计算固体力学

Computational Solid Mechanics

孙 雁 李红云 刘正兴 编著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

计算固体力学

Computational Solid Mechanics

孙　雁　李红云　刘正兴　编著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书以变分原理为理论基础，对有限元法的理论、建模、列式及求解做了详尽的论述。在此基础上，逐个推导了杆、梁、板、壳和等参单元等，重点介绍了目前工程中广泛应用的矩阵位移法。以杆系结构为例介绍了有限元程序设计和编写方法。

本书还介绍了线弹性问题、非线性问题和动力问题的有限元法。对计算固体力学新的研究成果，如离散系统的辛方法、辛体系下的新单元和精细算法等做了详细介绍。以 ANSYS 程序为例，讲解了通用软件在结构分析方面的应用。

本书是在参考了大量文献资料的基础上，结合作者长期教学经验和科研成果编撰而成的。本书可作为机械、土木、船舶与海洋、航空航天等工程专业本科生和研究生教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算固体力学 / 孙雁，李红云，刘正兴编著. —上海：上海交通大学出版社，2019
ISBN 978-7-313-20985-6

Ⅰ. ①计… Ⅱ. ①孙… ②李… ③刘… Ⅲ. ①计算固体力学 Ⅳ. ①O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 036043 号

计算固体力学

编　　著：孙　雁　李红云　刘正兴
出版发行：上海交通大学出版社
地　　址：上海番禺路 951 号
邮政编码：200030
电　　话：021-64071208
印　　制：上海万卷印刷股份有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16
印　　张：23.5
字　　数：577 千字
版　　次：2019 年 8 月第 1 版
印　　次：2019 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-20985-6/O
定　　价：69.00 元

前　　言

有限元法是计算固体力学中最重要的方法，它从变分原理出发，通过分区插值，把二次泛函（能量积分）的极值问题化为一组线性代数方程。本书以变分原理为理论基础，对有限单元法的理论、建模、列式与求解做了详尽的论述，同时也介绍了基于结构力学和弹性力学建立有限元模型的一般方法。

基于假定单元位移场，本书用最小势能原理逐个推导了杆、梁、板、壳、等参单元，重点介绍了目前工程中广泛应用的矩阵位移法。对有限元法和通用程序中最常用的一维、二维、三维等参单元，给出了详细论述，并以杆系结构为例详细地介绍了有限元程序的设计和编写。

在单元及其集成的基础上，本书对固体力学一些主要领域中的数值分析方法进行了由浅入深的论述，从线性弹性问题到几何非线性问题、材料非线性问题；从静力问题到动力问题、流固耦合问题，其中有机地结合各类问题，引入了线性方程组的解法、矩阵广义特征值的几种解法、动力响应问题的常规解法、暂态历程的精细积分法等一些数学方法。

迄今为止，各类工程的结构分析几乎全部采用有限元法。但是在科研领域，新的理论和方法不断出现，为计算力学的发展注入了新的活力。因此，本书着重介绍了钟万勰院士提出的离散系统的辛方法，以及在辛体系下提出的几种新单元。最后以 ANSYS 程序为例，介绍了通用软件在结构分析中的应用。

本书是在我的老师刘正兴教授主编的《计算固体力学》基础上，参考了大量文献资料，同时结合作者长期教学经验和科研成果汇编而成。李红云老师参与了全书编写讨论及部分章节的编写工作。本书可作为机械、土木、船舶与海洋、航空航天等工程专业本科生和研究生教材，也可作为工程技术人员的参考书。

我的同事陶昉敏老师参加了本书第五章的编写工作，特此表示感谢。

由于编者水平有限，书中不当之处，恳请读者不吝指正。

孙　雁

目　　录

绪论 …… 1

参考文献 …… 2

第一章　变分法基础 …… 4

第一节　历史上三个变分命题 …… 4
第二节　变分及其特性 …… 5
第三节　欧拉方程 …… 8
第四节　依赖于高阶导数的泛函 …… 12
第五节　多个待定函数的泛函,最小作用量原理 …… 14
第六节　含有多个自变量函数的泛函 …… 17
第七节　条件极值问题 …… 22
参考文献 …… 25

第二章　弹性理论和能量变分原理 …… 26

第一节　引言 …… 26
第二节　小位移弹性理论的基本方程 …… 28
第三节　功和余功,应变能和余应变能 …… 30
第四节　虚功原理 …… 34
第五节　基于虚功原理的近似解法 …… 38
第六节　最小势能原理 …… 42
第七节　余虚功原理 …… 44
第八节　最小余能原理 …… 46
第九节　广义变分原理 …… 48
第十节　传统变分原理的小结 …… 56
第十一节　修正的变分原理 …… 57
参考文献 …… 63
习题 …… 63

第三章　基于假定位移场的几种单元 …… 64

第一节　建立单元模型的一般方法　杆单元 …… 64
第二节　梁单元 …… 66
第三节　矩阵位移法 …… 75
第四节　平面三角形单元 …… 79
第五节　载荷的移置 …… 83
第六节　矩形薄板单元 …… 85
第七节　三角形薄壳单元 …… 93
第八节　改善刚度矩阵的方法 …… 102
第九节　轴对称问题的有限单元 …… 107
参考文献 …… 111
习题 …… 111

第四章　等参单元 …… 114

第一节　形函数 …… 114
第二节　坐标变换 …… 118
第三节　位移和应变 …… 121
第四节　矢量运算 …… 124
第五节　刚度矩阵和节点载荷 …… 129
第六节　数值积分的应用 …… 130
第七节　三角形、四面体和三棱体等参单元 …… 135
第八节　厚壳单元 …… 142
参考文献 …… 151
习题 …… 151

第五章　杆系结构的程序设计 …… 153

第一节　简介 …… 153
第二节　输入与输出 …… 154
第三节　单元刚度矩阵的形成 …… 157
第四节　单元刚度矩阵的坐标转换 …… 158
第五节　结构刚度矩阵的形成 …… 162
第六节　约束处理 …… 167

第七节 解线性方程组……………………………………………………………… 168
第八节 单元节点力和应力的计算…………………………………………………… 176
第九节 空间桁架有限元分析程序…………………………………………………… 179
第十节 刚架结构的程序设计………………………………………………………… 188
参考文献……………………………………………………………………………… 196

第六章 几何非线性问题……………………………………………………………… 197

第一节 小位移弹性问题中的增量变分原理………………………………………… 197
第二节 有限变形的基本理论………………………………………………………… 203
第三节 有限变形分析中的有限单元………………………………………………… 220
参考文献……………………………………………………………………………… 231
习题…………………………………………………………………………………… 231

第七章 材料非线性问题……………………………………………………………… 232

第一节 弹塑性应力-应变关系 ……………………………………………………… 232
第二节 线性化的逐步增量法………………………………………………………… 245
第三节 热弹塑性问题………………………………………………………………… 258
第四节 非线性问题的一般解法……………………………………………………… 264
参考文献……………………………………………………………………………… 268
习题…………………………………………………………………………………… 268

第八章 动力问题的有限元法………………………………………………………… 270

第一节 弹性系统的动力方程………………………………………………………… 270
第二节 质量矩阵和阻尼矩阵………………………………………………………… 272
第三节 结构的自振特性……………………………………………………………… 276
第四节 矩阵特征值问题的求解方法………………………………………………… 280
第五节 结构的动力响应……………………………………………………………… 286
第六节 弹性结构在流体介质中的耦合振动………………………………………… 291
参考文献……………………………………………………………………………… 295
习题…………………………………………………………………………………… 295

第九章 离散系统的辛方法…………………………………………………………… 297

第一节 一根弹簧受力变形的启示…………………………………………………… 297

第二节 两段弹簧结构的受力变形,互等定理 …… 300
第三节 多区段受力变形的传递辛矩阵求解 …… 304
第四节 势能区段合并与辛矩阵乘法的一致性 …… 307
第五节 多自由度问题,传递辛矩阵群 …… 308
第六节 拉杆的有限元近似求解 …… 311
第七节 几何形态的考虑 …… 313
第八节 群 …… 316
第九节 分析动力学与最小作用量变分原理 …… 317
参考文献 …… 321

第十章 辛体系与新单元 …… 322

第一节 不可压缩材料分析的界带有限元 …… 322
第二节 奇点分析元 …… 326
第三节 电磁共振腔的节点有限元法 …… 330
第四节 时间-空间混合有限元 …… 335
参考文献 …… 341

第十一章 ANSYS 有限元分析软件及应用 …… 342

第一节 ANSYS 软件简介 …… 342
第二节 ANSYS 软件的典型分析过程 …… 343
参考文献 …… 365

绪 论

计算机、通信卫星、互联网的出现将社会推向了信息化时代。科技已由过去的以实验、理论为其两大支柱的体系发展成为以实验、理论、计算为其三大支柱的体系。计算力学、有限元法的出现，推动了大规模科学与工程计算的发展。计算力学作为力学学科的一个重要分支，将结构力学、弹塑性力学、结构动力学、板壳理论及稳定性理论和数学计算方法、计算机技术互相结合、渗透，融为一体，极大地提高了力学解决各种工程实际问题的能力。计算力学已成为工程专业的一门重要课程。

一、计算力学发展简述

弹性理论的成熟可追溯到19世纪的纳维耶(Navier)和圣韦南(Saint-Venant)。矩阵结构分析方法在那之后80年左右形成。在那一段时间里，力学研究极大的困难在于计算太慢，计算量过于庞大。人们在实际计算时，只能求解很有限的若干个未知数的代数联立方程。直到1932年哈迪·克罗斯(Hardy Cross)发展了刚架分析的矩阵分配法，使结构分析的数值方法有了一个飞跃。

20世纪40年代后期出现的计算机，受到了人们的热情关注，在之后的20年里得到了迅速发展。与此同时，适用于计算机的各种数值计算方法如矩阵分析、线性代数、微分方程差分格式等都得到了相应的发展。

1943年，柯朗(Courant)发表论文，提出了圣韦南扭转问题的变分形式的应力解。20世纪50—60年代，阿吉里斯(Argyris)、特纳(Turner)、克拉夫(Clough)、辛克维奇(Zienkiewicz)等都分别提出了函数插值或单元刚度的矩阵表示，对结构力学与有限元的计算机分析作出了巨大的推动。这是有限元法确立并开始大发展的主要标志。之后的一段时间成为建立各种有限元的风行时期。首先从处理小变形、小位移、弹性材料等问题开始，在杆件和平面问题中有了发展；然后建立了块元、板元、壳元等单元；之后向动力问题、稳定问题、非线性问题等方面拓展。与此同时，有限差分法在流体力学领域也得到了新的发展。

随着有限元法的发展，计算机有限元通用程序也随之出现，1963年威尔逊(Wilson)在其博士论文《二维结构的有限元分析》中，编制了解决平面弹性力学问题的通用程序。之后有限元通用程序进入了高速发展时期。威尔逊编写了有限元通用程序SAP，巴斯编写了非线性分析程序ADINA，美国国家航空航天局(NASA)发展了NASTRAN。从20世纪60年代起，我国的力学工作者也开始了对计算力学这一领域的研究。在钱令希先生的大力倡导和推动下，结构优化设计的研究得到了较大发展。大连理工大学研制了JIGFEX通用程序系统。

在此之后人们对这些软件开发的相关技术进行了深入研究，随着前处理、后处理软件及CAD系统的发展，引发了新兴学科的出现：计算机辅助工程CAE(Computer Aided Engineering)。可以说是计算力学的延伸造就了CAE软件和产业。随着最近30年计算机硬件、软件、互联网技术的高速发展，CAE软件的功能、性能、用户界面、可靠性和对各操作系统的适用性都得到极大

提高。目前国外代表性软件有 ABAQUS、ADAMS、ANSYS、FLUENT、NASTRAN等。国内的代表性软件有大连理工大学的自主集成系统 SiPESC。

二、计算力学的研究范围和内容

计算力学主要是应工程师的需求而发展的,它与工程需要紧密结合。计算力学在工程中的应用是通过程序系统来体现的。钱学森先生曾指出,力学加计算机将成为 21 世纪工程设计的主要手段。

计算力学是计算机科学、计算数学与力学学科相结合的产物,是根据力学中的理论,利用现代电子计算机和各种数值方法,解决力学中实际问题的一门新兴学科。它横贯力学的各个分支,不断扩大各个领域中力学的研究和应用范围,同时也在发展自己的理论和方法。

随着理论研究的不断深入和工程应用的不断普及,计算力学的研究范围已拓展到固体力学、流体力学、热力学、土木工程、航空航天、船舶海洋、核电、材料工程、电磁场等诸多领域。

计算力学的研究内容主要有离散化方法、数值算法和软件三方面。宏观力学量都是时间和空间的连续量,为了能被计算机处理,就必须化为离散量。这方面有限元法就是最成功的例子。目前边界元法、无网格法、半解析法等多种方法都在不断发展中。数值计算方法的研究是计算力学的核心内容,一个好的算法可以使解题效率成倍增长,比如稀疏矩阵的消去法、波前法,求解动力问题的子空间迭代法、精细积分法等。把算法通过计算机语言,变成一系列指令,教给计算机完成,就形成了软件。软件还应包括前后处理、计算机辅助设计等,它是计算机科学、数学和力学相结合的产物。

三、计算力学的研究步骤

一般来说,计算力学研究实际工程问题的主要步骤是:用工程和力学的理论建立计算模型;推导对应的数学表达方程;通过变分原理等方法进行离散化处理,寻求最恰当的数值计算方法;编制计算程序进行数值计算,在计算机上求出答案;运用工程和力学的概念判断和解释所得结果和意义,作出科学结论。

计算力学借助计算机求解力学问题,探索力学规律,处理力学数据,是力学、数学和计算机科学的交叉学科。随着计算力学在工程领域中越来越广泛的应用,它在国民经济建设和科学技术发展中将发挥更大的作用。

参考文献

[1] 钟万勰. 计算结构力学微机程序设计[M]. 北京:水利电力出版社,1986.

[2] Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49: 1-23.

[3] Argyris J H. Energy theorems and structural analysis [J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 1954, 26(11): 383-394.

[4] Turner M J. Stiffness and deflection analysis of complex structures [J]. J. aero. sci, 1956, 23(9): 805-823.

[5] Zienkiewicz O C, Taylor R L, Zhu J Z. The finite element method: its basis and fundamentals [M]. 7th ed. Singapore: Elsevier (Singapore) Pte Ltd., 2015.

[6] 武际可. 力学史[M]. 上海:上海辞书出版社,2010.
[7] Bathe K J. 有限元法:理论、格式与求解方法[M]. 第2版. 轩建平,译. 北京:高等教育出版社,2016.
[8] 钟万勰. 一个多用途的结构分析程序 JIGFEX(一)[J]. 大连工学院学报,1977,17(3):19-42.
[9] 钟万勰. 一个多用途的结构分析程序 JIGFEX(二)[J]. 大连工学院学报,1977,17(4):14-35.
[10] 张洪武,陈飙松,李云鹏,等. 面向集成化 CAE 软件开发的 SiPESC 研发工作进展[J]. 计算机辅助工程,2011,20(2):39-49.

第一章　变分法基础

第一节　历史上三个变分命题

变分法是数学的一个分支，它主要研究的是在一组容许函数中选定一个函数，使给定的泛函取极值，亦即它研究函数的函数（称之为泛函）的极值性质。历史上对变分法的发展有巨大影响的有这样几个问题。

一、最速降线问题

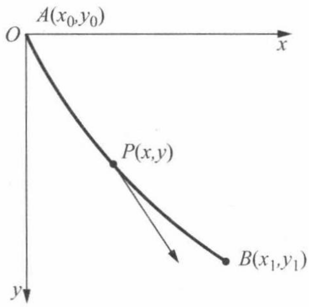

图 1-1

1696 年约翰·伯努利（John Bernoulli）提出最速降线问题：确定一条曲线连接不在同一铅垂线上的两点 A 和 B（见图 1-1），使它具有这样的性质，即当有一重物沿这条曲线从 A 到 B 受重力作用自由下滑，不考虑摩擦力时，所需时间为最少。由运动学可知，总的下滑时间为

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{1-1}$$

式中，g 是重力加速度。显然对于通过 A、B 两点的不同的曲线 $y(x)$ 将有不同的时间 T 与之对应，但其中仅有一个使 T 取最小值。

二、短程线问题

求曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上所给定两点 A,B 间长度最短的曲线，如图 1-2 所示。问题归结为求泛函

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{1-2}$$

的极小值，其中 $y(x)$，$z(x)$ 两个函数应当符合 $\varphi(x,y,z)$ 这个条件。这问题不像最速降线问题那样是无条件的，故称为“条件变分”问题。这个问题最早由约翰·伯努利在 1697 年解决。但是关于这一类问题的普遍理论后来是由欧拉（L. Euler）在 1744 年和拉格朗日（L. Lagrange）在 1762 年解决的。

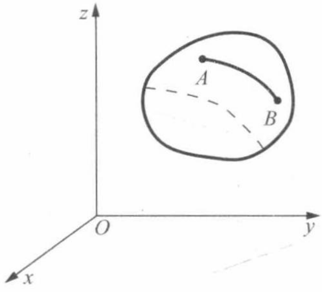

图 1-2

三、等周问题

在长度一定的封闭曲线中，什么样的曲线所围面积最大？在古希腊时已经知道这个问题的答案是一个圆，但是它的变分特性是一直到 1744 年才由欧拉察觉的。

将所给曲线用参数表达为 $x=x(s)$，$y=y(s)$。因为是封闭曲线，所以有固定边界条件

$$x(s_1)=x(s_2),\ y(s_1)=y(s_2) \tag{1-3}$$

曲线所围面积

$$R=\iint\limits_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_C(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \tag{1-4}$$

这条曲线的周长

$$L=\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}\mathrm{d}s \tag{1-5}$$

等周问题归纳如下：

在满足边界（这里是端点）固定条件式(1-3)及限制条件式(1-5)下，从一切 $x=x(s)$，$y=y(s)$的函数中选取一对函数，使式(1-4)的泛函 R 为最大。这是一个条件变分命题，但其条件本身也是一个泛函。

这三个历史上有名的变分命题，是 17 世纪末期提出的，又都是 18 世纪上半叶解决的。解决过程中，欧拉和拉格朗日创立了现在大家熟知的变分法。这个变分法后来被广泛地用在力学的各个方面，对力学的发展起了很重要的作用。

第二节　变分及其特性

一、泛函的定义

如果对于某一类函数 $y(x)$中的每一个函数 $y(x)$，都有一 Π 值与之对应；或者数 Π 对应于函数 $y(x)$的关系成立，则变量 Π 称为函数 $y(x)$的泛函，记为 $\Pi=\Pi[y(x)]$。

函数是变量和变量的关系，而泛函则是变量与函数的关系，可以说泛函是一种广义的函数。

二、变分

泛函 $\Pi[y(x)]$的宗量 $y(x)$的增量如果很小时，就称之为变分，用 $\delta y(x)$或 δy 来表示。δy 是指 $y(x)$和跟它相接近的 $y_1(x)$之差，即

$$\delta y(x)=y(x)-y_1(x) \tag{1-6}$$

δy 也是 x 的函数，只是 $\delta y(x)$在指定的 x 域中都是微量。此处假定 $y(x)$是在接近 $y_1(x)$的一类函数中任意改变的。

曲线 $y=y(x)$，$y=y_1(x)$要怎样才算是相差很小或很接近？最简单的理解是在一切值 x 上，$y(x)$和 $y_1(x)$之差的模都很小；也就是 $y=y(x)$，$y=y_1(x)$的曲线的纵坐标到处都很接近。图 1-3 和图 1-4 所示的两曲线都是很接近的。

实际情况是，图 1-4 中两曲线不仅它们的纵坐标接近，而且在对应点的切线方向之间也是接近的；但图 1-3 中的两条曲线则不然，虽然它们的纵坐标是接近的，但在对应点的切线方向之间并不接近。把图 1-3 中的两条曲线称为“零阶接近度”曲线。在这种接近度的曲线中 $y(x)-y_1(x)$的值到处很小，但 $y'(x)-y'_1(x)$的值就不一定很小。图 1-4 中的两条曲线则称为具有“一阶接近度”。在这类曲线中，$y(x)-y_1(x)$，$y'(x)-y'_1(x)$的值到处都很小。

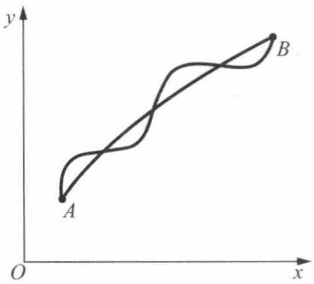

图 1-3 零阶接近度曲线

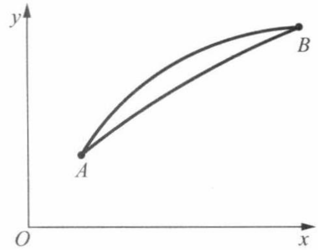

图 1-4 同时具有零阶和一阶接近度曲线

有时必须要求下列每个差的模都很小：

$$\left.\begin{array}{l}\delta y = y(x) - y_1(x),\quad \delta y' = y'(x) - y_1'(x),\\ \delta y'' = y''(x) - y_1''(x),\cdots,\quad \delta y^{(k)} = y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)\end{array}\right\} \tag{1-7}$$

则称 $y=y(x)$，$y=y_1(x)$这两条曲线有 k 阶接近度。接近度的阶数越高，曲线接近得越好。

在变分计算中，常常要求有较好的接近度。为此，拉格朗日曾引用一个小量 ε，使

$$\left.\begin{array}{l}\delta y = \varepsilon\eta(x) = y(x) - y_1(x)\\ \delta y' = \varepsilon\eta'(x) = y'(x) - y_1'(x)\\ \delta y'' = \varepsilon\eta''(x) = y''(x) - y_1''(x)\\ \cdots\cdots\\ \delta y^{(k)} = \varepsilon\eta^{(k)}(x) = y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)\end{array}\right\} \tag{1-8}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\delta y,\delta y',\delta y'',\cdots,\delta y^{(k)}$ 都保证是微量。从而保证了有 k 阶接近度，甚至更高阶的接近度。当然，如果在原则上认定 $\delta y,\delta y',\delta y'',\cdots,\delta y^{(k)}$ 是同级微量，则同样可以用 $\delta y,\delta y',\delta y'',\cdots,\delta y^{(k)}$ 进行变分，而不必引用 ε。在以后的变分计算中，有许多情况就是在这样一个默认的原则下进行的。

三、泛函的连续

如果对于 $y(x)$的微量改变，有相应的泛函 $\Pi(y(x))$的微量改变，则说泛函 $\Pi(y(x))$是连续的，也就是说：

如果对于一个任给的正数 ε，可以找到一个 δ，并当 $|y(x)-y_1(x)|<\delta$，$|y'(x)-y'_1(x)|<\delta,\cdots,|y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)|<\delta$ 时，能使 $|\Pi(y(x))-\Pi(y_1(x))|<\varepsilon$，就说泛函 $\Pi(y(x))$在 $y(x)=y_1(x)$处 k 阶接近连续。

四、泛函的变分

泛函的变分有两种定义。

(1) 对于 $y(x)$的变分 δy 所引起的泛函的增量定义为

$$\Delta\Pi = \Pi(y(x)+\delta y(x)) - \Pi(y(x)) \tag{1-9}$$

可以展开为线性的泛函项和非线性的泛函项

$$\Delta\Pi = L(y(x),\delta y(x)) + \phi(y(x),\delta y(x))\cdot\max|\delta y(x)| \tag{1-10}$$

其中，$L(y(x),\delta y(x))$对 $\delta y(x)$说来是线性的泛函项，即

$$L(y(x),c\,\delta y(x)) = cL(y(x),\delta y(x))$$

$$L(y(x),\delta y(x)+\delta y_1(x)) = L(y(x),\delta y(x)) + L(y(x),\delta_1(x))$$

典型的线性泛函有

$$L(y(x),\delta y(x)) = \int_{x_1}^{x_2}\{p(x,y)\delta y(x) + q(x,y)\delta y'(x) + r(x,y)\delta y''(x) + \cdots + t(x,y)\delta y^{(k)}(x)\}\mathrm{d}x \tag{1-11}$$

式(1-10)中的 $\phi(y(x),\delta y(x))\cdot\max|\delta y(x)|$ 是非线性泛函项，其中 $\phi(y(x),\delta y(x))$ 是与 δy 同阶或更高阶小量；$\max|\delta y(x)|$ 表示 $|\delta y(x)|$ 的最大值，且当 $\delta y(x)\to 0$ 时

$$\max|\delta y(x)|\to 0,\quad \phi(y(x),\delta y(x))\to 0$$

于是式(1-10)泛函的增量中对于 δy 说来是线性的那一部分，即 $L(y(x),\delta y(x))$ 就称为泛函的变分，用 $\delta\Pi$ 来表示：

$$\delta\Pi = L(y(x),\delta y(x)) \tag{1-12}$$

所以，泛函的变分是泛函增量的主部，而且这个主部对于变分 $\delta y(x)$ 来说是线性的。

(2) 拉格朗日的泛函变分定义：

泛函变分是 $\Pi(y(x)+\varepsilon\,\delta y(x))$ 对 ε 的导数在 $\varepsilon=0$ 时的值。因为根据式(1-9)、式(1-10)有

$$\Pi(y(x)+\varepsilon\,\delta y(x)) = \Pi(y(x)) + L(y(x),\varepsilon\,\delta y(x)) + \phi(y(x),\varepsilon\,\delta y(x))\varepsilon\max|\delta y(x)| \tag{1-13}$$

而且

$$L(y(x),\varepsilon\,\delta y(x)) = \varepsilon L(y(x),\delta y(x)) \tag{1-14}$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Pi(y(x)+\varepsilon\,\delta y(x)) = L(y(x),\delta y(x)) + \phi(y(x),\varepsilon\,\delta y(x))\cdot\max|\delta y(x)| + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{\phi(y(x),\varepsilon\,\delta y(x))\}\cdot\max|\delta y(x)|$$

因为当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$\phi(y(x),\varepsilon\,\delta y(x))\to 0$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{\phi(y(x),\varepsilon\,\delta y(x))\}\cdot\max|\delta y(x)|\to 0$$

故有

$$\left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Pi(y(x)+\varepsilon\,\delta y(x))\right|_{\varepsilon\to 0} = L(y(x),\delta y(x)) \tag{1-15}$$

这就证明了拉格朗日的泛函变分的定义为

$$\delta\Pi = \left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Pi(y(x)+\varepsilon\,\delta y(x))\right|_{\varepsilon\to 0} \tag{1-16}$$

五、泛函的极值

如果函数 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 附近的任意点上的值都不大(或不小)于 $y(x_0)$，也即

$$\mathrm{d}y = y(x) - y(x_0) \leqslant 0 \quad (或 \geqslant 0)$$

时，则称函数 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 上达到极大(或极小)值，而且在 $x=x_0$ 上有

$$\mathrm{d}y = 0 \tag{1-17}$$

对于泛函 $\Pi(y(x))$而言，也有类似的定义。

如果泛函 $\Pi(y(x))$在任何一条与 $y=y_0(x)$接近的曲线上的值不大（或不小）于 $\Pi(y_0(x))$，也即

$$\Delta\Pi = \Pi(y(x)) - \Pi(y_0(x)) \leqslant 0 \quad (\text{或} \geqslant 0) \tag{1-18}$$

时，则称泛函 $\Pi(y(x))$在曲线 $y=y_0(x)$上达到极大（或极小）值，而且在 $y=y_0(x)$上有

$$\delta\Pi(y(x)) = 0 \tag{1-19}$$

在这里，对于泛函的极值概念有进一步说明的必要，凡说到泛函的极大（或极小）值，主要是说泛函的相对的极大（或极小）值。也就是说，从互相接近的许多曲线来找一个最大（或最小）的泛函值。但是曲线的接近，有不同的接近度，因此在泛函的极大极小定义里，还应说明这些曲线有几阶的接近度。

如果对于与 $y=y_0(x)$的接近度为零阶的一切曲线而言，泛函在曲线 $y=y_0(x)$上达到极大（或极小）值，则就把这类变分叫作强变分，这样得到的极大（或极小）值称为强极大（或强极小）。如果只对于与 $y=y_0(x)$有一阶接近度的曲线 $y=y(x)$而言，泛函在 $y=y_0(x)$上达到极大（或极小）值，则称这种变分为弱变分，这样得到的极大或极小值称为弱极大（或弱极小）。

显然，当泛函在 $y=y_0(x)$曲线上有强极大或强极小时，在该曲线上也会有弱极大或弱极小。强极值与弱极值的区别在推导极值的必要条件时不重要，但在研究极值的充分条件时是很重要的。

第三节　欧拉方程

一、变分法的基本预备定理

这里介绍后面要用到的变分法基本预备定理，但不进行证明。

如果函数 $F(x)$在线段(x_1,x_2)上连续，且对于只满足某些一般条件的任意选定的函数 $\delta y(x)$，有

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\delta y(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1-20}$$

则在线段(x_1,x_2)上有

$$F(x) = 0 \tag{1-21}$$

$\delta y(x)$的一般条件是：

(1) 一阶或若干阶可微。

(2) 在线段(x_1,x_2)的端点处为零。

(3) $|\delta y(x)|<\varepsilon$，或$|\delta y(x)|<\varepsilon$ 和$|\delta y'(x)|<\varepsilon,\cdots$

对于多变量的问题，也有类似的变分预备定理。如果 $F(x,y)$在(x,y)平面内 S 域中连续，设 $\delta Z(x,y)$在 S 域的边界上为零，且有

$$|\delta Z| \leqslant \varepsilon, \quad |\delta Z'_x| < \varepsilon, \quad |\delta Z'_y| < \varepsilon \tag{1-22}$$

还满足连续性及一阶或若干阶的可微性，对于这样选取的 $\delta Z(x,y)$而言，有

$$\iint_S F(x,y)\delta Z(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{1-23}$$

则在域 S 内有

$$F(x,y)=0 \tag{1-24}$$

二、泛函极值问题的求解

我们先来求解最速降线问题：在满足固定边界（这里是端点）条件

$$y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1$$

的一切 $y(x)$ 的函数中，求泛函

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)}}\mathrm{d}x \tag{1-25}$$

为极值的函数。

设 $y(x)$ 为满足使泛函取极值的解，与 $y(x)$ 相接近的函数为 $y(x)+\delta y(x)$，其导数为 $y'(x)+\delta y'(x)$，于是泛函的增量

$$\Delta T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\left\{\sqrt{\frac{1+(y'+\delta y')^2}{y+\delta y}}-\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\right\}\mathrm{d}x \tag{1-26}$$

按 $\delta y,\delta y'$ 作为小量的泰勒展开，有

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+(y'+\delta y')^2}{y+\delta y}}=&\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}+\frac{y'}{\sqrt{y[1+(y')^2]}}\delta y'-\\&\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\delta y+O(\delta^2)\end{aligned} \tag{1-27}$$

式中，$O(\delta^2)$ 代表 $\delta y,\delta y'$ 的二次以上的高阶项，当 δy、$\delta y'$ 都很小时（亦即 $y+\delta y$ 与 y 有一阶接近度时），按定义，泛函的变分就是略去 $O(\delta^2)$ 诸项以后的线性主部。于是泛函的极值条件可以写成

$$\delta T=\frac{1}{2g}\int_0^{x_1}\left\{\frac{y'}{\sqrt{y[1+(y')^2]}}\delta y'-\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\delta y\right\}\mathrm{d}x=0 \tag{1-28}$$

通过分部积分，上式右边 $\{\cdots\}$ 中的第一项可简化为

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1}\frac{y'}{\sqrt{y[1+(y')^2]}}\delta y'\mathrm{d}x=&\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{y'}{\sqrt{y[1+(y')^2]}}\delta y\right\}\mathrm{d}x-\\&\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{y'}{\sqrt{y[1+(y')^2]}}\right\}\delta y\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1-29}$$

因为 $y(x)+\delta y(x)$ 也通过 $y(0)+\delta y(0)=0$ 和 $y(x_1)+\delta y(x_1)=y_1$ 这两点，而又因 $y(x_1)=y_1$，$y(0)=0$，故有

$$\delta y(0)=0,\quad \delta y(x_1)=0$$

于是式(1-29)右端第一项经积分

$$\begin{aligned}&\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{y'}{\sqrt{y[1+(y')^2]}}\delta y\right\}\mathrm{d}x\\=&\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x_1)[1+(y'(x_1))^2]}}\delta y(x_1)-\frac{y'(0)}{\sqrt{y(0)[1+(y'(0))^2]}}\delta y(0)\end{aligned}$$

则式(1-28)可化成