性能的提高使得求解离散系统问题变得容易起来，即使对于连续系统，只要其离散单元的数目选择合适也是如此。工程中处理连续体问题的方法一般是将连续系统离散化，利用计算机进行计算处理。这种离散仍带有近似性，但当离散变量数目很大时，离散系统的分析结构可以逼近真实连续解。

1.4 有限元法应用特点

有限元法适应性强，应用范围广。有限元法可以用来求解工程中绝大多数的复杂问题，如复杂结构形状问题，复杂边界条件问题，非均质、非线性材料问题，动力学问题等。有限元法便于编制计算机程序，这是由于有限元法计算过程规范，可以充分利用数字计算机的优势。目前，国内外开发出了众多的通用有限元程序，比如 SAP 系列、ADINA、ANSYS、MARC、ABAQUS 等软件，可以利用这些商业软件进行数值分析工作。这些通用程序的编制与推广，给解决工程技术问题提供了极大的方便。

1.4.1 计算机辅助工程

计算机辅助工程 (Computer Aided Engineering, CAE) 技术的提出就是要把工程的各个环节有机地组织起来，其关键就是将有关的信息集成，使其产生并存在于工程的整个生命周期中。因此，CAE 系统是一个包括了相关人员、技术、经营管理及信息流和物流的有机集成且优化运行的复杂系统。随着计算机技术及应用的迅速发展，特别是大规模、超大规模集成电路和微型计算机的出现，计算机图形学 (Computer Graphics, CG)、计算机辅助设计 (Computer Aided Design, CAD) 与计算机辅助制造 (Computer Aided Manufacturing, CAM) 等新技术得以迅猛发展。CAD、CAM 已经在电子、造船、航空、航天、机械、建筑、汽车等各个领域得到了广泛的应用，成为最具有生产潜力的工具，展现了光明的前景，取得了巨大的经济效益。计算机辅助技术已经成为现代设计方法的主要手段和工具。

计算机辅助工程分析方法和软件是关键的技术要素之一。计算机辅助工程作为一项跨学科的数值模拟分析技术，越来越受到科技界和工程界的重视。许多大型的 CAE 分析软件已相当成熟并已商品化。计算机模拟分析不仅在科学研究中被普遍采用，而且在工程上也已达到了实用化阶段。

采用 CAD 技术来建立 CAE 的几何模型和物理模型，完成分析数据的输入，通常称此过程为 CAE 的前处理。同样，CAE 的结果也需要用 CAD 技术生成形象的图形输出，如生成位移、应力、温度、压力分布的等值线图，表示应用、温度、压力分布的彩色明暗图，以及随机机械荷载和温度荷载变化生成位移、应力、温度、压力等分布的动态显示图。

1.4.2 CAE 主要版块

(1) 前处理模块——实体建模与参数化建模，构件的布尔运算，单元自动剖分，节点自动编号与节点参数自动生成，荷载与材料参数直接输入、公式参数化导入，节点荷载自动生成，有限元模型信息自动生成等。

(2) 有限元分析模块——有限单元库，材料库及相关算法，约束处理算法，有限元系统组装模块，静力、动力、振动、线性与非线性解法库。大型通用题的物理、力学和数学特征，可被分解成若干个子问题，由不同的有限元分析子系统完成。一般有如下子系统：线性静力分析子系统、动力分析子系统、振动模态分析子系统、热分析子系统等。

(3) 后处理模块——有限元分析结果的数据平滑, 各种物理量的加工与显示, 针对工程或产品设计要求的数据检验与工程规范校核, 设计优化与模型修改等。

CAE 主要版块见图 1-2。

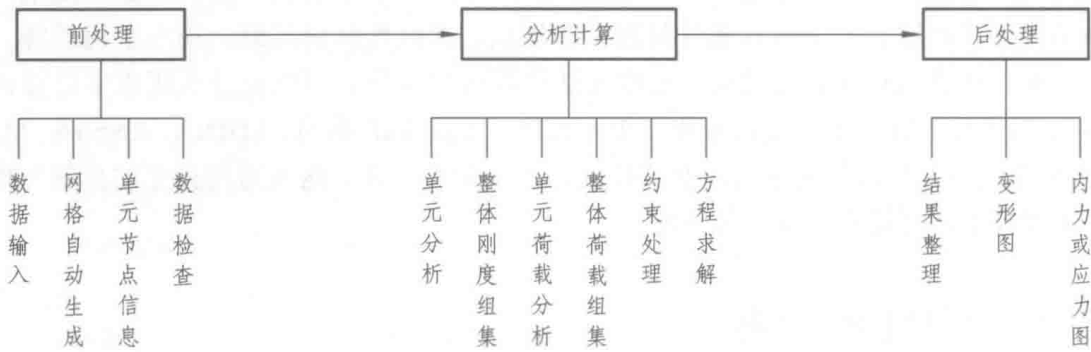


图 1-2 CAE 主要版块

随着我国科学技术现代化水平的提高, 计算机辅助工程技术也在我国蓬勃发展起来。政府的主管部门和科技界已经认识到计算机辅助工程技术对提高我国科技水平, 增强我国企业的市场竞争能力乃至整个国家的经济建设都具有重要意义。近年来, 我国的 CAE 技术研究开发和推广应用在许多行业和领域已取得了一定的成绩。但从总体来看, 我国的 CAE 技术研究和应用的水平还不能说很高, 某些方面与发达国家相比仍存在不小的差距; 从行业和地区分布方面来看, 发展也还很不平衡。

1.5 软件介绍

在土木工程领域, CAE 软件程序主要可分为两大类: 一类是可以针对各类工程结构物理、力学性能进行分析、模拟和预测、评价和优化, 甚至可以完成结构与流场以及结构与温度场的耦合计算分析, 以实现技术创新的软件, 称为通用 CAE 程序, 以 ANSYS、ABAQUS、MARC、ADINA 等程序为代表; 另一类则是面向实际工程使用的设计类 CAE 程序, 一般是以相关的结构设计规范为依据, 主要功能是对工程结构进行设计、验算、优化以及出图等, 其在建模能力、单元及材料类型的数量、边界形式的丰富性、非线性求解能力等方面较第一类 CAE 程序略显逊色, 但由于其具备较强的针对性和相对较低的理论门槛, 在设计行业拥有更为广泛的使用人群。

目前, ABAQUS、ANSYS、NASTRAN 等大型通用有限元分析软件已经引进我国, 在汽车、航空、机械、材料等许多行业得到了应用, 而且我们在某些领域的应用水平并不低。不少大型工程项目也采用了这类软件进行分析。我国已经拥有一批科技人员在从事 CAE 技术的研究和应用, 取得了不少研究成果和应用经验, 这使我们在 CAE 技术方面紧跟现代科学技术的发展。但是, 这些研究和应用的领域以及分布的行业和地区还很有限, 现在还主要局限于少数具有较强经济实力的大型企业、部分大学和研究机构。

我国的工业界在 CAE 技术的应用方面与发达国家相比水平还比较低。大多数的工业企业

对 CAE 技术还处于初步的认同阶段，CAE 技术的工业化应用还有相当的难度。这是因为，一方面，我们缺少自己开发的具有自主知识产权的计算机分析软件；另一方面，掌握 CAE 技术的科技人员大量缺乏。人才的培养需要一个长期的过程，这将对我国 CAE 技术的推广应用产生严重影响的一个制约因素，而且很难在短期内有明显的改观。提高我国工业企业的科学技术水平，将 CAE 技术广泛应用于工程分析的全过程还是一项相当艰巨的工作。

定性和定量是相辅相成的两个方面，许多解题方法和简化算法是以反映结构性态本质的定性知识为基础的，许多定性概念则往往是在多次定量计算中重复出现后才被总结出来的，这就要借助计算机高速运算的功能来完成。也就是说，定性分析与计算机应用——理论—实践—而后形成规律的过程，是从假说或猜想中产生再经过试验或理论推演以证明其正确与否的过程。

同时，数值方法的弱点是就事论事，且计算机程序对应用者而言具有黑箱效果，所以工程师要善于对结构的性态作定性分析和近似估算，以便对计算机提供的数值成果的可靠性给出应有的评价。由此可知，结构受力的定性分析与计算机方法是现代结构力学中密不可分的两个方面。

2 有限元法原理介绍

2.1 有限元法概述

有限元法是将弹性力学、计算数学和计算机软件相结合从而求解非线性问题的现代计算方法。它的实质是将结构划分为有限多个简单的单元，通过化整为零，再集零为整的思想对复杂问题进行求解。

在求解工程技术问题时，许多力学问题无法求得解析解，因此通过寻求近似解法来给出数值解答。力学中常用的数值解法为有限差分法和有限元法。

有限差分法是首先建立问题的基本微分方程，然后将微分方程化为差分方程（代数方程）求解，这是一种数学上的近似。有限差分法能处理一些物理机理相当复杂而形状比较规则的问题，但对于几何形状不规则或者材料不均匀以及复杂边界条件的情况，应用有限差分法就非常困难，因而有限差分法有很大的局限性。

有限元法把一个连续体划分为有限个微小的单元，单元体通过节点连接，从而把一个具有无限个自由度的连续体简化为有限个自由度的近似数学模型，从而进行类似于结构分析的求解。

有限元法具有以下特点：

（1）以简单逼近复杂，即把原本复杂的求解区域离散为一个一个的单元，在简单的单元中建立公式，然后再合成一个总体，由此逼近真实解。

（2）采用矩阵形式表达，便于编制计算机程序。

（3）适合求解几何形状复杂的问题。

（4）适应性强、运用范围很广，从弹性力学平面问题到空间问题、板壳问题，从静力平衡问题到动力分析，从固体力学到流体力学，从航空问题到土木工程、机械制造，等等。

有限元法应用范围主要包括线性静力分析、动态分析、热分析、流场分析、电磁场计算、非线性分析、过程仿真。

利用有限元法进行分析计算一般分为三个步骤：

（1）对结构进行离散。离散就是将一个连续的结构划分为有限个单元，从而使连续体转换为由有限个单元组成的组合体。单元与单元之间仅通过节点连接。也就是说，一个单元上的力只能通过节点传递到相邻单元。一般来说，单元划分越细，计算越精确，但计算量越大。因此，有限元分析中的结构已不是原来的结构，而是具有同种材料，由许多单元以一定方式连接起来的离散体。

（2）进行单元分析，其主要目的是建立单元刚度矩阵和单元特性方程。单元分析包括下

面三个内容：

① 确定单元的位移函数。

对于位移型有限元法，单元的位移方法就是将单元中任意一点的物理量如位移、应力、应变等用单元的节点位移来计算，而单元位移可以表示成节点位移的函数。位移函数选取是否合理，直接影响到有限元分析的可靠性、计算精度以及效率。

② 分析单元的力学特性。

在建立了单元的位移函数后，就可以根据几何方程和物理方程求得单元应力和应变。根据应力、应变、位移之间的关系，利用虚位移原理或最小势能原理，建立单元杆端力和杆端位移之间的关系，从而得到单元刚度矩阵。

③ 计算等效节点力。

结构离散化后，将力等效为通过节点从一个单元传递到另一个单元。但在实际的连续体中，力是从单元的公共边界传递的，因而这种作用在单元边界上的表面力、体积力或集中力都需要等效地移到节点上去，也就是用等效的节点力来代替所有作用在单元上的力。

(3) 进行整体分析。

确定每个单元的单元刚度方程后，可以将各单元集成整体结构进行分析，建立起表示整个结构的整体刚度方程。然后引入结构的边界条件，对方程组进行求解，得到节点位移。再采用选定的节点位移，计算各单元内非节点处的应力和变形。

本章将以平面应力问题的静力分析为例介绍有限元的基本概念和原理。

2.2 结构离散化

2.2.1 离散化概念

结构离散是进行有限元分析的第一步，即把实际问题的整体求解分割为有限个基本单元，单元与单元之间仅通过节点连接，一个单元的力只能通过节点传递给另一个单元。可以通过有限个互不重叠的线段、三角形、四边形或多面体来分割求解区域。拆分单元数量越多，拆分越细，则越逼近原连续体的求解域。

从几何上看，外形复杂的结构采用传统的力学知识无法进行求解，采用简单的单元划分，可以逼近原连续体的求解域；从数学意义上来看，一个连续域可以拆分为有限个子域，每个子域的场函数只包含有限个参数的简单场函数，用这些子域的场函数的集合就能近似代表整个连续域的场函数。

2.2.2 离散化单元类型

用于离散求解区域的单元类型大致包含以下几类：

(1) 一维线性单元，如图 2-1 所示。

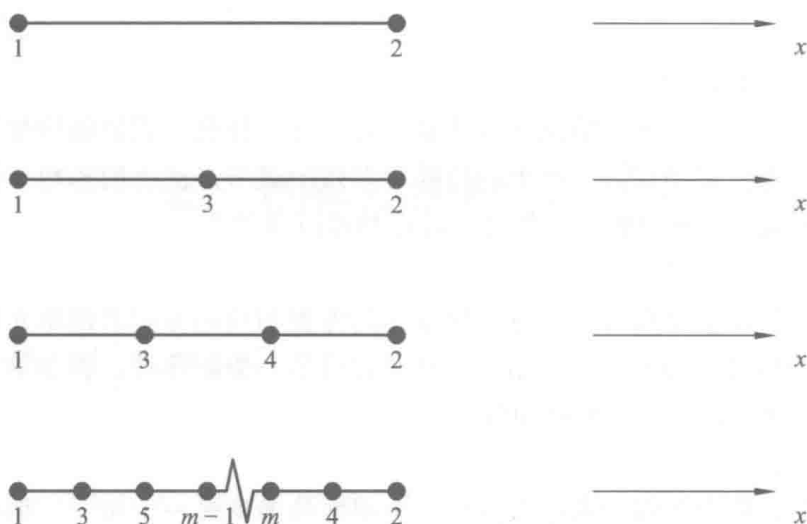


图 2-1 一维线性单元

(2) 平面问题常用单元为 3 节点三角形单元，这是最简单且运用最广泛的单元类型，如图 2-2。此外还有 6 节点和 10 节点三角形单元。除了三角形单元，平面问题单元还有长方形和一般四边形单元。

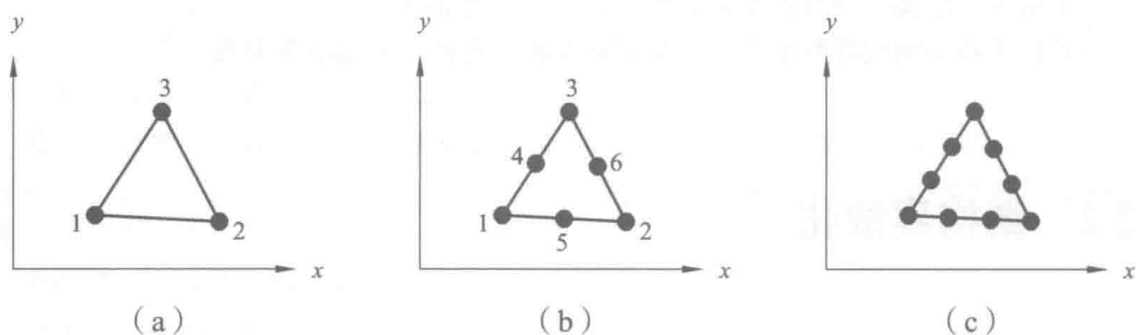


图 2-2 三角形单元

(3) 三维单元有四面体单元和正六面体单元，如图 2-3。

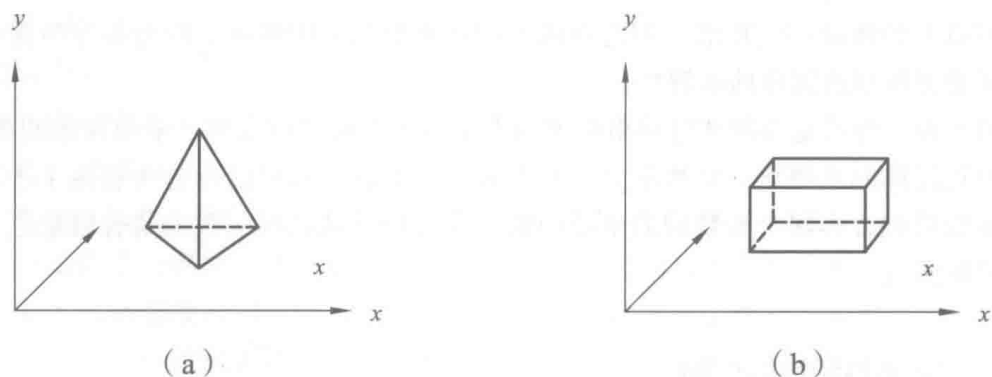


图 2-3 四面体单元和正六面体单元

图 2-4 是将一平面结构划分为 3 节点三角形单元的过程。

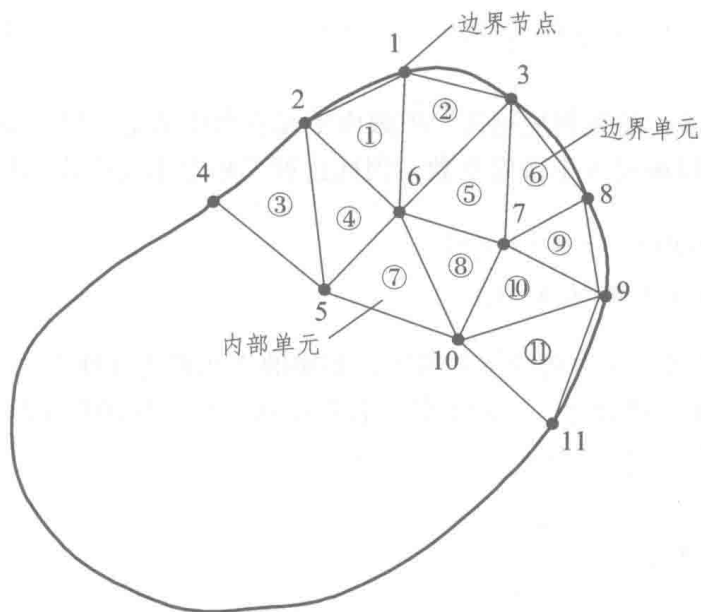


图 2-4 单元划分

2.3 单元位移函数的选取

2.3.1 选取位移函数

采用有限元法分析实际问题的第二步是选择单元位移函数。求解区域离散化后，重点是分析单元的力学特性，也就是确定单元节点力和节点位移之间的关系。首先要对单元的场变量分布作一定的假设，假设位移是坐标的某种函数，这种函数也就是位移函数。

以平面问题中的三角形 3 节点单元为例，单元内的位移分布是关于 x 和 y 的函数，由于三角形有 3 个节点，每个节点有两个位移（ x 和 y 方向），因此总共有 6 个自由度。在有限元中，当单元划分得足够小时，把位移函数设定为简单的多项式时就可以获得相当高的精度，因此三角形 3 节点单元的位移函数可以写成具有 6 个待定系数的多项式。

在假定位移函数时，必须遵从以下两个要求：

- ① 它在节点上的值等于节点位移。
- ② 它所采用的函数必须保证有限元解收敛于真实解。

对于平面问题，位移函数的一般形式为多项式（2-1）：

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + L + \alpha_m y^n \\ v(x, y) &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+3} y + \alpha_{m+4} x^2 + \alpha_{m+5} xy + \alpha_{m+6} y^2 + L + \alpha_{2m} y^n \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式中 $m = \sum_{i=1}^{n+1} i$, $\alpha_1, \alpha_2, L, \alpha_{2m}$ 为待定系数，也称广义坐标。因此，位移函数的这种描述称为广义坐标形式。

2.3.2 三角形单元位移函数

多项式的项数越多，逼近精度越高。项数由单元自由度决定，以 3 节点三角形单元为例，它有 6 个自由度，可以确定 6 个待定系数，因此这种三角形单元位移函数为：

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

式 (2-2) 为线性多项式，称为线性位移函数，相应的单元称为线性单元。

由于节点 i 、 j 、 m 在单元上，它们的位移自然也就满足位移函数 (2-2)。设 3 个节点的位移值分别为 (u_i, v_i) 、 (u_j, v_j) 、 (u_m, v_m) ，如图 2-5。

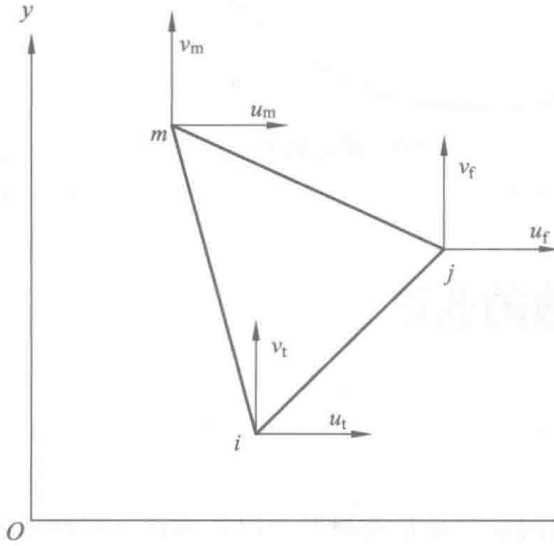


图 2-5 三角形三节点单元

将节点位移和节点坐标代入式 (2-2) 得 (以第一个方程为例)：

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

式 (2-3) 中共有 3 个方程，可以求出 3 个待定系数：

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_j y_m - x_m y_j) u_i + (x_m y_i - x_i y_m) u_j + (x_i y_j - x_j y_i) u_m] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(y_j - y_m) u_i + (y_m - y_i) u_j + (y_i - y_j) u_m] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_m - x_j) u_i + (x_i - x_m) u_j + (x_j - x_i) u_m] \end{aligned}$$

式中 $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$ 为三角形单元的面积。