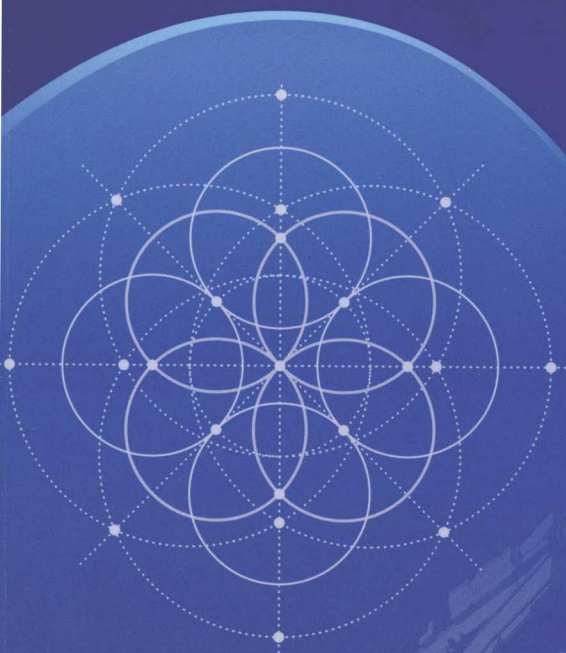


数学的理性文化

韩祥临 编著



科学出版社

数学的理性文化

韩祥临 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书紧紧围绕数学的理性探索精神，深入浅出地介绍了数学的理性文化。正文内容共 8 章，包括数学文化概论、常量数学文化的源流、数学文化的革命——变量、现代数学文化的新飞跃、数与数字的文化、数学工具的文化意义、从数学家看数学精神、从李约瑟难题谈中国数学。

本书可作为高校数学文化、数学史、文科数学、数学与人类文明等课程的教材，也可作为高校教师及中学教师的教学参考书以及广大数学爱好者的业余读物。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学的理性文化 / 韩祥临编著. —北京: 科学出版社, 2019.3

ISBN 978-7-03-060349-4

I. ①数… II. ①韩… III. ①数学-文化 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 300754 号

责任编辑: 胡海霞 / 责任校对: 张凤琴

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京九州迅驰传媒文化有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 3 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2019 年 3 月第一次印刷 印张: 12 1/2

字数: 252 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

数学是一门研究数量、结构、空间和变化的科学。它自成体系，又是其他科学与技术的框架、基础和工具，同时也是一种理性思维方式和国际通用语言，因此，它是一种优秀的文化。从其外部看，它既是有关秩序的科学和应用广泛的科学，又是决策和行动的工具，它反映出了社会现象与自然现象在数量关系或几何关系上的某些有序性、规律性或共同特征，并可用数学表达式或几何图形来表述，用数学知识来推演、证实和预测。于是，数学变成了自然科学和社会科学发展与完善的基础、载体和纽带。从其内部看，数学既是一门纯科学，又是一门美学艺术，既能培养正直、诚实和坚韧的良好个性品质，又是人类文明的精髓——理性探索精神的象征。也正因如此，一个国家的数学研究水平和数学教育水平是不可替代的资源，是这个国家综合实力的重要组成部分，从这个意义上说，一个没有现代数学的文化是注定要衰落的。今天，数学已成为现代教育最重要的学科。所以说，数学事业是一桩伟大的事业，数学文化是人类先进的文化，数学精神是人类文明之魂。

目前，各高校纷纷开设数学文化通识课或选修课，并开设数学史、数学与人类文明等相关课程。各中小学校的数学校本课程和活动课程中，也纷纷将数学文化作为其重要内容之一。这些充分体现了我国教育对数学文化的高度重视。正是在这种大背景下，作者在近几年数学文化的教学经验和专题讲座的基础上，写了这本书。本书重点围绕数学的理性文化，编写和安排如下：

首先是讲清楚数学的文化意义。本书在第1章重点阐释“数学是文化”以及“数学与文化”，通过对数学特征和本质的论述，说明数学文化的内涵；诸多实例的分析也体现了数学的价值，特别是对人类文明发展与进步的价值。

其次是给读者展示数学文化的全貌。一是本书在第2章，以古希腊、古代中国、古代阿拉伯和17世纪以前的欧洲为代表，阐述初等数学产生和发展的过程以及其中的数学思想方法，并归纳总结《几何原本》等四部数学名著的精髓；二是在第3章，通过对变量数学的分析，阐明以解析几何和微积分为代表的近代数学产生、发展与成熟的概况，指出变量数学对人类第一次技术革命和人类数学认识的重要作用；三是在第4章，通过讲述现代数学的概貌以及非欧几何、公理化运动、哥德尔不完备性定理，展示现代数学文化的新飞跃。贯穿这三章的

主要线索是数学的理性探索精神。

再次是“解剖麻雀”，加深读者对数学理性文化的认识层次和认识深度。笔者用 5, 6, 7 三章抓住数、数学工具和数学家这三个关键点，层层展开，深入分析并挖掘数学的理性精神、影响数学文化的因素以及数学家身上的优秀品质。

第 8 章是本书的终结。笔者把数学文化的落脚点放在中国未来数学发展和未来数学教育上，以数学史和数学文化为镜，分析和探讨了数学文化对我们的教益，力图为今后的数学研究和数学教育提供一定的参考或借鉴。

在本书的编写出版过程中，湖州师范学院给予了经费支持；韩笑做了大量的文字和图片处理工作；科学出版社胡海霞编辑为本书的出版付出了很多心血。本书参考和引用了许多刊物和网络上的相关资料，书末列有主要参考文献，其余请恕未能一一列举。在此谨向所有支持本书写作与出版的单位和个人致以诚挚的感谢！

书中如有不当之处，恳请读者批评指正。

韩祥临

2017 年 7 月写于湖州

前言

第 1 章 数学文化概论	1
1.1 数学的特征	1
1.2 数学的本质	6
1.3 数学的价值例析	11
第 2 章 常量数学文化的源流	29
2.1 充满理性的古希腊数学文化	29
2.2 独树一帜的中国传统数学文化	40
2.3 继承与创新并举的阿拉伯数学文化	50
2.4 大器晚成的欧洲数学文化	54
2.5 唤醒人类理性的《几何原本》	61
2.6 促成中国传统数学的《九章算术》	67
2.7 引领代数发展方向的《代数学》	69
2.8 创造时代辉煌的《数书九章》	71
第 3 章 数学文化的革命——变量	77
3.1 第一次技术革命的基础——近代数学的创立和发展	77
3.2 数学理性的深化——近代数学的成熟	79
3.3 人类数学思想的第一次大转变——解析几何	82
3.4 人类理性的新时代——微积分的创立与发展	86
第 4 章 现代数学文化的新飞跃	102
4.1 现代数学文化的发展历程	102
4.2 人类认识上的大转折——非欧几何	109
4.3 希尔伯特对几何的重建——公理化运动	114
4.4 数学公理化理想的破灭——哥德尔不完备性定理	116
第 5 章 数与数字的文化	118
5.1 整数是从哪里来的	118
5.2 为什么会产生有理数与无理数	125
5.3 计算技术的新发明——十进制小数	129

5.4	理性又一次战胜感性——复数的发现	130
5.5	数字之美	132
5.6	大数之幽	136
第6章	数学工具的文化意义	139
6.1	欧几里得作图工具的意义	139
6.2	早期的计算工具——算盘对数学的推动	143
6.3	计算工具的革命——计算机的产生	144
6.4	科学发展的必需——计算机科学的产生	149
6.5	意想不到的变化——计算机改变着数学文化	150
第7章	从数学家看数学精神	152
7.1	通才数学家阿基米德与莱布尼茨	152
7.2	自学成才的数学家费马与华罗庚	156
7.3	在单亲家庭中成长的数学家笛卡儿与牛顿	160
7.4	人穷志坚的数学家黎曼与阿贝尔	163
7.5	德才兼备的数学家欧拉与希尔伯特	166
7.6	一代女杰埃米·诺特与科瓦列夫斯卡娅	171
7.7	王者风范高斯与陈省身	175
7.8	理性的化身陈景润与安德鲁·怀尔斯	179
第8章	从李约瑟难题谈中国数学	184
8.1	中国传统数学文化的世界意义	184
8.2	从文化的视角理性认识李约瑟难题	186
8.3	数学文化对我们的教益	187
8.4	未来中国数学刍议	191
	参考书目	193

文化是人类所创造的物质财富和精神财富的总和。而数学是人类抽象思维的产物，是以数学科学为中心，被数学的理论、思想、方法、精神、技术等所辐射的相关领域（包括自然科学、社会、经济、政治、文化、哲学、宗教、军事等）为有机组成部分的动态系统，它关注的核心问题是宇宙的本质和人类自身，因此数学是文化。数学先把人或事物数学化，然后再用数学知识认识并改造世界，这正是人类文化或人类文明的一个重要特征，今天它已经成为人类文明发展与进步的重要标志。

数学文化包括两个方面，一是数学在人类文化中的地位，即数学是文化，表达的是数学观；二是数学在人类文化中的作用，即数学与文化，指的是数学的价值。前者属于数学在文化分类中的归属问题，我们通过分析数学的特征和本质来进行论述和说明，后者则属于数学在人类文化中的价值问题，我们通过各种实例来予以分析和论证。

1.1 数学的特征

1.1.1 一种理性的探索精神

数学的精髓是理性的探索精神，这种追求真理的精神是人类文明进步的源动力之一，是人类文明之魂。它不仅激励着从事数学的人们心甘情愿地奉献自己于这项事业，而且鼓舞着人们追求真理、追求至善、追求完美，推动着整个人类的进步与完善。

可以说，数学是人类理性发展的最高成就。数学作为人类文化或文明的一部分，其最根本的特征是它表达了一种理性的探索精神。虽然数学的出现最初是为了满足人类物质生活的需要，但是离开了这种探索的精神，数学是无法满足人类日益增长的物质需要和精神需要的。举例来说，哥德巴赫猜想（简称“ $1+1$ ”）从 1742 年提出，不知经过多少人的努力，到 1966 年才由陈景润（1933—1996）（图 1.1）解决了“ $1+2$ ”，为了化简这个证明，陈景润就花了整整 7 年的时间，而原问题迄今仍未解决。费马大定理在大约 1637 年由法国数学家

费马（1601—1665）提出，经过许多数学家三百多年的不断探索，才于 1994 年由英国数学家安德鲁·怀尔斯（1953—）（图 1.2）最终证明。



图 1.1 陈景润

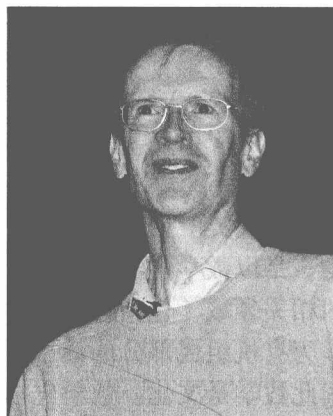


图 1.2 怀尔斯

类似这样的例子在数学中可以举出很多。这些问题在外行人看来都与实际生活没有太大关系，又何必花那么多精力去研究它们呢？原来，是数学的理性探索精神使然！我们之所以称这种精神是人类文明的精髓，就是因为它抛弃了功利、忘掉了自我，一心追求真理。从欧几里得（约公元前 3 世纪）（图 1.3）告诫学生学习数学不要追求实惠，到阿基米德（公元前 287—前 212）在思考数学问题中去世，从牛顿（1642—1727）给出第一个完整的科学宇宙理论，到罗巴切夫斯基（1792—1856）（图 1.4）用生命捍卫非欧几何，这些都是数学理性探索的典型实例。



图 1.3 欧几里得

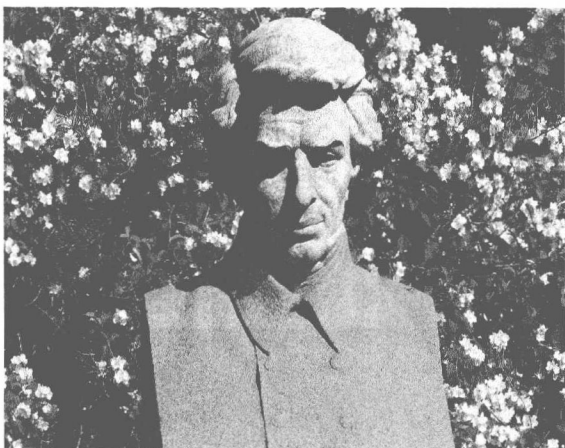


图 1.4 罗巴切夫斯基

然而，还有更多的数学研究工作者，他们把一生都无私地奉献给数学，却因未能取得突出的成绩而默默无闻。这些人同样值得我们敬仰，因为他们身上散发着的同样是数学的理性探索精神。

牛津大学法律系和美国西点军校看似与数学无关，但它们都开设数学课程，就是因为他们重视这门课的品质，即数学能使人杜绝偏见，客观公正，坚持原则，忠于真理，不屈服于权贵和不迷信权威，使人具有独立的人格，而不仅仅是数学知识本身。这正是数学的理性所在。

那么，什么是理性呢？所谓理性是基于现有的条件和基础，通过合理的思维和逻辑分析，进而得到确定的结果或是给出应该采取正确行动的方案。理性与感性相对，它使人们在处理问题时，按照事物发展的规律和自然进化原则来考虑问题，处理事情不冲动，不凭感觉做事。理性的特点是冷静的态度、全面的认识、详细的分析、后果的预知、有自信与勇气。真理的本性即为理性，因此人对真理的探究结果产生理性，即理性来源于对宇宙真理的探索。数学的理性包括客观理智的态度、精确定量的表达、批评开放的精神和抽象超验的思维。从泰勒斯（约公元前 624—前 546）给出人类历史上第一个数学证明，到欧几里得（公元前 3 世纪）创造出人类历史上第一个公理体系，从牛顿写出《自然哲学的数学原理》，到哥德尔（1906—1978）给出不完备性定理，都是理性探索的结果。

1.1.2 一些完全确定、完全可靠的知识

数学知识是人类文明的重要组成部分，又是人类文明进步的基础和阶梯。数学知识具有概念的抽象性、论证的精确性、结论的肯定性和应用的广泛性。

在数学发展的历史上，欧几里得的《几何原本》，阿基米德的《方法论》（约公元前200），阿波罗尼奥斯（约公元前262—前190）的《圆锥曲线论》（约公元前225），中国的《九章算术》（约公元前100），阿尔·花拉子米（约780—850）的《代数学》（约9世纪），秦九韶（约1202—1261）的《数书九章》（1247），笛卡儿（1596—1650）的《几何学》（1637），牛顿的《自然哲学的数学原理》（1687）（图1.5），欧拉（1707—1783）的《无穷小分析引论》（1748），希尔伯特（1862—1943）的《几何基础》（1899），高斯（1777—1855）的《算术研究》（1801）等，都是数学知识的优秀载体。

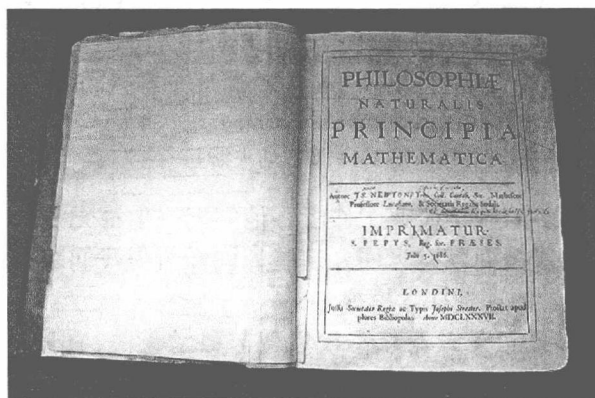


图 1.5 《自然哲学的数学原理》

数学知识的灵魂是数学思想方法。数学首先建立明确的概念、公理或定理，然后建立模型、给出明确无误的推理规则，如此就可以得到正确无误的结论，并在认识数学自身、认识自然和认识宇宙上能够达到确定无疑的程度。数学家坐在办公室里，通过纯粹的数学推导，竟然可以认识世界，真是太神奇了！正因如此，数学思想方法是人类认识数学、认识宇宙和认识人类自己的基本准则，这其中最为突出的是公理化方法。

1.1.3 一旦被正确应用就立刻产生秩序的科学

有了数学，在一切纷乱中马上就出现有序。数学用简洁又特殊的语言传播人类思想，让人们看到了宇宙的根本规律表现为一种抽象的、数学味很浓的设计图，而这种语言在其发展过程中逐步成为一种世界性语言。通过这种语言，数学给世界理出了秩序。正如科学家爱因斯坦所说：“为什么数学比其他一切科学受到特殊尊重，一个理由是它的命题是绝对可靠的和无可争辩的，另一个理由是数学给予精密自然科学以某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的。”笛卡儿的话也表达了同样的含义：“数学是知识的工具，

亦是其他知识工具的源泉。所有研究顺序和度量的科学均和数学有关。”

从科学史来看，人类一直存在一种“还原”倾向：把复杂的现象归结为一些最简单的最原始的因素及其相互作用，进而从中理出秩序，这种倾向人们称之为分析——它仍然依靠数学，当代数学的发展越来越证实了这一点。数学中的简洁美、对称美、和谐美都说明了数学的上述特性（图 1.6）。难怪有人说，世界上有两种通用语言，一种是艺术，它是美的语言；另一种是数学，它是秩序的语言。

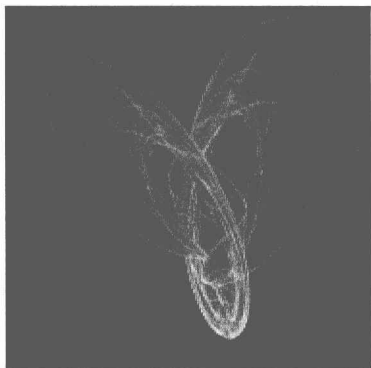


图 1.6 美丽的数学曲线

1.1.4 在不断纠错中螺旋式上升的开放式科学

人站在地面上，不可能自己提着自己的耳朵就离开地面。但数学不同，数学在研究宇宙的同时，它又研究自己的局限性，它能以开放的胸怀包容一切，不断地指出自己的错误，并不断理性地修正自己、提高自己。数学经常进行自我反思、自我评判，它从来不怕自己否定自己，由此数学在不断纠错、不断创新中开辟了自己前进的道路。从万物皆数（有理数）到无理数，从欧氏几何到非欧几何，从牛顿的无穷小到严格的微积分，从有限集到无限集的分类（图 1.7），都充分说明了这一点。

数学一直在不断发展、不断完善之中。F. 克莱因（1849—1925）（图 1.8）对几何学的统一，布尔巴基学派对数学的重建，希尔伯特的公理化运动，哥德尔不完备性定理的提出等，都是数学自我完善的实例。这种自我调节方式不但

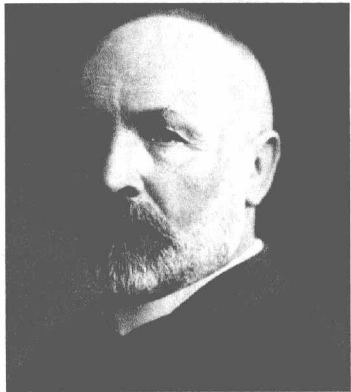


图 1.7 集合论的创始人康托尔



图 1.8 F. 克莱因

没有影响数学本身，反而进一步增强了数学的稳定性和可持续性。这种理性文化对今天的教育也很有指导意义：开放包容、允许犯错、敢于认错、勇于改错。

1.2 数学的本质

1.2.1 一门纯科学

这是对数学的理论和基础而言的。纯数学是以数学的内部矛盾或内部问题为推动力，主要研究数量、结构、变化以及空间模型等概念，在中小学范围内，数学主要是研究现实世界的空间形式和数量关系。数学具有独特的语言系统和符号系统，并具有抽象性、严谨性、广泛应用性、研究对象的多样性和内部的广泛统一性的特点。它来源于实际并应用于实际，但独成体系，可以独立于实际而自由发展。有人称数学是思维的体操，就是因为它是一门纯科学、一门能锻炼和提高人的思维能力的纯科学。许多人怕数学主要是因为数学独特的语言系统和符号系统（图 1.9），以及数学的抽象性和严谨性，而这是纯数学的特性。19 世纪末至 20 世纪初，在数学基础的研究中形成了三个唯心主义学派：直觉主义、形式主义和逻辑主义。这三个学派分别把数学看成是直觉创造、形式推导和演绎逻辑，并各执己见，相持不下。这主要说明了数学的纯科学的一面。

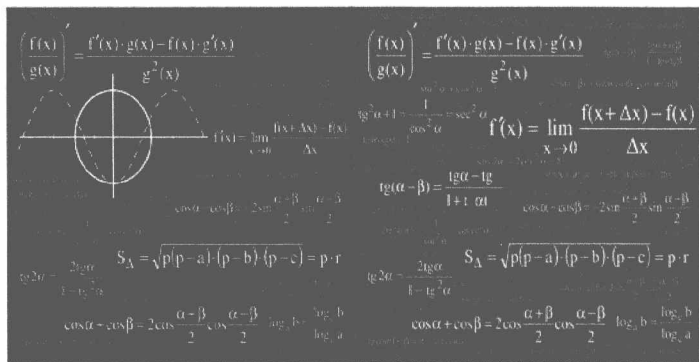


图 1.9 符号化的数学

纯数学给人的主要感觉是抽象。一个圆可以是木质的、铁质的、铜质的，但在数学中我们常常抛弃其物质属性，研究一般性的圆的几何关系和数量关系，这就是抽象。把这种抽象的圆的性质研究透彻之后，反过来就可以广泛应用于现实生活中的各种圆，无论是木质的还是铁质的均可。所以，数学虽然看似抽象，但它是从现实世界中的许多具体问题或事物中抽象出来的，并不是凭空掉下来的，并且迟早会在实际中得到应用。如果理解了这一点，我们就会感

到数学并不神秘，也不可怕。

1.2.2 一门应用科学

提到应用，人们往往想到应用数学。所谓应用数学是指数学的价值和能力外化的部分，它是以数学外部的需求为主要推动力的。例如金融数学、生物数学、寿险精算、保险统计学、运筹学与控制论等都属于应用数学，而信息论、信息技术、生命科学、能源科学、材料科学、环境科学、经济与金融、社会科学等都与数学紧密相连。其实，应用数学与纯数学没有明确的界限。在科学技术不断发展和应用的今天，破译密码需要代数与数论，飞机和汽车设计需要流体力学方程，金融和股票预测需要随机分析，通信和信息安全需要离散数学，资产投放需要最优化方法，天气预测和仿真需要并行计算，实验设计和资料分析需要统计学，图像处理技术需要数学模型，这些都是数学应用的实例（图 1.10）。

即使纯数学也有非常广泛的应用。例如，数学分析中的傅里叶变换在滤波、电力系统的监控等信号分析领域有广泛的应用。复变函数看似理论性很强，但它的应用极其广泛，譬如流体力学、固体力学、航天航空、电气工程等领域都有它的身影。实变函数则在经济学等注重数据分析的有关领域有重要应用。线性代数之所以是理工科专业学生的必修课，就因为它几乎在所有领域都有应用，像医学、会计、电子信号、数据结构、经济分析、程序算法、机械设计、自动控制、电子电路等都必须用它。微分方程的应用更加广泛，所有的实际问题，都必须先建立数学模型，而这个数学模型往往就是一个微分方程或微分方程组，无论是天气预报、输电配电、遥感测控、信号（图像）处理，还是超导技术、数理金融、工业控制、传染病分析都需要它。拓扑学是个外来词，也被称为“橡皮几何学”，这个学科主要研究几何图形或空间在连续变换下的不变性质。由于它只考虑被研究对象的位置关系，而不考虑其形状和大小，所以在化学分子结构、液晶结构分类、DNA 等方面都有应用。泛函分析的研究对象是无限维向量空间上的泛函、算子和极限理论，它综合运用了函数论、几何学和现代数学的观点，是研究具有无限个自由度物理系统的基础，可应用于计算数学、介质力学、量子物理、最优化理论等方面。非欧几何在航海、航空、相对论等领域应用广泛。数论在密码学中找到了自己的用武之地。下列名人的名言，从侧面也说明了数学的应用性。

数学是打开科学大门的钥匙。

——F. 培根

大自然的全部结果不过是少数几个永恒定律的数学推导。

——拉普拉斯

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之谜，日用之繁，无处不用数学。

——华罗庚

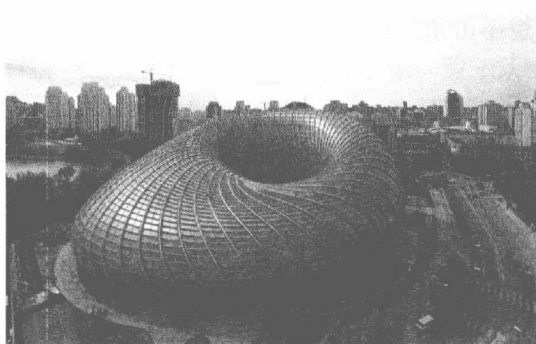


图 1.10 用数学模型打造的现代建筑

1.2.3 一种决策与行动的工具

随着社会的不断发展，人类遇到的问题和需要处理的问题越来越复杂，于是人类的行动也就越来越离不开数学，数学成了人类顶层决策与行动的得力工具甚至是必需工具。例如，物理学家试图建立一种宇宙的新理论，股票市场分析师预测下一轮股市的涨跌（图 1.11），神经生物学家构建大脑功能模型，军事情报专家优化军事资源配置，计算语言学家研究语言使用频率，数理社会学家研究社会需要等，这些复杂的决策和行动都是以数学为主要工具。特别是在人类文明高度发展、金融经济高度融合、社会文化相互渗透的今天，国家层面的决策越来越重要，越来越依赖大数据，也越来越需要数学的支持与支撑。

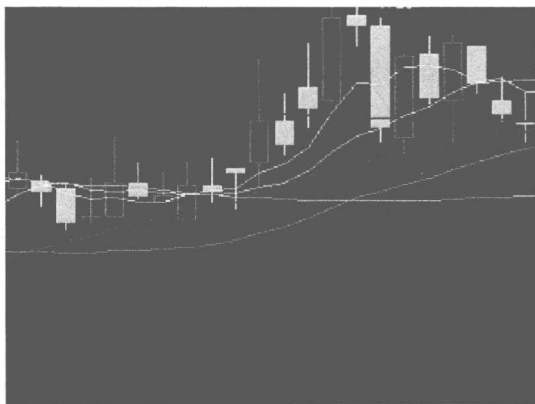


图 1.11 用数学计算预测股市走向

数学作为一种科学语言，能以其不可比拟、无法替代的方式，对社会现象和科学规律进行精确而简洁地表述。数学作为一种思维工具，不仅成为数学家和科学家的一种思维方式，而且它构成了信息社会人人必备的基本素质。数学

作为一种思想方法，它试图从尽可能少的简单假设和事实出发，通过推理论证得到事物本质的结论，它不仅提供数据分析和计算方法，而且提供推理工具和数学模型。

1.2.4 一门艺术

数学可以说是一门解决问题的艺术，它综合并创造性地应用已有的知识和方法，去解决各种非常规的问题，进而得到某种简洁和谐的结果或结构，由此构成了数学研究和数学学习的一种基本形式。

数学美学（图 1.12，图 1.13）是数学的重要内容之一。数学有和谐美所表现出的统一性，包括数学概念的统一、数学方法的统一、数学理论的统一以及数学与其他科学的统一。例如集合论中映射的概念把代数、几何、分析这三个数学分支中的运算、变换、函数统一起来。数形结合法把复数法、向量法、解析法、三角法等方法统一起来。欧几里得的公理化方法把几何理论和数学理论高度统一起来。布尔巴基学派著《数学原本》把当时的数学统一起来。希尔伯特的公理化运动又致力于现代数学的统一。随着科学的不断发展，物理学、化学、力学、生物学等学科都在高度数学化，数学的公理化等思想方法、数学的抽象符号把这些学科分别统一起来。数学和谐美的实质是一致性和高度概括性。

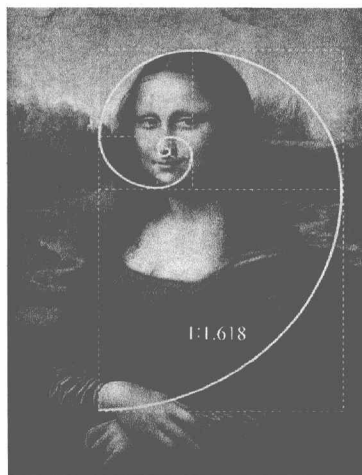


图 1.12 名画中的数学美学



图 1.13 分形艺术

数学还有对称美。数学中的对称是多方面的，既有空间对称（轴对称、中心对称、关于一条曲线对称等），又有时间对称（周期函数），还有其他对称，包括与时空无关的复杂对称（例如多项式对称、矩阵对称等代数对称）。数学的对称美是自然界在数和量上的直观表现。

数学更有简洁美，主要表现在数学的逻辑结构、数学的方法和表达形式的简单性上，例如 $F = ma$ ，区区三个字母和一个等号，就把一切运动关系描述得清清楚楚。符号之于数学就如乐谱之于乐曲！再如牛顿-莱布尼茨公式 $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ ，勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$ ，数字 1 的无穷表达式 $1 = 0.999999\ldots$ ，多面体欧拉公式 $V - E + F = 2$ 都是很美的，都是表达清晰、结构简单、内涵深刻的，见到这些公式，你会不由自主地发出大道至简的感慨。

著名数学家丘成桐等在《数学与人文》中指出，数学像音乐及其他艺术一样，能唤起人们的审美感觉和审美情趣。在数学家的创造活动中，有情感、意志、信念、希望等审美因素参与，数学家创造的概念、公理、定理、公式、法则，同所有的艺术形式如诗歌、音乐、绘画、雕塑、戏剧、电影一样，可以使人动情陶醉，并从中获得美的享受。古希腊欧几里得在《几何原本》中所建立的几何体系，堪称“巍峨的阶梯”“庄严的结构”“雄伟的建筑”，它使得无数数学爱好者为之神往！数学中优美的公式就如但丁《神曲》中的诗句一样优雅，而黎曼几何学与肖邦的钢琴曲一样优美。当你读到某函数可表示为无穷级数形式的时候，你的心坎顿时也会充满一种人与天地并立的浩然之气。

1.2.5 现代教育最重要的学科之一

数学作为理性文化的核心，它提供了理性思维的方式，因此，数学成为现代教育最重要的学科之一，也是国民素质教育的核心内容之一。今天，我们从小学到中学都必须学数学。数学提供的思维方式包括对问题进行抽象（例见图 1.14）、合理运用符号、建立数学模型、判断对错、求解问题、进行逻辑分析和推理、洞察和沟通事物之间的联系、掌握计算的技术与方法、建立一般理论的科学方法，以及使理论更加严谨化、找到更富有逻辑性的方法等。

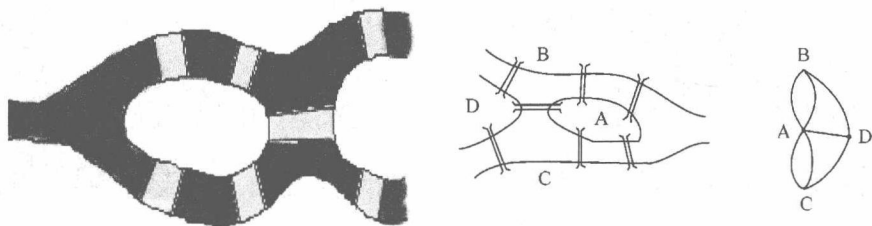


图 1.14 哥尼斯堡七桥问题的数学抽象过程

学习数学不仅有知识的积累、方法的熟练和思维的训练，而且通过学习还可以提高人的整体素质，并提升人的思想境界，因为数学文化的意义就在于：它是理性精神的化身、人类思维的模式、自然科学的语言、技术开发的工具、