分析力学

王永岗 编著

清华大学出版社

分析力学

王永岗 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是一本分析力学的简明教材。全书共分10章，第1～3章阐述了分析力学的基本概念和基本原理，内容包括分析静力学与动力学普遍方程等；第4、5章属完整系统动力学，内容包括第二类拉格朗日方程和哈密尔顿正则方程；第6、7章为力学的两种变分原理，内容包括积分型原理（即哈密尔顿原理）和微分型原理（即高斯原理）两部分；第8～10章为非完整系统动力学问题初步，内容包括第一类拉格朗日方程、阿沛尔方程以及凯恩方程。

全书重点强调分析力学的基础理论，注重分析力学的基本方法，并阐述数学公式所蕴含的物理意义。书中共配有200多个例题和200多道习题，并附有部分习题答案，因此有较好的教学适应性。建议授课学时为48～64学时。

本书可作为高等工科院校工程力学本科及机械类或相近专业研究生的分析力学课程教材，也可作为有关教师和工程技术人员的教学和科研参考书。

图书在版编目（CIP）数据

分析力学/王永岗编著. —北京：清华大学出版社，2019
ISBN 978-7-302-52488-5

Ⅰ. ①分…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①分析力学—研究　Ⅳ. ①O316

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第042275号

责任编辑：佟丽霞　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：13.75　　**字　　数**：332千字
版　　次：2019年3月第1版　　**印　　次**：2019年3月第1次印刷
定　　价：38.00元

产品编号：081856-01

FOREWORD 前言

经典力学是研究宏观低速物体机械运动的现象和规律的学科,宏观是相对于原子等微观粒子而言的,而低速是相对于光速而言的。1900 年马克斯·普朗克(Max Planck,1858—1947)的量子论指出,经典力学不适用于微观世界,而随后 1905 年阿尔伯特·爱因斯坦(Albert Einstein,1879—1955)的狭义相对论指出,经典力学不适用于运动速度可与光速比拟的物体。因此,一般认为经典力学是 20 世纪以前的力学,或非相对论非量子的力学。

经典力学沿着牛顿力学和分析力学两条主要分支发展,二者并驾齐驱,构成了不同特色的力学理论体系,并使用不同的数学语言,对机械运动的同一客观规律各自进行表述。牛顿力学认为力是影响物体运动的因素,将约束对运动的作用也归结为力。分析力学认为力和约束是影响物体运动的因素。分析力学又分为拉格朗日力学和哈密尔顿力学。前者以拉格朗日变量刻画力学系统,运动方程为拉格朗日方程;后者以哈密尔顿变量刻画力学系统,运动方程为哈密尔顿正则方程。经典力学的发展历程大致可分为三个阶段。

第一阶段为牛顿力学(Newtonian mechanics)体系的建立。牛顿力学体系是由伽利略·伽利雷(Galileo Galilei,1564—1642)、艾萨克·牛顿(Isaac Newton,1643—1727)等建立的,牛顿集前人之大成,综合了天文学与力学,在 1687 年出版的划时代巨著《自然哲学的数学原理》(*Mathematical Principles of Natural Philosophy*,1687)一书中提出的运动三定律和万有引力理论构成了经典力学体系的两大支柱,该书也成为牛顿对整个自然科学最重要的贡献。由于牛顿力学最基本的物理量——力和加速度都具有矢量性质,且大量运用几何方法和矢量作为研究工具,故牛顿力学可称为矢量力学。牛顿力学对研究多质点、多约束系统等问题是不方便的。

第二阶段为拉格朗日力学(Lagrangian mechanics)体系的建立。1788 年,约瑟夫·路易斯·拉格朗日(Joseph Louis Lagrange,1736—1813)在法国发表了一本不含几何推理也没有任何几何插图的力学著作——《分析力学论述》(*Traitéde Mécanique Analytique*,1788),这是牛顿之后的一部重要的经典力学著作,标志了力学发展的一个新阶段。书中吸收并发展了莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)、让·勒朗·达朗贝尔(Jean Le Rond D'Alembert, 1717—1783)等人的研究成果,通过引入广义坐标的概念,将具有标量性质的能量作为基本物理量,以虚位移原理和达朗贝尔原理相结合得到的动力学普遍方程为基础,运用变分原理,创立了分析力学的微分形式——拉格朗日力学体系。他在序言中宣称:力学已经成为分析的一个分支。拉格朗日力学是对经典力学的一种新的理论表述,着重于数学解析的方法,是分析力学的重要组成部分,拉格朗日本人也成为分析力学的创立者。

第三阶段为哈密尔顿力学(Hamiltonian mechanics)体系的建立。1834年,威廉·罗恩·哈密尔顿(William Rowan Hamilton, 1805—1865)将拉格朗日力学进行了推广,使得力学系统的变量不仅含有广义坐标,同时还含有广义动量,建立了哈密尔顿力学体系——正则方程(canonic equation),以及一个与能量有密切联系的哈密尔顿函数。正则方程是用哈密尔顿函数表示的一阶方程组,其好处是自变量在方程中具有某种对称性。与此同时,哈密尔顿将几何光学的研究成果应用到力学中,认为力学的原理不仅可以按牛顿的方式来叙述,也可以按某种作用量的驻值方式来叙述,他创立了分析力学的积分形式——哈密尔顿变分原理。哈密尔顿变分原理和正则方程都汇集于题名为《论动力学中的一个普遍方法》(*On a general method in dynamics*,1834)和《再论动力学中的普遍方法》(*Second essay on a general method in dynamics*,1835)的两篇历史性论文中。哈密尔顿原理的优点在于便于将力学推广到物理学其他领域,而且一般来说积分形式的变分原理特别适用于近似解法。

力学规律的矢量力学与分析力学是同一研究对象的两种表述形式,在经典力学的范畴内是等价的,但它们研究的途径或方法则不相同。矢量力学多以几何方法为基础,思维方式形象化,侧重于力,注重"定理"的应用;分析力学则主要采用数学分析的方法,思维方式抽象化,侧重于能量,多以各种"原理"解决动力学问题。

力学的原理可分为变分原理和不变分原理两种,每种原理又分为微分和积分两种类型。微分原理所描述的运动规律发生在某一瞬时,而积分原理所描述的运动规律则发生在一个有限过程内。不变分原理直接反映系统真实运动的普遍规律,如达朗贝尔原理就是一种微分型不变分原理,而机械能守恒定律则是一种积分型不变分原理。变分原理并不直接描述系统运动的客观规律,而是将力学系统的真实运动与相同条件下约束所允许的一切可能运动加以比较,并提供能将真实运动从可能运动中甄别出来的准则,如虚位移原理就是微分型变分原理的一个例子。分析力学方面的主要成就是由拉格朗日方程发展为可以作为力学基本原理的积分形式的哈密尔顿原理,使各种动力学定律都可从一个变分式推出。无论在近代或现代,无论在理论上或应用上,积分形式变分原理的建立对力学的发展都具有重要的意义。变分原理除哈密尔顿在1834年所提出的积分型以外,还有约翰·卡尔·弗里德里希·高斯(Johann Carl Friedrich Gauss,1777—1855)在1829年提出的微分型最小拘束原理等。

1788年拉格朗日奠定了分析力学的基础,然而他没有认识到有独立坐标数目与坐标的独立变分数目不相同的系统——非完整约束(nonholonomic constrain)系统的存在。直到1894年,德国学者海因里希·鲁道夫·赫兹(heinrich Rudolf Hertz,1857—1894)才第一次将力学系统区分为完整系统(Holonomic system)与非完整系统两类,对应于完整约束与非完整约束,开辟了非完整系统分析力学研究的新领域。由于非完整约束系统至少包含一个不可积分的微分约束,因而需要更复杂的微分方程来描述。在问世至今的百余年里,非完整系统动力学已逐渐发展成为分析力学的重要分支,并建立了各种形式的运动方程。

分析力学属一般力学的一个分支,若以拉格朗日在1788年《分析力学论述》一书的出版为学科正式诞生的标志,已有二百余年的历史。由于分析力学用统一的形式表达多样化的力学问题,因此其理论依据与研究方法具有高度的概括性,其结论具有很大的普遍性。掌握它的一些基本概念和思维方法,可为进一步学习计算力学、量子力学和非线性力学等课程奠定理论基础。

为适应工程力学等专业课程教学计划对"分析力学"课程学时不断缩减的实际,在本书

的编写过程中充分利用前修课程的基础，以最少的篇幅引入了分析静力学（虚位移）原理和达朗贝尔原理等已经在“理论力学”课程中介绍过的基础理论，内容上既避免了课程间的交叉与重复，又能相互衔接。由于“分析力学”是利用纯数学的分析方法来研究系统机械运动的一般规律的，其复杂的数学推导对于工科同学是不小的挑战，因此，本书尽可能采用通俗的或工程的数学语言，强调力学的基本原理和思维方法，而将数学作为分析问题的工具，一些地方并没有过分追求数学上的严谨性。附录中对分析力学有直接贡献的几位历史人物的学术生涯和力学工作进行了概述，以期增加读者对历史沿革的兴趣。

本书以完整系统的拉格朗日力学体系和哈密尔顿力学体系为主要内容，同时对非完整系统动力学问题的第一类拉格朗日方程、阿沛尔方程以及凯恩方程进行了简单介绍，以适应多学时教学安排。

本书是在作者多年所授“分析力学”课程讲义的基础上，借鉴国内外一些经典教材和相关文献，完善并最终编写的适合于高等理工院校的“分析力学”课程教材，也可作为研究生教材和工程技术人员的参考用书。

限于作者水平，虽勉力成书，但不妥和疏漏在所难免，恳请读者不吝指正。

编　者

2018 年 8 月

CONTENTS

目录

第1章 分析力学的基本概念

分析力学是理论力学的一个分支,是对经典力学的高度数学化的表达。分析力学的研究对象是质点系。质点系可视为一切宏观物体组成的力学系统的理想模型。例如刚体、弹性体、流体等以及它们的综合体都可看作质点系,质点数可由1到无穷。工程上的力学问题大多数是非自由质点系,分析力学把约束看成对系统位置(或速度)的限定,而不是看成一种力。由于约束方程类型的不同,就形成了不同的力学系统。例如,完整系统、非完整系统、定常系统、非定常系统等。

分析力学就是从分析约束入手,提出解决力学问题的新途径和方法的。在进入分析力学基本原理的学习之前,首先应该掌握一些基本概念并具备一些基本能力,它们是学习各种分析力学原理的共同基础。

1.1 约束及其分类

1.1.1 约束和约束方程

1. 位形及状态

一个由 n 个质点组成的质点系,其各质点每一瞬时在空间中所占据的位置以及质点系的形状可以由 n 个位置矢径 $\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 或 $3n$ 个笛卡儿坐标 $x_i(i=1,2,\cdots,3n)$ 来描述。系统各质点在空间位置的集合称为质点系的**位形**。此 $3n$ 个坐标所张成的抽象的 $3n$ 维空间称为质点系的**位形空间**。对非自由质点系,这 $3n$ 个量是不独立的。与质点系在每一瞬时的位形对应的位形空间的点称为**位形点**。质点系由某一位形连续变化到另一位形的运动过程反映在位形空间就是位形点连续变化所形成的曲线,称为**位形轨线**。

运动中的质点在任一瞬时所占据的位置及其所具有的速度联合在一起称为质点在该瞬时的**状态变量**。一个由 n 个质点组成的质点系,其各质点每一瞬时在空间中的位置及速度分布需要 n 个位置矢径及其导数$(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i)(i=1,2,\cdots,n)$或 $3n$ 个笛卡儿坐标及其导数$(x_i,\dot{x}_i)(i=1,2,\cdots,3n)$来描述。此 $6n$ 个坐标所张成的抽象的 $6n$ 维空间称为质点系的**状态空间**。前面定义的位形空间是状态空间的 $3n$ 维子空间。与质点系在每一瞬时的运动状态对应的状态空间的点称为**状态点**。系统的状态随时间变化过程对应于状态点在状态空间中连续变化,因而描绘出一条曲线,称为**状态轨线**。

2. 约束及约束方程

几乎所有的力学系统都存在着约束。根据质点系的运动是否受到预先规定的几何及运

动条件的限制，将质点系分为自由质点系和非自由质点系两种。

对非自由质点系的位形和速度预先约定的限制条件称为**约束**。约束的物理表现为约束力，约束的数学表现为**约束方程**。通常，约束方程可以通过质点系中各质点的位置矢径或速度来表达，写作

$$f_j(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i;\ t) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,s) \tag{1.1.1}$$

这里，n 为质点系的质点数，s 为约束方程数，t 为时间参数。约束方程的直角坐标形式为

$$f_j(x_i, y_i, z_i;\ \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i;\ t) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,s) \tag{1.1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{x}_i\boldsymbol{i} + \dot{y}_i\boldsymbol{j} + \dot{z}_i\boldsymbol{k} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.1.3}$$

式中，$\boldsymbol{r}_i$ 和 x_i、y_i、z_i 分别为第 i 个质点的矢径及其在直角坐标系中各坐标轴上的投影；$\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 和 $\dot{x}_i$、$\dot{y}_i$、$\dot{z}_i$ 分别为对应的速度及其在直角坐标系中的投影。

例如，图 1.1.1 中所示的具有固定悬挂点 O 的无重刚性杆，其对摆锤 M 的限制条件是：摆锤必须在以 O 点为球心、以摆长 l 为半径的球面上运动。约束方程可表示为

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

若将图 1.1.1 中球摆的刚性杆换成相同长度的柔索，如图 1.1.2 所示，则约束方程变为

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leqslant 0$$

有时，球摆的摆长也可按给出的时间 t 的函数改变，即 $l = l(t)$。如图 1.1.3 所示的变长度球摆，摆锤由一根穿过固定圆环的柔索以不变的速度 $\boldsymbol{v}$ 拽引，初始摆长为 l_0，则摆长随时间的变化规律为 $l = l_0 - vt$，这时，球摆的约束方程可表示为

$$x^2 + y^2 + z^2 - (l_0 - vt)^2 = 0$$

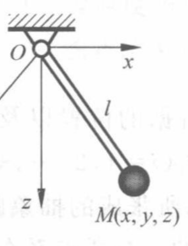

图 1.1.1

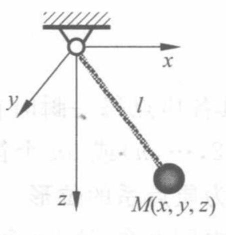

图 1.1.2

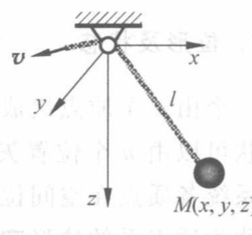

图 1.1.3

1.1.2 约束的分类

分析力学所研究的非自由质点系中存在着许多形式的约束。设有由 n 个质点组成、各质点间有 s 个约束的质点系，其约束按不同方面的性质可作如下分类。

1. 几何约束与运动约束

某些约束仅对质点系的几何位置加以限制，而对各质点的速度没有限制，这种约束称为**几何约束**，或**位置约束**。约束方程只显含位置和时间，而不显含速度，其约束方程的一般形式为

$$f_j(\boldsymbol{r}_i;\ t) = 0 \quad 或 \quad f_j(\boldsymbol{r}_i) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,s) \tag{1.1.4}$$

例如，刚体内任意两点间的距离保持不变就是一种几何约束，其约束方程为

$$(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 - \boldsymbol{r}_{ij}^2 = 0 \quad (\text{任意的 } i,j)$$

某些约束不仅对质点系的空间位置加以限制，还对各质点的速度加以限制，这种约束称为**运动约束**，或**速度约束**、**微分约束**。约束方程中不仅显含位置和时间，同时还显含速度，其约束方程的一般形式为

$$f_j(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i;\ t) = 0 \quad \text{或} \quad f_j(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,s) \tag{1.1.5}$$

例如，半径为 r 的圆柱在粗糙的地面上沿着水平直线作无滑动的滚动，如图 1.1.4 所示，这意味着着地点的速度为零。因此，圆柱中心 $C(x_C, y_C)$ 的速度与转动角速度 $\dot{\varphi}$ 应满足运动学的限制条件，即

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi}, \quad \dot{y}_C = 0$$

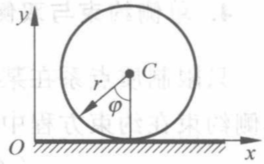

图　1.1.4

这是一种运动约束，但它可以写成某函数的全微分形式，即写成 $\mathrm{d}(x_C - r\varphi) = 0$，$\mathrm{d}y_C = 0$，进一步可积分为有限方程（非微分方程）

$$x_C - r\varphi = \text{const.}, \quad y_C = r$$

约束方程转化为几何约束的形式。可见，可积分的运动约束在物理实质上和几何约束没有区别。

2. 完整约束与非完整约束

几何约束和可积分的运动约束实质上属于同一范畴的约束，分析力学中合称为**完整约束**。因此约束方程的有限形式仍形如式(1.1.4)，如上述圆柱在粗糙的地面上作纯滚动的问题。只含有完整约束的质点系叫作**完整系统**。

并不是所有的运动约束方程都可以经过积分后化为几何约束方程。如质点系含有不可积分的运动约束，它们在物理实质上不同于几何约束，称为**非完整约束**。含有非完整约束（一般也同时含有完整约束）的质点系叫作**非完整系统**。非完整约束的约束方程仍形如式(1.1.5)，但不满足可积分的条件。

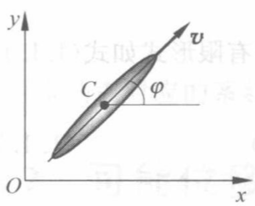

图　1.1.5

作为非完整约束的经典例子，可以研究在水平冰面内运动的冰刀。如图 1.1.5 所示，冰刀在冰面上运动时其中心 C 点的速度只能沿着冰刀的方向（忽略冰刀的侧滑），如果由中心 C 点的坐标 (x_C, y_C) 及冰刀转角 φ 决定这个平面运动刚体的位形，则约束对 C 点速度方向的限制条件可表示为

$$\frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C} = \tan\varphi \quad \text{或} \quad \dot{y}_C - \dot{x}_C\tan\varphi = 0$$

这是一个运动约束方程，但它不能经积分化为几何约束方程，属于不可积分的运动约束。此约束方程可以理解为，在给定任意 φ 值后，冰刀中心速度分量 $(\dot{x}_C, \dot{y}_C)$ 必须满足的关系。显然，这个约束并没有限制冰刀的位形，或者说 $(x_C,\ y_C)$ 及 φ 可以任意取值。

3. 定常约束与非定常约束

约束方程中不显含时间 t 的约束称为**定常（稳定）约束**。反之，约束方程中显含时间 t 的约束称为**非定非常（非稳定）约束**。

例如，质点被限制在半轴长为 a、b、c 的固定椭球面上运动，约束方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

对应于定常约束。而当质点被限制在一个半轴不断变化的椭球面上运动时，其约束方程

$$\frac{x^2}{a^2t^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

对应的约束则属非定常约束。

4. 单侧约束与双侧约束

只限制质点系在某一侧的运动，而不限制另一侧的运动的约束称为**单侧(可解)约束**。单侧约束在约束方程中用不等式表示，一般可写为

$$f_j(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i;\ t)\leqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,s)\tag{1.1.6}$$

称为**约束不等式**。单侧约束是有可能解除的。当然，约束是否解除或者何时解除，需要从运动方程解出约束力，再从约束力的指向是否正确来判断。如柔索约束的球摆，摆锤向柔索缩短的方向运动是自由的，在这一侧约束有可能解除。

同时限制质点系某一侧及相反方向的运动的约束称为**双侧(不可解)约束**。双侧约束在约束方程中用严格的等式表示。如刚杆约束的球摆，摆杆既限制摆锤沿杆拉伸方向的运动，又限制其沿杆压缩方向的运动。

1.1.3 一阶线性约束

和完整约束相比较，非完整约束方程的特点表现为微分形式，而非有限形式。但是完整约束系统和一阶线性非完整约束系统的约束方程具有相同的微分形式。

1. 完整约束系统

设有由 n 个质点组成、各质点间有 r 个完整约束的系统，约束方程的有限形式如式(1.1.4)，这里重写为

$$f_j(\boldsymbol{r}_i;\ t)=0\quad(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,r)\tag{1.1.7}$$

将此完整约束方程对时间求一阶全导数，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i+\frac{\partial f_j}{\partial t}=0\quad(j=1,2,\cdots,r)\tag{1.1.8}$$

可见，即使存在可积分的运动约束使得完整约束的约束方程不显含速度项，实际上它在对非自由质点系的位形进行限制的同时也对质点系各质点的速度给予了限制。从式(1.1.8)可以看出，完整约束的导数形式是线性运动约束。将上式的等号两侧同乘以 $\mathrm{d}t$，得到完整约束的微分形式

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Psi}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+A_{j0}\mathrm{d}t=0\quad(j=1,2,\cdots,r)\tag{1.1.9}$$

式(1.1.9)为全微分形式，是可积分的运动约束，其解析表达式为

$$\sum_{i=1}^{3n}A_{ij}\mathrm{d}x_i+A_{j0}\mathrm{d}t=0\quad(j=1,2,\cdots,r)\tag{1.1.10}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i},\quad A_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i},\quad A_{j0} = \frac{\partial f_j}{\partial t} \tag{1.1.11}$$

2. 非完整约束系统

考虑由 n 个质点组成、各质点间有 s 个非完整约束的系统。大多数实际遇到的非完整约束问题,其约束方程为质点速度的一次代数方程

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + A_{j0} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,s) \tag{1.1.12}$$

式中系数$\boldsymbol{\Psi}_{ij}$、A_{j0}为各质点的位置和时间的函数。也可以将其表示为微分形式:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + A_{j0}\mathrm{d}t = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,s) \tag{1.1.13}$$

上述形式的微分约束称为**线性运动约束**,或称为**一阶线性约束**、**普法夫**(Johann Friedrich Pfaff,1765—1825)**约束**。式(1.1.12)和式(1.1.13)也可以解析地表达为

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ij}\,\dot{x}_i + A_{j0} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,s) \tag{1.1.14}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ij}\,\mathrm{d}x_i + A_{j0}\,\mathrm{d}t = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,s) \tag{1.1.15}$$

比较式(1.1.9)和式(1.1.13)、式(1.1.10)和式(1.1.15)可以看出,它们有相同的形式。因此,若系统同时存在 r 个完整约束和 s 个非完整约束,完整约束和非完整约束系统的约束方程可以统一表示为微分形式:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + A_{j0}\mathrm{d}t = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,r+s) \tag{1.1.16}$$

或

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ij}\,\mathrm{d}x_i + A_{j0}\,\mathrm{d}t = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,r+s) \tag{1.1.17}$$

与定常约束对应的系数 A_{j0} 为零。

1.2　可能位移与虚位移

为了充分显示力学系统与外界的关联,系统各部分之间的联系以及作用在系统上的各力所起的不同作用,分析力学不仅研究那些实际上实现的运动,而且考虑约束允许的一切可能的运动,并依据一定的力学原理,从可能的运动中挑出实际实现的运动。为描述可能的运动与实际实现的运动,常引入可能位移和虚位移、(真)实位移的概念。

1.2.1　实位移、可能位移与虚位移的定义

考察约束在一个以匀速 u 上升的平面上运动的质点 M,如图 1.2.1 所示,这是一个非定常约束,约束方程为

$$z - ut = 0$$

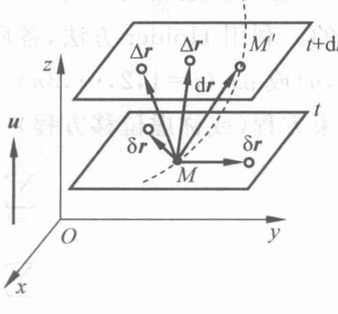

图　1.2.1

即要求质点的 z 坐标变化率与约束平面上升的速率相同,也

就是说，质点必须时时在约束平面上。图中画出了三个时间由 $t \sim t+\mathrm{d}t$ 的位移，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$、$\Delta\boldsymbol{r}$、$\delta\boldsymbol{r}$，它们分别表示实位移、可能位移以及虚位移。下面给出其一般性的定义以及这些位移应满足的约束方程。假定质点系由 n 个质点组成，质点系内同时存在 r 个完整约束和 s 个非完整约束。

1. 实位移

受约束的质点系在运动过程中，各质点的矢径 $\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 一方面要满足动力学微分方程和初始条件，另一方面还必须满足约束方程式(1.1.16)或式(1.1.17)。同时满足这两个要求的运动就是实际发生的运动，称为**真实运动**。在时间 $t \sim t+\mathrm{d}t$ 这一无穷小间隔内，真实运动产生的位移称为质点系的**实位移**，记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 或写成解析形式 $\mathrm{d}x_i(i=1,2,\cdots,3n)$。

对于定常约束的特殊情形，约束方程中的 $A_{j0}=0$，这时实位移满足的约束方程变为

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = 0 \quad (j=1,2,\cdots,r+s) \tag{1.2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ij}\,\mathrm{d}x_i = 0 \quad (j=1,2,\cdots,r+s) \tag{1.2.2}$$

2. 可能位移

质点系为约束所允许的运动称为**可能运动**，它与系统的受力情况及初始条件无关。在给定的瞬时和位形上，以及给定的时间间隔内，质点系在可能运动中发生的位移称为**可能位移**，如图 1.2.1 中的 $\Delta\boldsymbol{r}$(下面仍用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示)。由此定义知，可能位移只需满足约束方程式(1.1.16)或式(1.1.17)，或在定常约束的特殊情形下满足式(1.2.1)或式(1.2.2)。

显然实位移满足约束条件，所以也是可能位移。反过来，任意一个可能位移并不一定是某个真实运动所产生的实位移。因为可能位移只需满足约束条件，并没有考虑它是否满足动力学方程和初始条件。

3. 虚位移

在某固定瞬时和一定位形上，质点系在约束所允许的条件下，假想的任何无限小位移称为**虚位移**，以 $\delta\boldsymbol{r}$ 表示。为由约束方程得到虚位移应满足的条件，可将约束方程写成微分形式，再将微分符号 d 用变分符号 δ 替代，并令 $\delta t=0$。这一方法通常称为赫尔德(Otto Ludwig Hölder，1859—1937)方法。Hölder 方法对完整约束和一阶线性非完整约束都是适合的。利用 Hölder 方法，各质点的虚位移可以表示为矢径或坐标的变分，即 $\delta\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 或 $\delta x_i(i=1,2,\cdots,3n)$。因此，从式(1.1.16)或式(1.1.17)可以得到虚位移应满足的约束方程(或称虚位移方程)

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \quad (j=1,2,\cdots,r+s) \tag{1.2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ij}\,\delta x_i = 0 \quad (j=1,2,\cdots,r+s) \tag{1.2.4}$$

将上两式与可能位移应满足的条件式(1.1.16)或式(1.1.17)对照可以看出，对定常约

束情形，由于约束的性质与时间无关，$A_{j0}=0$，虚位移就是可能位移；但对于非定常约束，虚位移不一定等同于可能位移。由于虚位移与时间变化无关，$\delta t=\mathrm{d}t=0$，各质点的虚位移相当于时间突然停滞，约束瞬间“冻结”时所允许的可能位移。

虚位移也可以通过另一种方式定义。设质点系在同一瞬时、同一位形上，在相同的时间间隔内有任意两组可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^*$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^{**}$，它们都满足约束方程式(1.1.16)或式(1.1.17)且式中系数 $\boldsymbol{\Psi}_{ij}$、A_{ij}、A_{j0} 应该相同，即

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Psi}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^*+A_{j0}\mathrm{d}t=0,\quad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Psi}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^{**}+A_{j0}\mathrm{d}t=0\quad(j=1,2,\cdots,r+s)\tag{1.2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{3n}A_{ij}\mathrm{d}x_i^*+A_{j0}\mathrm{d}t=0,\quad \sum_{i=1}^{3n}A_{ij}\mathrm{d}x_i^{**}+A_{j0}\mathrm{d}t=0\quad(j=1,2,\cdots,r+s)\tag{1.2.6}$$

将式(1.2.5)或式(1.2.6)的后式分别与前式相减，并令

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^{**}-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i^*\quad(i=1,2,\cdots,n)\quad\text{或}\quad\delta x_i=\mathrm{d}x_i^{**}-\mathrm{d}x_i^*\quad(i=1,2,\cdots,3n)$$

则得到虚位移约束方程(1.2.3)或方程(1.2.4)。因此，也可将**虚位移**定义为质点系在同一瞬时、同一位形上，在相同的时间间隔内发生的任意两组可能位移之差。

虚位移是一个纯粹几何概念，既不牵涉系统的实际运动，也不涉及力的作用，它只是在约束允许的条件下具有的任意无限小的位移。与实位移和可能位移的发生都需经历时间不同，虚位移的发生不需要时间，约束被“冻结”，即所谓“等时变分”，故有 $\delta t=0$。

定常约束下，可以把虚位移视为可能发生却尚未发生的可能位移，实位移是众多虚位移(亦是可能位移)中的一个；在非定常约束下，不能把虚位移视为可能发生却尚未发生的可能位移，实位移是众多可能位移(不一定是虚位移)中的一个。

1.2.2　虚位移的几何性质

设一质点在曲面 $f(x,y,z,t)=0$ 上运动，如图 1.2.2 所示。某瞬时 t，质点位于曲面上的 $M(x,y,z)$ 点，在此时、此位置上给质点一虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$，其解析表达式为

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta x\boldsymbol{i}+\delta y\boldsymbol{j}+\delta z\boldsymbol{k}\tag{1.2.7}$$

其中，δx、δy 和 δz 为虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系上的投影，称为**坐标变分**。

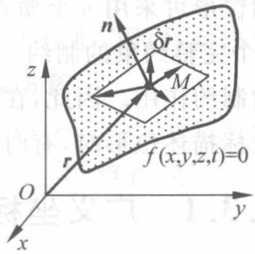

图　1.2.2

由于虚位移是约束允许的无限小位移，所以，有了虚位移后，约束未被破坏，质点的坐标仍满足约束曲面方程，即有

$$f(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z,t)=0\tag{1.2.8}$$

将上式在 M 点处按 Taylor 级数展开，因虚位移是无限小量，故略去二阶及二阶以上的高阶微量，得

$$f(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z,t)=f(x,y,z,t)+\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0\tag{1.2.9}$$

考虑到约束曲面方程 $f(x,y,z,t)=0$，有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0\tag{1.2.10}$$

引入曲面 $f(x,y,z,t)=0$ 在 M 点处的单位法向矢量 $\boldsymbol{n}$。如上所述，由于 M 点的虚位移是在某瞬时 t 把时间和曲面“冻结”后约束所允许的无限小位移，因此，曲面 $f(x,y,z,t)=0$ 即使是非定常约束，在瞬时 t 也被“冻结”为定常约束。

由微分几何理论可知，对于定常约束曲面上任一点的法线来说，它的三个方向余弦分别与该曲面在此点的偏导数 $\partial f/\partial x$、$\partial f/\partial y$ 和 $\partial f/\partial z$ 成正比，即

$$\boldsymbol{n}=C\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\Big) \tag{1.2.11}$$

式中 C 为比例常数。对式(1.2.7)和式(1.2.11)作点积运算，再将式(1.2.10)代入，得到

$$\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=C\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\Big)=0 \tag{1.2.12}$$

这表明，在给定瞬时，将时间和曲面“冻结”后，质点在曲面某一点上的虚位移垂直于此曲面在此点的法线，或者说，质点的虚位移位于被“冻结”曲面上某个点的切平面内，而这个点正是此质点所处的位置，此切平面内自该点作出的任意无限小位移都是质点在此瞬时的虚位移。虚位移是一个用来反映约束在给定瞬时的性质的几何概念。

1.3 广义坐标与自由度

广义坐标是分析力学的基本概念，也是分析力学的特色之一，它比笛卡儿坐标意义更广泛。广义坐标不仅摆脱了应用笛卡儿坐标对非自由质点系位形描述带来的困难，而且用最少的参数描述系统位形。广义坐标的概念由拉格朗日提出，它的提出虽然只是描述方法上的改进，但是对力学发展产生了深远影响。

在分析力学中，与广义坐标伴随的另一重要概念为自由度，自由度是由质点系本身特征决定的，与坐标选择无关。如何确定系统的自由度是个基本而重要的问题。

考察一由 n 个质点组成的质点系，内有 r 个完整约束和 s 个非完整约束。描述质点系的位形可采用 n 个质点的 $3n$ 个笛卡儿坐标，不过，这 $3n$ 个坐标并非都是独立的，它们受到 r 个完整约束的制约。至于非完整约束，由于是不可积分的运动约束，对这些坐标没有直接的制约作用。因此，在这 $3n$ 个笛卡儿坐标中，只有 $l=3n-r$ 个坐标是独立的。这样用直角坐标描述位形时，有时并不方便，由此引出广义坐标的质点系位形描述方法。

1.3.1 广义坐标与广义速度

1. 广义坐标

确定质点系位形的独立参数称为**广义坐标**，通常用 $q_k(k=1,2,\cdots,l)$ 表示。广义坐标可根据系统的具体结构和问题的要求来选取，能够唯一地确定系统的位形的参数都可以作为广义坐标，广义坐标的量纲也不一定是长度量纲，它可以是直角坐标系中的线坐标、极坐标和球坐标中的角坐标，也可以是其他参变量。更一般地讲，凡可以确定力学系统位形的任何物理量都可选作广义坐标。可见，对于某一系统来讲广义坐标的选择不是唯一的，而是具有一定的灵活性。广义坐标数为

$$l=3n-r \tag{1.3.1}$$

既然采用直角坐标法和广义坐标法都可以描述质点系的位形，那么它们之间必定存在相互的变换关系。选定广义坐标后，系统内各质点的笛卡儿坐标 x_i 和位置矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 可由广义坐标单值确定：

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_l;\ t) \quad (i = 1, 2, \cdots, 3n) \tag{1.3.2}$$

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_l;\ t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.3.3}$$

描述系统位形的这种直角坐标（或其他坐标）与广义坐标之间的变换关系称为**坐标变换方程**。由于广义坐标是独立坐标，则在这些坐标之间不存在任何完整约束，而且是以最少数目的参数描述系统的位形的。

2. 广义速度

引入广义坐标后，质点系的运动可用广义坐标随时间的变化规律来描述，即 $q_k = q_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,l)$。广义坐标对时间的导数 $\dot{q}_k$ 称为**广义速度**。由坐标变换方程(1.3.3)，系统中点的速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 用广义速度表示为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.3.4}$$

也可得到上式在直角坐标系中的投影

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \cdots, 3n) \tag{1.3.5}$$

显然，广义速度的量纲也不一定是速度的量纲。对于只有完整约束的力学系统来说，l 个广义坐标是完全独立的，从而 l 个广义速度也是完全独立的。

3. 广义坐标表示的非完整约束方程

设有由 n 个质点组成的质点系，内有 r 个完整约束，那么，总可以选 $l=3n-r$ 个广义坐标 q_k 来描述质点系的位形。若系统还受到 s 个一阶线性非完整约束，由于广义坐标是确定质点系位形的独立参数，任意一组广义坐标的数值对应着质点系的一个位形，因而，对完整约束，用直角坐标系建立起来的质点系位形限制条件，即下列完整约束方程

$$f_j(x_1, x_2, \cdots, x_{3n};\ t) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, r) \tag{1.3.6}$$

对该质点系的广义坐标是没有制约作用的。如果把式(1.3.2)代入上式，将构成一个恒等式。

非完整约束方程则有所不同，它不可积，若非完整约束方程为式(1.1.12)所示的线性一阶导数形式（或微分形式），即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + A_{j0} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, s) \tag{1.3.7}$$

式中各系数的定义如前。将式(1.3.4)代入上式，改变求和顺序，整理后得到限制广义速度的 s 个非完整约束方程

$$\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} + A_{j0}\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, s) \tag{1.3.8}$$

令