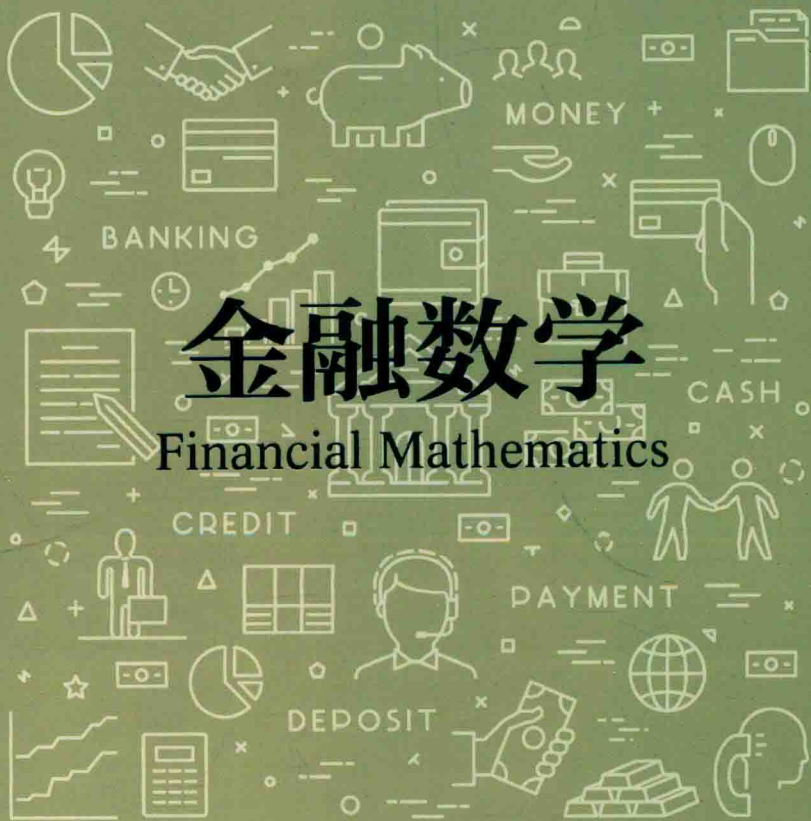


普通高等教育金融学类专业规划教材



郭凯 赵宁 编



普通高等教育金融学类专业规划教材

金融数学

郭 凯 赵 宁 编



机械工业出版社

本书在介绍期货与期权及其交易规则的基础上,主要讲解资本资产定价模型、二叉树理论及离散情形的期权定价、GBM 模型及连续情形的期权 B-S 定价、期权定价的 PDE 及其求解、二叉树套利策略、连续情形的各种套利策略、期权定价理论的扩展、Copula 理论及对期权定价的应用等。本书还在重要结论之后给出问题、习题和例子,做到有的放矢。同时,本书还注重软件应用,并给出了 B-S 期权定价公式和各种套利策略的 MATLAB 应用。

本书内容既精简又突出,既论证翔实又深入浅出,既基础又前沿,既有理论又突出应用,主要阅读对象是金融学及其相关专业的本科生、硕士研究生和博士研究生,是一本让并不具备很强数学基础的本科生和研究生能够“看得懂”的金融数学教材。本书也可以供高等院校、科研院所的教师和科研人员阅读,还可以作为具备一般经济学基础和数学基础且需要继续学习和研究高级微观金融的读者的先行教材,是阅读国内外前沿文献、追踪高级微观金融研究动态的必备参考书。

图书在版编目(CIP)数据

金融数学/郭凯,赵宁编. —北京:机械工业出版社,2018.7

普通高等教育金融学类专业规划教材

ISBN 978-7-111-60322-1

I. ①金… II. ①郭…②赵… III. ①金融-经济数学-高等学校-教材 IV. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 141606 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:常爱艳 责任编辑:常爱艳 刘 静 韩效杰

责任校对:陈 越 封面设计:鞠 杨

责任印制:李 昂

北京宝昌彩色印刷有限公司印刷

2018 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·12.5 印张·310 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-60322-1

定价:39.80 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88379833

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-88379649

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金 书 网:www.golden-book.com

前言

自从马克维茨 (Markowitz) 提出了现代资产组合理论, 夏普 (William Sharpe)、林特尔 (John Lintner)、特里诺 (Jack Treynor) 和莫辛 (Jan Mossin) 在此基础上提出了资本资产定价模型 (CAPM), 以及后来的 Black 和 Scholes 提出了标准欧式看涨期权的 B-S 定价公式, 微观金融已经自然而然地与数学和计算机技术相互渗透、融合以至于不可分离且相辅相成。正是得益于数学和计算机技术的发展, 各种期货、期权、掉期、互换等日益复杂的金融衍生品开始层出不穷, 各种金融风险管理技术日臻成熟, 各种对冲技术与量化投资工具方兴未艾, 各种基于 Fintech 技术的互联网金融产品正在挑战传统金融产品的优势地位。因此, 金融模型化、(大) 数据化、量化、智能化甚至量子化已是大势所趋, 学习和掌握金融数学技术也就变得更加重要。

金融数学所涉及的数学知识不局限于某一门具体数学学科, 而是包括各种优化方法、微积分、矩阵代数、测度论、泛函分析、概率论、数理统计、随机过程、微分方程与偏微分方程、随机微分、熵、鞅、Copula、智能算法等一系列数学知识的庞杂系统, 并且这些数学知识还在不同的金融衍生品之间相互联系与应用。因此, 金融数学课程是面向许多工科院校的物理学专业、数学专业和工程类专业开设的, 对应的金融数学教材也基本以公理、定义和定理为主, 这显然不适用于财经类院校的金融学专业和金融工程专业。

我们的目的是试图编写一本让并不具备很强数学基础的本科生和研究生能够“看得懂”的“金融数学”, 这种“看得懂”有三层含义, 也是本书区别于其他“金融数学”教材的特点:

(1) 强调金融数学的实际应用。本书从第 1 章就对国内外期货与期权进行了介绍, 并在附录中对国内期货交易所推出的实际交易的商品期货、金融期货、指数期权、期货期权的具体交易规则进行了介绍, 尤其是对各种限仓制度进行了详细总结。同时, 还介绍了我国场外期权和有代表性的牛熊证及其交易规则。因此, 从一开始, 本书就试图使读者对我国期货与期权交易有一个全面和直观的了解, 同时还进一步把金融数学的分析范畴定标为期货与期权, 而非对所有的金融衍生品泛泛而谈。

(2) 强调“去定理化”和“案例化”。“去定理化”并非抹掉数学推导, 恰恰相反, 本书几乎每一章都有详尽的数学推导过程, 而且只要学过财经类高等数学, 这些数学推导都可以看懂。进一步, 在去掉晦涩难懂的数学符号之后, 本书还在重要结论之后迅速给出问题、习题和例子, 这样读者就可以有的放矢, 立刻通晓每一结论的应用所在和如何应用, 如果将所有习题和问题一股脑放在章末, 那么读者每次都要前后来回翻阅, 十分麻烦。

(3) 强调基础扎实、软件应用与前沿引导。基础理论方面, 包括资本资产定价模型中效率前沿、资本市场线、证券市场线的推导, 离散二叉树模型的推导与计算, 连续股价 GBM 模型的推导, GBM 模型与二叉树模型一致性的推导, 欧式看涨期权与看跌期权的 B-S 定价公式的推导, HJB 的 PDE 推导, 期权定价 PDE 的推导及求解, Copula 函数的推导等。在软件应用方面, 本书在第 5 章和第 6 章给出了 B-S 期权定价公式和各种套利策略的 MATLAB 应用。在前沿引导方面, 本书没有考虑不成熟的金融前沿技术, 对已经成熟的金融前沿技术特别是对冲套利策略, 也重在应用而非推导, 同时, 还在最后一章介绍了 Copula 理论及对非线性金融数学的应用。

本书试图做到内容既精简又突出, 既论证翔实又深入浅出, 既基础又前沿, 既有理论又突出应

用,然而结果总是难以尽如人意。但至少,数学基础薄弱的读者在学习本书之后,不仅可以对金融数学了解和实际应用,而且在进一步学习更加高深的金融数学理论时信心倍增。

本书的编写得益于两位作者在长期金融数学授课过程中的工作积累,其中郭凯负责编写第1~6章和附录,赵宁负责编写第7章。本书的出版也意味着我们可以拥有一本适用于当前教学实际的教材,这的确是一件值得庆幸的事情。在编写过程中,我的两位研究生也做了大量早期的录入工作,他们分别是刘潇男和罗鹏静,对他们的辛苦工作表示感谢。

付梓之际,还要特别感谢机械工业出版社和常爱艳编辑,常爱艳编辑一直为本书的出版不辞辛劳地在出版社与作者之间联系和沟通,她严谨高效的工作作风、认真负责的敬业精神以及训练有素的专业技能为本书的面世增色不少,我们对此铭感五内。

郭凯

2018年8月于东北财经大学问源阁

目 录

前 言

第1章 期货与期权简介	1
1.1 期货	1
1.1.1 商品期货	1
1.1.2 股指期货	2
1.1.3 国债期货	2
1.2 期权	3
1.3 牛熊证	4
本章复习要点	5
第2章 资产组合的均值—方差分析、效率前沿与市场线	6
2.1 资产与资产组合	6
2.1.1 资产——风险资产与无风险资产	6
2.1.2 资产收益与风险的度量	6
2.1.3 资产组合	7
2.2 风险厌恶与均值—方差效用函数	7
2.2.1 期望效用函数	7
2.2.2 风险厌恶	8
2.2.3 风险厌恶系数	10
2.2.4 均值—方差效用函数与等效用曲线	13
2.3 资产组合的均值—方差分析	14
2.3.1 CAPM 的基本假设	14
2.3.2 包含两种风险资产的资产组合的均值—方差分析	15
2.3.3 包含三种风险资产的资产组合的均值—方差分析	19
2.3.4 包含 n 种风险资产的资产组合的均值—方差分析	19
2.4 均值—方差有效与效率前沿	21
2.4.1 均值—方差有效准则 (E-V 准则)	21
2.4.2 效率前沿	21
2.4.3 两基金分离定理	22
2.5 包含无风险资产的资产组合的均值—方差分析	23
2.5.1 包含无风险资产与 n 种风险资产的资产组合的均值—方差分析	23
2.5.2 资本市场线	24

2.5.3 货币基金分离定理	25
2.5.4 证券市场线	26
2.5.5 资产定价	29
本章复习要点	29
本章附录	30
 第3章 资产无套利复制、衍生品定价方法与套利策略	32
3.1 资产无套利复制与金融衍生品	32
3.1.1 买空与卖空	32
3.1.2 离散时间价值与连续时间价值	33
3.1.3 资产无套利复制与复制步骤	34
3.1.4 股票远期合约	35
3.1.5 股票期权	37
3.2 金融衍生品定价的基础方法	40
3.2.1 博弈论方法	40
3.2.2 期望价值定价方法	41
3.3 套利策略	45
3.3.1 Delta 对冲	45
3.3.2 套利分析 (Delta 中性对冲策略)	46
本章复习要点	48
 第4章 二叉树模型与离散时间的期权定价	49
4.1 二叉树模型	49
4.1.1 单期二叉树	49
4.1.2 多期二叉树	50
4.2 二叉树模型计算方法	51
4.2.1 单期二叉树计算方法	51
4.2.2 多期二叉树计算方法	52
4.3 欧式期权定价	55
4.3.1 欧式期权定价的后退递归方法	55
4.3.2 欧式期权定价的“一步式”方法	56
4.4 美式期权定价	57
4.5 百慕大式期权定价	58
4.6 奇异期权定价	59
4.6.1 敲出期权定价	60
4.6.2 回望期权定价	62
4.7 二叉树套利分析 (Delta 中性对冲策略)	65
4.7.1 欧式期权的套利策略	65

4.7.2 美式期权的套利策略	67
本章复习要点	68
第5章 几何布朗运动模型与连续时间的期权定价	69
5.1 几何布朗运动模型	69
5.1.1 二叉树模型的参数估计	69
5.1.2 连续情形的漂移率与波动率	71
5.1.3 一个重要定理	72
5.1.4 布朗运动	73
5.1.5 伊藤引理	73
5.1.6 几何布朗运动模型与对数正态模型	75
5.1.7 修正的几何布朗运动模型	76
5.1.8 股价运动方程	77
5.1.9 离散定价概率与连续定价概率	77
5.1.10 漂移率和波动率的参数估计	79
5.2 几何布朗运动模型与二叉树模型的一致性	80
5.2.1 二项式分布	80
5.2.2 棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理	80
5.2.3 上涨比例和下降比例	81
5.2.4 漂移率和波动率	82
5.3 连续时间的期权定价	83
5.3.1 欧式看涨期权定价的 B-S 模型	83
5.3.2 欧式看涨期权与看跌期权的无套利平价	87
本章复习要点	88
第6章 HJB 偏微分方程、B-S 偏微分方程与套利策略	89
6.1 HJB 偏微分方程	89
6.1.1 动态规划与 Hamilton - Jacobi - Bellman 偏微分方程	89
6.1.2 最优消费与资产组合: Merton 的例子	90
6.2 B-S 偏微分方程	92
6.2.1 B-S 偏微分方程基础知识	92
6.2.2 欧式看涨期权 B-S 偏微分方程的边界条件	93
6.2.3 欧式看涨期权 B-S 偏微分方程的求解	94
6.3 0-1 期权(二值期权) B-S 偏微分方程的边界条件及求解	96
6.3.1 现金 0-1 期权 B-S 偏微分方程的边界条件及求解	97
6.3.2 股票 0-1 期权 B-S 偏微分方程的边界条件及求解	98
6.3.3 现金 0-1 期权、股票 0-1 期权与欧式看涨期权的平价关系	100
6.4 期货期权定价及其 B-S 偏微分方程	101

6.4.1 股票期货合约定价	101
6.4.2 期货期权定价	102
6.4.3 期货期权 B-S 偏微分方程	103
6.5 套利策略	104
6.5.1 Delta 对冲	104
6.5.2 Gamma 对冲	106
6.5.3 Theta 对冲	108
6.5.4 期权价值与股价和到期期限的关系	109
6.5.5 历史波动率、隐含波动率与波动率指数	111
6.5.6 Vega 对冲与(宽)跨式套利策略	117
6.5.7 Rho 对冲	122
6.6 B-S 期权定价理论的扩展	123
6.6.1 红利支付模型	123
6.6.2 随机利率模型	123
6.6.3 跳跃扩散模型	124
本章复习要点	125
第7章 Copula 理论与金融数学应用	126
7.1 Copula 方法导入	126
7.1.1 联合概率、边际概率和连接函数	126
7.1.2 连接函数的二元性	127
7.1.3 连接函数的例子	128
7.1.4 连接函数与市场联动	129
7.1.5 尾部依赖	129
7.1.6 股票关联衍生品	130
7.1.7 信用风险关联衍生品	131
7.2 Copula 及 Sklar 定理	133
7.2.1 Copula 函数简介	133
7.2.2 Copula 函数的定义和基本性质	134
7.2.3 Copula 函数的分类	136
7.3 基于 Copula 理论的一致性和相关性测度	137
7.3.1 Kendall 秩相关系数 τ	138
7.3.2 Spearman 秩相关系数 ρ	138
7.3.3 Gini 关联系数 γ	139
7.3.4 正象限相依	139
7.3.5 尾部相关测度	140
7.4 Copula 理论在金融分析上的应用	142
7.4.1 多变量时间序列分析	142

7.4.2 金融市场的相关性分析	143
7.4.3 金融风险管理	144
本章复习要点	145
附录 国内期货与期权交易规则	146
附录 A 商品期货交易规则——大连商品交易所	146
附录 B 商品期货交易规则——郑州商品交易所	158
附录 C 商品期货交易规则——上海期货交易所	169
附录 D 股指期货交易规则——中国金融期货交易所	179
附录 E 国债期货交易规则——中国金融期货交易所	181
附录 F 股指期权与期货期权交易规则	183
参考文献	189

第1章 期货与期权简介

1.1 期货

期货合约是指由期货交易所统一制定标准,在将来某一特定的时间和地点交割一定数量和质量实物商品或金融商品的标准化合约。通常所说的期货就是指期货合约。期货合约具体分成三大类,分别为商品期货、股指期货和国债期货。其中商品期货合约在我国三大商品交易所进行交易,即大连商品交易所、郑州商品交易所、上海期货交易所,股指期货和国债期货在中国金融期货交易所进行交易。下面将以我国四个期货交易所为载体,分别介绍上述三种期货合约。

1.1.1 商品期货

商品期货是指标的物为实物商品的期货合约。商品期货历史悠久,种类繁多,主要包括农副产品、金属产品、能源产品等几大类。商品期货由于标的资产的储存、运输成本高等原因,合约的持有者多在到期前进行对冲平仓。当合约多头头寸持有到期时,需要进行商品的实物交割,交割地点按商品交易所事前规定的标准化合约进行选择。

商品期货市场最早起源于欧洲,1571年,英国创建了实质上的第一家集中的商品市场——伦敦皇家交易所。随后,荷兰阿姆斯特丹创建了第一家谷物交易所,比利时的安特卫普开设了咖啡交易所。1848年,在美国芝加哥有82位商人自发建立了芝加哥期货交易所(CBOT),这标志着现代意义上的期货交易诞生了。因为芝加哥地理位置的优越性,1874年,芝加哥商业交易所(CME)诞生,主要交易诸如鸡蛋、黄油等农产品期货。1876年,伦敦金属交易所(LME)诞生,这标志着世界商品期货合约市场的初步成型,经过100余年的发展,期货合约的种类不断完善。

我国目前有三家商品期货交易所。大连商品交易所主要期货合约有玉米、玉米淀粉、黄大豆1号、黄大豆2号、豆粕、豆油、棕榈油、纤维板、胶合板、鸡蛋、聚乙烯、聚氯乙烯、聚丙烯、焦炭、焦煤、铁矿石。郑州商品交易所主要期货合约有强麦、硬麦及普麦、棉花、白糖、PTA、菜籽油、早籼稻、玻璃、油菜籽、菜籽粕、动力煤、粳稻、晚籼稻、铁合金、棉纱。上海期货交易所主要期货合约有铜、铝、锌、铅、镍、锡、黄金、白银、螺纹钢、线材、热轧卷板、燃料油、石油沥青、天然橡胶。

附录A列出了大连商品交易所主要期货合约的交易规则,附录B列出了郑州商品交易所主要期货合约的交易规则,附录C列出了上海期货交易所主要期货合约的交易规则。这些交易规则主要涉及交易品种、交易单位、报价单位、最小变动价位、涨跌停板幅度、合约月份、交易时间、最后交易日、最后交割日、限仓制度、交割等级、交割地点、交易手续费、最低交易保证金、交割方式、交易代码等。

1.1.2 股指期货

股指期货的全称是股票指数期货,英文简称为 SPIF。股指期货是指以股价指数为标的物的标准化期货合约,双方约定在未来的某个特定日期,可以按照事先确定的股价指数的大小,进行标的指数的买卖,到期后通过现金结算差价来进行交割。作为期货交易的一种类型,股指期货交易与普通商品期货交易具有基本相同的特征和流程。

股指期货的诞生时间要远晚于商品期货,20世纪70年代,西方各国由于受石油危机的影响,利率波动剧烈,这也导致股价大幅波动,股票投资者迫切需要一种能够有效规避风险、实现资产保值的金融工具。于是,股指期货应运而生。

西方的股指期货起步时期要远早于我国,1982年2月24日,美国堪萨斯期货交易所推出第一份股指期货合约——价值线综合指数期货合约,这标志着第一份股指期货的诞生。在经历了1987年的美国股灾即著名的“黑色星期一”后,股指期货在1988—1990年间进入停滞期。在进入20世纪90年代后,股指期货又迅速发展起来。由于我国的两家证券交易所成立时间较晚,所以股指期货的推出时间也较晚。我国于2006年8月成立中国金融期货交易所(简称中金所),直到2010年4月我国境内首个股指期货品种——沪深300股指期货——才在中金所挂牌交易。这实现了境内股指期货市场从无到有的艰难跨越。

沪深300股指期货以沪深300指数为标的资产。沪深300指数由沪深A股中规模最大、流动性好的最具代表性的300只股票组成,于2005年4月8日正式发布。沪深300指数以2004年12月31日为基日,基点为1000点。

中证500股指期货以中证500指数为标的资产。为了反映市场上不同特征股票的整体表现,中证指数有限公司构建了以沪深300为基础的一系列指数。其中,中证500指数合约又被称为中证小盘500指数,以2004年12月31日为基日,基点为1000点。其样本空间内股票扣除沪深300指数样本股及最近一年日均总市值排名前300名的股票,剩余股票按照最近一年(新股为上市以来)的日均成交金额由高到低排名,剔除排名后20%的股票,然后将剩余股票按照日均总市值由高到低进行排名,选取排名在前500名的股票作为中证500指数样本股。

上证50股指期货以上证50指数为标的资产。上证50指数是以上证180指数样本股为样本空间,挑选上海证券市场规模大、流动性好的最具代表性的50只股票组成样本股(除市场表现异常并经专家委员会认定不宜作为样本的股票),以便综合反映上海证券市场最具市场影响力的一批龙头企业的整体状况。上证50指数自2004年1月2日起正式发布,该指数以2003年12月31日为基日,以1000点为基点。其目标是建立一个成交活跃、规模较大、主要作为衍生金融工具基础的投资指数。

附录D列出了中国金融期货交易所三大股指期货合约的交易规则。

1.1.3 国债期货

国债期货(Treasury Future)是指通过有组织的交易场所预先确定买卖价格并于未来特定时间内进行钱券交割的国债派生交易方式。国债期货属于金融期货的一种,是一种高级的金融衍生工具。它是在20世纪70年代美国金融市场不稳定的背景下,为满足投资者规避利率风险的需求而产生的。美国国债期货是全球成交最活跃的金融期货品种之一。1976年1月,美国的第一张国债期货合约是美国芝加哥商业交易所(CME)推出的90天期的短期国库券期货合

约,这是世界上第一份国债期货合约。2013年9月6日,国债期货正式在中国金融期货交易所上市交易,这标志着我国金融期货市场的进一步完善。我国国债期货分为五年期国债期货和十年期国债期货。附录E列出了中国金融期货交易所五年期国债期货和十年期国债期货的交易规则。

无论是股指期货还是国债期货,都具有价格发现和套期保值的功能,但当股指期货和国债期货过度交易时,却成为股市和债市暴涨暴跌的助推器,反而不利于股市和债市稳定。由于我国在2015年6月15日至7月8日的17个交易日中,上证综指下跌32%,千股跌停、千股停牌令市场遭遇流动性危机,因而中金所、上交所和深交所连续出台了多条金融期货限制性措施,对股指期货和国债期货的成交量影响显著。附录E给出了按时间先后排列的中金所、上交所和深交所出台的限制性政策。

1.2 期权

期权是指赋予投资者在未来一定期限内按双方约定的价格(或行权价)购买或出售一定数量标的资产的权利的合约。依据期权交易所不同、期权投资者权利不同、期权行权价不同、期权行权期限不同和期权标的资产不同,期权又有多种不同的分类。例如,依据交易所不同可基本分为场内期权和场外期权,依据投资者权利不同可基本分为看涨期权和看跌期权,依据行权价不同可基本分为标准期权和奇异期权,依据行权期限不同可基本分为欧式期权、美式期权和百慕大式期权,依据标的资产不同可基本分为实物期权和金融期权。

1973年,最初的标准化期权合约(看涨期权)诞生于芝加哥期权交易所(CBOE)。1983年,首份股票指数期权(标普500指数期权)在芝加哥商业交易所(CME)开始交易,首份利率期权(美债期权)在芝加哥期权交易所交易,首份外汇期权在加拿大蒙特利尔交易所(MX)交易。1984年,外汇期货期权开始在芝加哥商业交易所的国际货币市场(IMM)登台。

我国目前在交易所正式上市交易的场内期权有两类:一类是股指期货,如上海证券交易所的上证50ETF期权属于标准的欧式股指期货;另一类是期货期权,如郑州商品交易所的白糖期权和大连商品交易所的豆粕期权属于标准的美式期货期权。附录F给出了我国上证50ETF期权、白糖期权和豆粕期权的交易规则。

我国场外期权主要有四类:

(1) 标准香草式期权。标准香草式期权即标准的看涨期权和看跌期权,其构造较为简单,又分为欧式期权和美式期权。欧式期权是指期权的多头只能在期权到期日当天或到期日前某一规定的时间才能行权,美式期权是指期权的买入方可以在期权到期前的任意时间行权。因为美式期权多头承担的风险要小于欧式期权多头承担的风险,因而美式期权的价格一般要高于欧式期权的价格。

(2) 价差式期权。价差式期权包括牛市价差期权和熊市价差期权。牛市价差期权的特点是当观察日挂钩标的价格未触及一个较低约定价格,则享受一个较低的固定收益;当观察日挂钩标的价格介于较低约定价格和较高约定价格之间,则享受一个浮动收益,具体收益取决于标的价格与较低约定价格的差距,差距越大收益越高;当观察日挂钩标的价格高于较高约定价格,则享受一个较高的固定收益。熊市价差期权则是牛市价差期权的一个镜像。例如,真融宝变形金猪37期理财产品就是一个典型的牛市价差期权。该理财产品的封闭期为一个月,最

低投资门槛为 500 元, 投资收益与黄金 AU1706 的价格 (以上海期货交易所公布数据为准) 挂钩。享受最低为 5%、最高为 20% 的浮动收益, 浮动收益与黄金 AU1706 的当日收盘价相关。投资者在期初可以选择买涨或买跌, 以看跌为例: 若到期日与开始日相比黄金收盘价上涨, 则年化收益为 $5\% + \text{首末两日涨幅} \times 1.5$, 最低 5%, 最高 20% (若首末两日涨幅超过 10%, 则年化收益恒为 20%)。也就是说, 当金价上涨 $x\%$ 时 ($x < 10$), 投资者所获得的浮动收益为 $5\% + 1.5x\%$; 若到期日与开始日相比黄金收盘价下跌, 则年化收益为 5%。

(3) 二值期权。二值期权包括二值看涨期权和二值看跌期权, 即 0-1 期权。二值期权与标准期权最大的不同之处在于其收益具有不连续的特点。当标的资产的价格达到事先约定的水平时, 期权的空头支付期权的多头某一固定的金额, 否则不支付任何金额。例如, 真融宝的涨涨牛理财产品就是一个典型的二值期权: 若到期日和开始日两日相比, 沪深 300 指数收盘价上涨 $x\%$, 则年化收益为 $5\% + \text{涨幅 } x\%$, 按股市涨幅 15% 封顶; 如果到期日和开始日两日相比, 沪深 300 指数收盘价下跌, 或者开始日和到期日中间有任何一天沪深 300 指数收盘价上涨超过 15%, 则最终年化收益为 5%。

(4) 鲨鱼鳍式期权。鲨鱼鳍式期权包括单边鲨鱼鳍式期权和双边鲨鱼鳍式期权, 即设置障碍价格的敲出期权。鲨鱼鳍式期权又称敲出期权, 是指设置一个“敲出价格”, 如果标的物波动维持在敲出价格以内, 这个期权就是一个普通的看涨或是看跌期权; 一旦价格波动超越了敲出价格, 该期权将自动作废。利用鲨鱼鳍式期权发行理财产品的做法广受投资者青睐, 这类产品有机会获取较高的投资收益, 因此逐渐获得越来越多投资者的喜爱。例如, 某投资公司发行一个敲出价格为当前标的价格 115% 的看涨鲨鱼鳍式期权理财产品, 最低投资收益为 4%。如果到期前行情突破 115%, 则期权作废, 投资者收益为 4%; 如果行情在到期前未超过 115%, 那它就是一个普通的看涨期权, 当行情超过 104% 的时候行情涨多少投资者就赚多少, 若行情未超过 104%, 则投资者可获得最低收益 4%。这个例子是一个单边看涨鲨鱼鳍式期权, 单边看跌鲨鱼鳍式期权是设置一个向下敲出价格, 如果行情跌破, 则期权失效, 如果到期前未曾跌破, 则就是一个标准的看跌期权。双边鲨鱼鳍式期权即同时设置一个向上敲出价和向下敲出价, 如果行情突破这个区间则期权失效, 未曾突破则该期权就是一个宽跨式期权。

1.3 牛熊证

牛熊证与衍生权证同属结构性产品, 是一种杠杆投资工具, 牛熊证能追踪相关资产的表现而无须支付购入实际资产的全数金额。牛熊证有牛证和熊证之分, 投资者可以看好或看淡相关资产而选择买入牛证或熊证。牛熊证由第三者发行, 发行商通常是投资银行, 与香港交易所及相关资产皆没有任何关联。牛熊证的有效期由 3 个月至 5 年不等, 并只会以现金结算。不过, 牛熊证在发行时有附带条件: 在牛熊证有效期内, 如相关资产价格触及上市文件内指定的水平 (称为“收回价”), 发行商会即时收回有关牛熊证。若相关资产价格是在牛熊证到期前触及收回价, 牛熊证将提早到期并即时终止买卖, 在上市文件原定的到期日即不再有效。

牛熊证的主要特色有:

(1) 牛熊证价格变动趋向贴近相关资产的价格变动 (即对冲值接近 1)。因此, 若相关资产的价值上升, 相等权益比率的牛证的价值一般也会按接近等值上升, 而相等权益比率的熊证的价值则一般会按接近等值下降。牛熊证的这种特色为投资者提供了一种可紧贴相关资产价格走向的产品, 而且与其他结构性产品相比其价格透明度较高。然而, 在牛熊证相关资产的价格

接近收回价时，牛熊证的价格变动可能会波动较大，甚至与相关资产价格的变动不成比例。

(2) 牛证的收回价必定等同或高于行使价，熊证的收回价则必定等同或低于行使价。若相关资产价格在到期前任何时候触及收回价，牛熊证即提早到期，必须由发行商收回，其买卖也会即时终止。整个过程称为“强制收回事”。

牛熊证有两类：N类和R类。N类牛熊证是指收回价等同行使价的牛熊证，不设“剩余价值”(Residual Value)。一旦相关资产的价格触及或超越收回价，牛熊证持有人将不会收到任何现金款项。R类牛熊证是指收回价有别于行使价的牛熊证。若出现强制收回事，牛熊证持有人可收回少量现金款项(即“剩余价值”)。但在最坏情况下，可能没有剩余价值。当R类牛证被收回时，其剩余价值为根据上市文件条款厘定的结算价减去行使价之正差额。牛证的结算价不可低于相关资产在强制收回事后至下一个交易时段内的最低成交价。相反，当R类熊证被收回时，其剩余价值为行使价减去根据上市文件条款厘定的结算价之正差额。熊证的结算价不可高于相关资产在强制收回事后至下一个交易时段内的最高成交价。开市前时段及上午交易时段视为同一交易时段。然而，若出现结算价触及或超越行使价的最坏情况，则可能没有任何剩余价值。若将带有相同行使价的N类牛熊证及R类牛熊证做比较，R类会在一个较早出现的价格水平被收回。

若到期前没有被收回，牛熊证可持有至到期或于到期前在交易所的交易时段内出售。就牛证而言，若一直持有至正常到期，届时其现金结算款项将为相关资产的结算价(于计值日厘定)减去行使价的正差额。就熊证而言，若一直持有至正常到期，届时其现金结算款项将为行使价减去相关资产的结算价(于计值日厘定)的正差额。若属港股牛熊证，结算价将根据最后交易日相关资产的收市价确定。若属恒生指数及恒生中国企业指数的牛熊证，结算水平与到期的指数期货合约的结算水平相同。若属海外股份、商品或其他指数的牛熊证，投资者应参考市文件中有关结算价的厘定细节。

本章复习要点

商品期货 股指期货 沪深300股指期货 中证500股指期货 上证50股指期货 国债期货 实物期权 金融期权 股指期权 期货期权 上证50ETF期权 白糖期权 豆粕期权 场内期权 场外期权 标准香草式期权 看涨期权 看跌期权 欧式期权 美式期权 价差式期权 牛市价差期权 熊市价差期权 二值期权 二值看涨期权 二值看跌期权 鲨鱼鳍式期权 单边鲨鱼鳍式期权 双边鲨鱼鳍式期权 敲出期权 牛熊证

第2章 资产组合的均值—方差分析、效率前沿与市场线

2.1 资产与资产组合

2.1.1 资产——风险资产与无风险资产

资产是指能给投资者在未来带来收益的实物形态或非实物形态的物品。房地产、古董、字画、贵金属等属于实物资产；股票、债券、存款、期货、期权等属于非实物资产。

风险资产是指未来收益不确定的资产。

无风险资产是指未来收益确定的资产。

§ 问题：

- (1) 银行活期储蓄和定期存款是否属于无风险资产？
- (2) 国债是否属于无风险资产？市政债券、企业债券、公司债券、金融债券是否属于风险资产，它们与国债在收益与风险方面有哪些区别？
- (3) 上市公司优先股是否属于无风险资产？
- (4) 保本或不保本的银行理财产品、固定收益分红的保险产品是否属于无风险资产？
- (5) 期货既然具有套期保值功能，那么股指期货与股指构造的套期保值头寸是否属于无风险资产？
- (6) 不具有买空与卖空机会的无套利资产组合是否属于无风险资产（组合）？

2.1.2 资产收益与风险的度量

资产的收益是在未来实现的，可能是确定的，也可能是不确定的，因此可以将资产未来收益看作一个随机变量，资产收益用期望值来度量，即期望收益，资产风险用实际收益对期望收益的偏离来度量，即方差或标准差。

通常，相对于资产绝对收益，投资者更关心资产相对收益，即资产收益率。设资产收益率为 r ，则：对风险资产而言，未来收益不确定，期望收益率为 $E(r)$ ，风险为 $\text{Var}(r) = \sigma_r^2$ ；对无风险资产而言，未来收益确定，因而期望收益率为无风险收益率，风险为零风险，即 $E(r) = r_f$ ， $\text{Var}(r) = 0$ 。

§ 问题：

- (1) 两种风险资产（组合）是否可以构成无风险资产？
- (2) 两种以上风险资产（组合）是否可以构成无风险资产？

2.1.3 资产组合

资产组合是指投资者同时投资于两种或两种以上的资产，可以同时投资于两种或两种以上的风险资产，也可以同时投资于风险资产和无风险资产。考虑两种简单的情形，第一种情形的资产组合由两种风险资产组成，第二种情形的资产组合由一种风险资产和一种无风险资产组成。

情形（一）：两种风险资产组成的资产组合

假定两种资产均为风险资产，两种风险资产的未来收益分别为 r_1 和 r_2 ，期望收益率分别为 $E(r_1)$ 和 $E(r_2)$ ，风险度量标准差分别为 σ_1 和 σ_2 ，投资者对两种风险资产的投资比例分别为 w_1 和 w_2 ，且投资比例没有买空和卖空限制。进一步，假定两种风险资产组成的资产组合的未来收益为 r_p ，期望收益率为 $E(r_p)$ ，风险度量标准差为 σ_p 。则资产组合的收益 r_p 为

$$r_p = w_1 r_1 + (1 - w_1) r_2 \quad (2.1.1)$$

期望收益率 $E(r_p)$ 为

$$E(r_p) = w_1 E(r_1) + (1 - w_1) E(r_2) \quad (2.1.2)$$

方差 σ_p^2 为

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + (1 - w_1)^2 \sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1) \text{Cov}(r_1, r_2) \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + (1 - w_1)^2 \sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1) \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

式中， $\rho_{1,2}$ 为两种风险资产的相关系数。

情形（二）：一种风险资产与一种无风险资产组成的资产组合

假定两种资产为一种风险资产和一种无风险资产：风险资产的未来收益为 r_1 ，期望收益率为 $E(r_1)$ ，风险度量标准差为 σ_1 ；无风险资产的未来收益为 r_f ，期望收益率为 $E(r_f) = r_f$ ，风险度量标准差为 0。投资者对两种风险资产的投资比例分别为 w_1 和 w_2 ，且投资比例没有买空和卖空限制。进一步，假定两种风险资产组成的资产组合的未来收益为 r_p ，期望收益率为 $E(r_p)$ ，风险度量标准差为 σ_p 。则资产组合的收益 r_p 为

$$r_p = w_1 r_1 + (1 - w_1) r_f \quad (2.1.4)$$

期望收益率 $E(r_p)$ 为

$$E(r_p) = w_1 E(r_1) + (1 - w_1) r_f \quad (2.1.5)$$

方差 σ_p^2 为

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 \quad (2.1.6)$$

§ 问题：

- (1) 三种风险资产组成的资产组合的期望收益率与方差的形式如何？
- (2) n 种风险资产组成的资产组合的期望收益率与方差的形式如何？
- (3) 风险资产组合与无风险资产组成的资产组合的期望收益率与方差的形式如何？

2.2 风险厌恶与均值—方差效用函数

2.2.1 期望效用函数

20 世纪 50 年代，冯·诺依曼（Von Neumann）和摩根斯坦（Morgenstern）在公理化假设