

微结构

固体中的波模型及孤立波

WEIJIEGOU GUTIZHONG DE BOMOXING
JI GULIBO

■ 那仁满都拉 著



冶金工业出版社
www.cnmp.com.cn

微结构固体中的 波模型及孤立波

那仁满都拉 著

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2018

内 容 提 要

本书根据 Mindlin 微结构弹性固体理论以及近年来的相关发展理论,主要论述了如何系统地建立微结构固体中波传播模型,以及怎样利用动力系统的定性分析理论和分岔理论来证明微结构固体中孤立波的存在性问题。本书共分 5 章,第 1 章介绍了微结构固体基础理论;第 2~4 章介绍了不同的微结构固体中波传播模型的建立以及孤立波存在性的证明;第 5 章介绍了微结构固体中孤立波传播稳定性的数值验证以及一种波导中孤立波传播稳定性的数值验证。

本书可供从事理论物理、非线性科学、应用数学以及其他相关研究领域的科技人员、高校教师、研究生及高年级本科生阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

微结构固体中的波模型及孤立波/那仁满都拉著. —
北京:冶金工业出版社, 2018. 12

ISBN 978-7-5024-8016-5

I. ①微… II. ①那… III. ①固体物理学—弹性力学—波传播—模型—研究 ②固体物理学—弹性力学—孤立波—研究 IV. ①O482

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 012534 号

出 版 人 谭学余

地 址 北京市东城区嵩祝院北巷 39 号 邮编 100009 电话 (010)64027926

网 址 www.cnmp.com.cn 电子信箱 yjcbcs@cnmp.com.cn

责任编辑 夏小雪 美术编辑 吕欣童 版式设计 孙跃红

责任校对 郑 娟 责任印制 牛晓波

ISBN 978-7-5024-8016-5

冶金工业出版社出版发行;各地新华书店经销;三河市双峰印刷装订有限公司印刷
2018 年 12 月第 1 版, 2018 年 12 月第 1 次印刷

148mm×210mm; 4.25 印张; 132 千字; 126 页

32.00 元

冶金工业出版社 投稿电话 (010)64027932 投稿信箱 tougao@cnmp.com.cn

冶金工业出版社营销中心 电话 (010)64044283 传真 (010)64027893

冶金工业出版社天猫旗舰店 yjgybcs.tmall.com

(本书如有印装质量问题,本社营销中心负责退换)

前 言

当今工程技术中广泛应用的多种材料，如合金、多晶体、陶瓷、复合材料、功能梯度材料以及颗粒材料等，在不同尺度上都有一定的微结构，因而存在某个或某些内特征长度。例如，晶体有一定的晶格结构，其特征长度是晶格常数；纤维增强复合材料中，纤维的平均距离也是一个特征长度^[1,2]。当我们的研究所用到的外激励的特征长度（如波长）远大于材料的内特征长度时，经典连续介质力学的基本假设是有效的，给出的预言结果与实验结果能够很好地吻合。但当外激励的特征长度接近材料的内特征长度时，就会出现不能用经典连续介质理论满意解释的复杂动力学现象，如声子散射实验中高频弹性波的频散现象以及裂纹尖端处的无限大应力现象等^[2]。因此，当外激励的特征长度接近材料的内特征长度时，必须考虑材料的微结构效应，建立模型时应引入内特征长度。

为建立考虑固体微结构效应的连续介质模型，在历史上诸多学者进行了不断的探索和研究。Cosserat 兄弟第一次提出了一种连续介质模型^[3]，在此模型中把连续介质的每个物质点都看作具有六个自由度的刚体，它可平移和旋转但不可形变，它的方向可由一组相互垂直的刚性矢量（方向子）来描述，现在与此相关的理论称之为微极理论。随后 Toupin^[4]、

Mindlin^[5]、Tiersten^[6]、Eringen^[7,8]等人进一步完善和修正, 建立了一个不确定偶应力理论, 并引入了一个具有长度量纲的新材料常数。从此开始进入了具有微结构的连续介质力学的广泛研究与发展时期, 提出了各种各样的理论, 并利用这些理论来解释一些物理现象或预言一些新的物理现象。这些理论反映的物理实质上考虑可分为两大类: 一是由Eringen、Suhubi、Mindlin等人建立的考虑微观运动学自由度的微极理论和微态理论^[2]; 二是由Toupin、Kroner、Krumhansl、Mindlin、Green和Rivlin等人^[2,9]建立的考虑微结构的长程相互作用的应变梯度理论和非局部理论。国内对微结构固体及相关问题的研究主要集中在微结构固体的理论模型上, 关于这方面的研究工作在文献[10~12]中给出了较全面的综述。戴天民^[13]对含有微结构的弹性固体理论方面开展了系统的研究。近年来, Engelbrecht和Berezovski等人对Mindlin微态理论进一步深入研究并进行了修正和完善工作, 建立了一些具体的波模型。在文献[14]中, 采用最简单的自由能(应变能)函数, 建立了描述一维微结构固体中纵波传播的全频散和双频散线性波模型。文献[15]中, 考虑微结构非线性固体宏观尺度和微观尺度非线性效应, 建立了一维微结构固体中纵波传播的非线性波模型。文献[16]中, 利用伪谱方法对微结构固体中传播的孤立波的传播及相互作用特性进行了数值研究。文献[17]中, 研究了材料微结构特性对孤立波传播特性的影响。文献[18]中, 对微结构固体中孤立波传播的反问题进行研究, 证明了利用孤立波所携

带的信息可以确定固体材料的相关常数。文献 [19] 中基于多尺度建模思想,建立了复杂微结构固体的两种多尺度线性模型。文献 [20, 21] 中考虑宏观尺度非线性效应,建立了复杂结构固体的两种多尺度非线性模型。Casasso 等人在文献 [22] 中基于矢量微结构理论,建立了一维和二维多尺度微结构模型。文献 [23] 中考虑二维问题,建立了 Mindlin 型微结构固体的二维非线性波模型。关于微结构弹性固体中形变波传播的各种模型的建立问题,Engelbrecht 和 Berezovski 在文献 [24] 中进行了全面的综述,想更详细了解的读者可参阅该文献。

微结构固体材料由于其内部的孔隙、杂质、颗粒、裂纹、裂缝等微结构的存在,当我们的观测研究尺度接近材料的微结构尺度时,这些材料可表现出与经典材料很大不同的行为特征,如微结构有关的微尺度频散效应和非线性效应等。这些效应对微结构固体中孤立波的形成提供了必要的条件,也就是说微结构固体中孤立波的形成是可能的事情。波在介质中传播时不仅携带着能量,它还携带着一些信息。也就是说,在一定初始和边界条件下激起的波,它不仅携带着这些条件相关的信息,还携带着与波传播介质相关的信息,这些信息反映在波形变化或波谱变化上。由此可见,固体中孤立波存在与传播问题的研究具有重要意义,因为孤立波在固体中传播时,其形状、幅度以及传播速度中携带着反映固体内部结构性质的重要信息,这对固体材料的无损检测与评价具有重要的应用价值^[25,26]。

本书共分5章。第1章简单介绍了 Mindlin 微结构理论、线性波模型的建立及频散特性；第2章介绍了微结构固体中一维非线性波模型的建立及孤立波存在性的论证；第3章介绍了复杂微结构固体中非线性波模型的建立及孤立波存在性的论证；第4章介绍了微结构固体中二维非线性波模型的建立及孤立波存在性的论证；第5章介绍了微结构固体中孤立波传播稳定性的数值验证以及一种微结构材料制成的波导中孤立波传播稳定性的数值验证。

在这里向本书撰写过程中所引用文献的所有作者表示感谢和敬意。本书所写的主要内容是我和我的研究生的研究工作和取得的成果，在这里对我的研究生同学们表示感谢。本书所包含的研究成果以及本书的编写出版得到了国家自然科学基金项目（项目编号：11462019）的支持，在这里也表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请阅读本书的各位读者提出宝贵意见，给予批评指正。

著 者

2018年10月

目 录

1	线性波模型及频散特性	1
1.1	基本模型	1
1.2	扩展模型	4
1.3	频散特性	5
2	一维非线性波模型及孤立波	9
2.1	基本非线性波模型及孤立波	9
2.1.1	基本非线性波模型的建立	9
2.1.2	孤立波存在性的证明	11
2.2	高次非线性波模型及孤立波	25
2.2.1	高次非线性波模型的建立	25
2.2.2	钟型孤立波存在性的证明	26
2.2.3	扭结孤立波存在性的证明	35
2.3	新非线性波模型及非光滑孤立波	44
2.3.1	新非线性波模型的建立	44
2.3.2	系统的分岔	47
2.3.3	微结构固体中的非光滑孤立波	50
3	多尺度非线性波模型及孤立波	61
3.1	并式微结构非线性波模型的建立	61

3.2	分层式微结构非线性波模型的建立	64
3.3	复杂微结构固体中孤立波的存在性	68
3.4	本章小结	81
4	二维非线性波模型及孤立波	82
4.1	二维非线性波模型的建立	82
4.2	二维非线性波模型的简化	85
4.3	二维微结构固体中孤立波的存在性	87
4.4	本章小结	95
5	微结构固体中孤立波的稳定性	96
5.1	基本模型及积分因子方法	96
5.2	微结构固体中孤立波的传播特性	98
5.3	微结构固体中孤立波传播的稳定性	100
5.3.1	高斯波扰动下的孤立波	100
5.3.2	Ricker 子波扰动下的孤立波	103
5.3.3	双曲正割波扰动下的孤立波	106
5.4	波导中孤立波传播的稳定性	109
5.4.1	高斯波扰动下的孤立波	110
5.4.2	简谐波扰动下的孤立波	113
5.4.3	随机扰动下的孤立波	114
5.5	本章小结	117
	参考文献	119
	汉英名词对照表	123



线性波模型及频散特性

微结构固体材料由于其内部的孔隙、杂质、颗粒、裂纹、裂缝等微结构的存在，当我们的观测尺度接近材料的内部微结构尺度时，这些材料可表现出与经典材料很大不同的行为特征，如微结构有关的微尺度频散效应和非线性效应等。特别是，由于微结构固体中所含有的孔隙、杂质、颗粒、裂纹、裂缝等都可充当散射源的作用，所以微结构固体材料的频散效应是非常明显的，这已由实验研究所证实^[1,27]。本章作为理论基础，首先简单介绍 Mindlin 微结构（微态）理论的基本思想，然后介绍 Engelbrecht 和 Berezovski 等人依据 Mindlin 微结构理论建立的线性波模型，最后对微结构固体的频散特性进行简要分析。

1.1 基本模型

Mindlin 在微态理论中，把材料的微结构形象地解释称就像“聚合物的分子、多晶体的晶粒或颗粒材料的颗粒”，并认为这些微单元（或细胞）是可变形的^[5,6]。Mindlin 把固体材料的每个微单元都看作是不依赖于物体其他部分，可独立形变的单元体，每个微单元拥有平移矢量 $\mathbf{u}$ 的三个分量所描述的三个平移自由度和二阶微形变张量 $\boldsymbol{\psi}$ 的九个分量所描述的形变自由度。如果微单元不形变那就是 Cosserat 提出的微结构有向介质理论模型。对于中心对称、各向同性的弹性材料，其运动方程可表示为：

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{f} \quad (1-1)$$

$$I \cdot \ddot{\psi} = \operatorname{div} \mu + \tau + \Phi \quad (1-2)$$

式中 I ——微惯性张量；

f ——体力；

Φ ——每个单位体积的双重力。

相应的应力张量，即柯西应力 σ ，相对应力 τ 以及双重应力 μ 分别定义为：

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}, \quad \tau = \frac{\partial W}{\partial \gamma}, \quad \mu = \frac{\partial W}{\partial \chi} \quad (1-3)$$

这里 $\varepsilon = \frac{\nabla u + (\nabla u)^T}{2}$ 是应变张量， $\gamma = \nabla u - \psi$ 是相对形变张量， $\chi = \nabla \psi$

是微形变梯度张量，而 W 是自由能或应变能。Mindlin 微态理论认为自由能 W 是 ε 、 γ 和 χ 等 42 个变量的齐次、二次函数^[5,6]。有了自由能的具体表达式，利用式 (1-3) 就可计算出固体材料的本构关系，即应力-应变关系。

Berezovski 等人^[28] 对 Mindlin 微态理论进行进一步研究，指出 Mindlin 微态理论中的本构关系 (1-3) 可以借助变形 (Distortion) 张量 ∇u 和微形变张量 ψ 来表示，即：

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \nabla u}, \quad \tau = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad \mu = \frac{\partial W}{\partial \chi} \quad (1-4)$$

这里双重应力 μ 保持没有变化。因此，对于中心对称、各向同性弹性材料的运动方程也可写为：

$$\rho \ddot{u} = \operatorname{div} \sigma + f \quad (1-5)$$

$$I \cdot \ddot{\psi} = \operatorname{div} \mu - \tau + \Phi \quad (1-6)$$

式 (1-6) 与式 (1-2) 比较可以看出，相对应力 τ 的符号有变化，这是因为 γ 和 ψ 的符号相反所导致。一般情况下体力和双重力可以忽略，则方程 (1-5) 和 (1-6) 变成：

$$\rho \ddot{u} = \operatorname{div} \sigma \quad (1-7)$$

$$I \cdot \ddot{\psi} = \operatorname{div} \mu - \tau \quad (1-8)$$

可见，Berezovski 等人的研究工作在一定程度上简化了 Mindlin 微态理论模型，给出了一种简便易用的有效模型。实际上，方程 (1-7) 和 (1-8) 也可以由 Euler-Lagrange 方程导出，Engelbrecht 等人^[14] 的研

究证明了这一点。考虑最简单的一维情况，因位移 $u = u_1$ ，微形变张量 $\varphi = \psi_{11}$ ，则动能密度 K 和势能密度 W 分别为：

$$K = \frac{1}{2}\rho u_t^2 + \frac{1}{2}I\varphi_t^2, \quad W = W(u_x, \varphi, \varphi_x) \quad (1-9)$$

式中 ρ ——宏观密度；

I ——微惯性；

x, t 表示对相应变量的偏导数。

由上式计算出拉格朗日密度 $L = K - W$ ，并代入 Euler-Lagrange 方程，有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right)_t + \left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right)_x - \frac{\partial L}{\partial u} &= 0 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_t}\right)_t + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_x}\right)_x - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (1-10)$$

可得：

$$\rho u_{tt} - \left(\frac{\partial W}{\partial u_x}\right)_x = 0 \quad (1-11)$$

$$I\varphi_{tt} - \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_x}\right)_x + \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0 \quad (1-12)$$

在一维情况下，由式 (1-4) 可得：

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial u_x}, \quad \tau = \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad \mu = \frac{\partial W}{\partial \varphi_x} \quad (1-13)$$

因此，方程 (1-11) 和 (1-12) 变成：

$$\rho u_{tt} = \sigma_x \quad (1-14)$$

$$I\varphi_{tt} = \mu_x - \tau \quad (1-15)$$

方程 (1-14) 和 (1-15) 就是运动方程 (1-7) 和 (1-8) 在一维情况下的表示形式。

Engelbrecht 等人在文献 [14] 中，利用运动方程 (1-14) 和 (1-15)，给出了最基本的线性波模型。首先，势能函数的简单形式取为：

$$W = \frac{1}{2}au_x^2 + Au_x\varphi + \frac{1}{2}B\varphi^2 + \frac{1}{2}C\varphi_x^2 \quad (1-16)$$

这里 a, A, B, C 都是材料常数。利用应力公式 (1-13) 计算出应

力，并代入运动方程可得：

$$\rho u_{tt} = au_{xx} + A\varphi_x \quad (1-17)$$

$$I\varphi_{tt} = C\varphi_{xx} - B\varphi - Au_x \quad (1-18)$$

在方程 (1-17) 和 (1-18) 中，取消微形变可得到如下高阶波方程：

$$u_{tt} = (c_0^2 - c_A^2)u_{xx} - p^2(u_{tt} - c_0^2u_{xx})_{tt} + p^2c_1^2(u_{tt} - c_0^2u_{xx})_{xx} \quad (1-19)$$

其中， $c_0^2 = \frac{\alpha}{\rho}$ 、 $c_1^2 = \frac{C}{I}$ 、 $c_A^2 = \frac{A^2}{\rho B}$ 是三种速度， $p^2 = \frac{I}{B}$ 是时间常量。方程 (1-19) 就是 Engelbrecht 等人建立的微结构固体中的基本模型。利用从属原理^[14,24]，简化方程组可得到如下近似波方程：

$$u_{tt} = (c_0^2 - c_A^2)u_{xx} + p^2c_A^2(u_{tt} - c_1^2u_{xx})_{xx} \quad (1-20)$$

在方程 (1-20) 中，我们忽略一个或另一个高阶导数项，也可得到如下两个简化的波方程：

$$u_{tt} = (c_0^2 - c_A^2)u_{xx} + p^2c_A^2u_{ttxx} \quad (1-21)$$

$$u_{tt} = (c_0^2 - c_A^2)u_{xx} - p^2c_A^2c_1^2u_{xxxx} \quad (1-22)$$

方程 (1-20) 是 Engelbrecht 等人得到的近似模型，而方程 (1-21) 和 (1-22) 是 Engelbrecht 等人得到的简化模型^[14]。

1.2 扩展模型

若势能函数可取为：

$$W = \frac{1}{2}au_x^2 + Au_x\varphi + A'u_x\varphi_x + \frac{1}{2}B\varphi^2 + \frac{1}{2}C\varphi_x^2 + D\varphi\varphi_x \quad (1-23)$$

式中， a 、 A 、 A' 、 B 、 C 、 D 都是材料常数。同样，代入运动方程 (1-14) 和 (1-15) 可得：

$$\rho u_{tt} = au_{xx} + A\varphi_x + A'\varphi_{xx} \quad (1-24)$$

$$I\varphi_{tt} = C\varphi_{xx} + A'u_{xx} - Au_x - B\varphi \quad (1-25)$$

在方程 (1-24) 和 (1-25) 中，取消微形变可得：

$$u_{tt} = (c_0^2 - c_A^2)u_{xx} - p^2(u_{tt} - c_0^2u_{xx})_{tt} + p^2c_1^2(u_{tt} - c_0^2u_{xx})_{xx} + c_A^2u_{xxxx} \quad (1-26)$$

式中, $c_0^2 = \frac{\alpha}{\rho}$, $c_1^2 = \frac{C}{I}$, $c_A^2 = \frac{A^2}{\rho B}$, $c_{A'}^2 = \frac{A'^2}{\rho B}$, $p^2 = \frac{I}{B}$ 。此方程就是微结构固体中的扩展模型。与模型 (1-19) 相比较, 此模型多了一项高阶导数项。值得一提的是, 此模型用微结构固体的双内部变量描述方法也可以得到^[24, 29]。

1.3 频散特性

为得到频散关系, 假设波方程可具有如下简谐波解:

$$u = u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (1-27)$$

这里 k 是波数, ω 是圆频率。把解 (1-27) 代入波方程 (1-19) 得到相应的全频散关系:

$$\omega^2 = (c_0^2 - c_A^2)k^2 + p^2(\omega^2 - c_0^2 k^2)(\omega^2 - c_1^2 k^2) \quad (1-28)$$

把解 (1-27) 代入近似波方程 (1-20) 可得到相应的一种近似频散关系:

$$\omega^2 = (c_0^2 - c_A^2)k^2 - p^2 c_A^2 k^2 (\omega^2 - c_1^2 k^2) \quad (1-29)$$

把解 (1-27) 代入波方程 (1-21) 和 (1-22) 可得到相应的简化频散关系:

$$\omega^2 = (c_0^2 - c_A^2)k^2 - p^2 c_A^2 k^2 \omega^2 \quad (1-30)$$

$$\omega^2 = (c_0^2 - c_A^2)k^2 + p^2 c_A^2 c_1^2 k^4 \quad (1-31)$$

为使上述几个频散关系无量纲化, 在文献 [14] 中引入如下无量纲变量和无量纲参数:

$$\xi = pc_0 k, \quad \eta = p\omega, \quad \gamma_1 = \frac{c_1}{c_0}, \quad \gamma_A = \frac{c_A}{c_0} \quad (1-32)$$

利用式 (1-32), 把频散关系式 (1-28) 无量纲化为:

$$\eta^2 = (1 - \gamma_A^2)\xi^2 + (\eta^2 - \xi^2)(\eta^2 - \gamma_1^2 \xi^2) \quad (1-33)$$

把频散关系式 (1-29) 无量纲化为:

$$\eta^2 = (1 - \gamma_A^2)\xi^2 - \gamma_A^2(\eta^2 - \gamma_1^2 \xi^2)\xi^2 \quad (1-34)$$

把频散关系式 (1-30) 和式 (1-31) 无量纲化为:

$$\eta^2 = (1 - \gamma_A^2)\xi^2 - \gamma_A^2 \eta^2 \xi^2 \quad (1-35)$$

$$\eta^2 = (1 - \gamma_A^2)\xi^2 + \gamma_A^2 \gamma_1^2 \xi^4 \quad (1-36)$$

根据无量纲频散关系式 (1-33) 和式 (1-34) 绘制的频散曲线如图 1-1 和图 1-2 所示。图 1-1 是正常频散, 即 $c_g < c_p$ (c_g 表示群速度, c_p 表示相速度) 情况下绘制的频散曲线, 图 2 是反常频散, 即 $c_g > c_p$ 情况下绘制的频散曲线。全频散曲线有两个频支, 分别是光频支 (上支) 和声频支 (下支)。光频支有渐近线 $\eta = \xi(\omega = c_0 k)$, 声频支有渐近线 $\eta = \gamma_1 \xi(\omega = c_1 k)$ 和 $\eta = \gamma_R \xi(\omega = c_R k)$, 这里 $\gamma_R = \frac{c_R}{c_0} = (1 -$

$\gamma_A^2)^{\frac{1}{2}}$ 。不管正常频散情况还是反常频散情况, 近似频散曲线始终很好地接近于声频支曲线, 吻合度较高。在长波极限 ($pc_0 k \ll 1$) 情况下, 全频散关系和近似频散关系都能给出相同的极限速度 $c_R = (c_0^2 - c_A^2)^{\frac{1}{2}}$, 这意味着含有微结构的固体中波的传播要慢于无微结构的固体中的传播。在短波极限 ($pc_0 k \gg 1$) 情况下, 全频散关系可给出两种传播模式, 一是以速度 c_1 传播, 二是以速度 c_0 传播。两种简化频散关系绘制的频散曲线与全频散曲线的吻合度都较低 (如图 1-3 所示), 只有在很小的波数和频率范围内才与全频散曲线相吻合。这说明两种简化模型都是精度较低的模式。

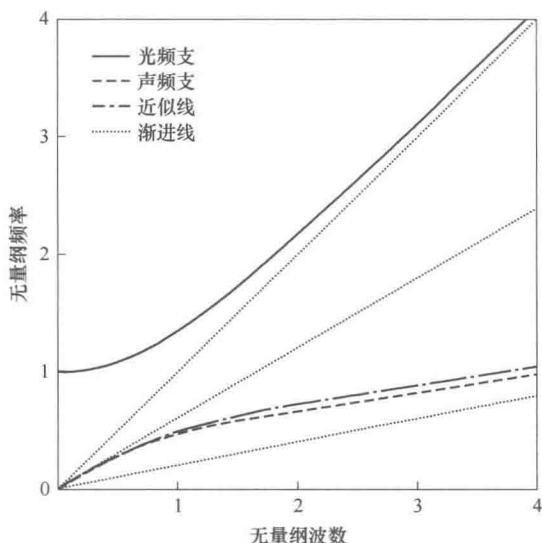


图 1-1 频散曲线

(参数取为 $\gamma_A = 0.8$, $\gamma_1 = 0.2$)

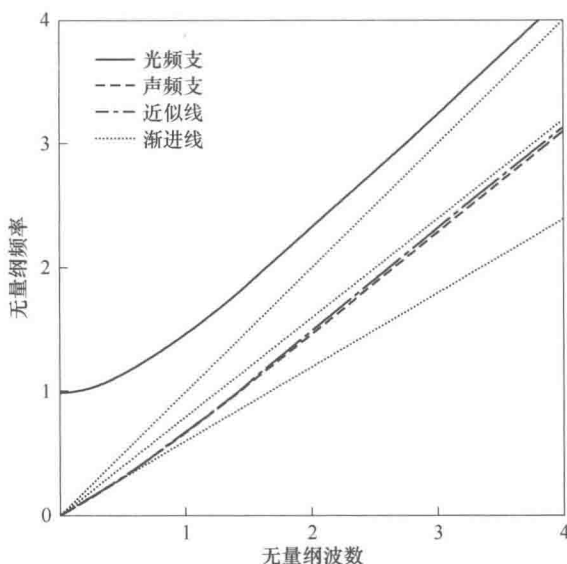


图 1-2 频散曲线

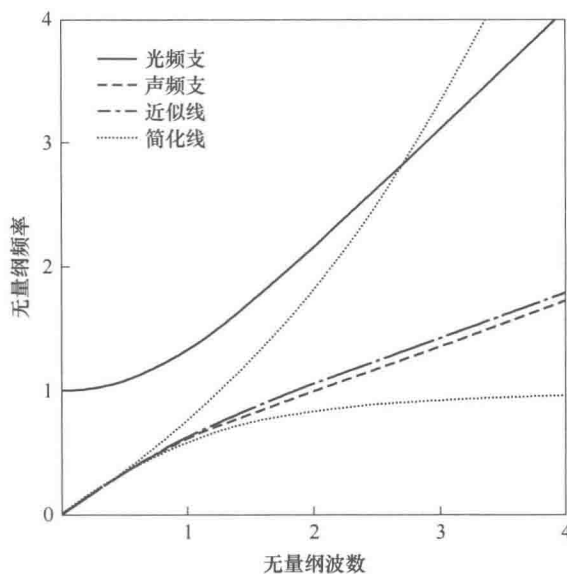
(参数取为 $\gamma_A = 0.8$, $\gamma_1 = 0.8$)

图 1-3 频散曲线

(参数取为 $\gamma_A = 0.7$, $\gamma_1 = 0.4$)

图 1-4 中绘制的是在正常频散条件下无量纲相速度 $\left(\tilde{c}_p = \frac{c_p}{c_0} = \frac{\eta}{\xi}\right)$ 和群速度 $\left(\tilde{c}_g = \frac{c_g}{c_0} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)$ 随波数的变化曲线。由图可以看出, 与光频支相应的无量纲相速度从无限大 ($\xi \rightarrow 0$ 时) 开始迅速趋近于 1 ($\xi \rightarrow \infty$ 时), 而无量纲群速度从 0 ($\xi \rightarrow 0$ 时) 开始迅速趋近于 1 ($\xi \rightarrow \infty$ 时)。同时也可看出, 与声频支相应的无量纲相速度从 γ_R ($\xi \rightarrow 0$ 时) 开始逐渐趋近于 γ_1 ($\xi \rightarrow \infty$ 时), 无量纲群速度也从 γ_R ($\xi \rightarrow 0$ 时) 开始逐渐趋近于 γ_1 ($\xi \rightarrow \infty$ 时)。关于相速度和群速度随波数的变化规律的研究, 这里只给出了简单的讨论, 详细情况可参阅参考文献 [30]。

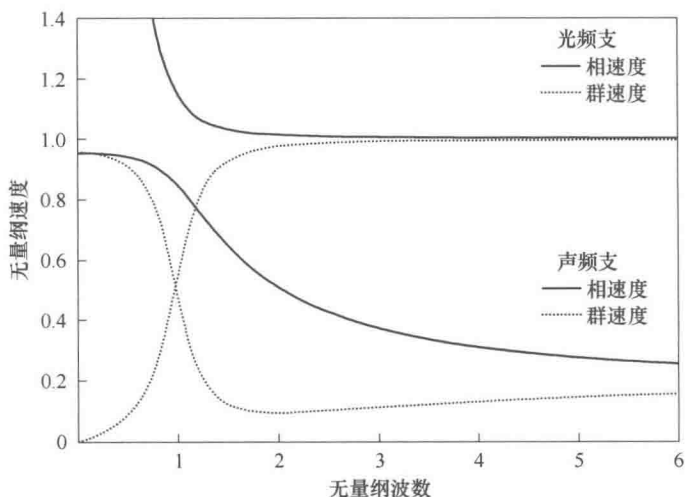


图 1-4 相速度和群速度随波数的变化曲线

(参数取为 $\gamma_A = 0.3$, $\gamma_1 = 0.2$)