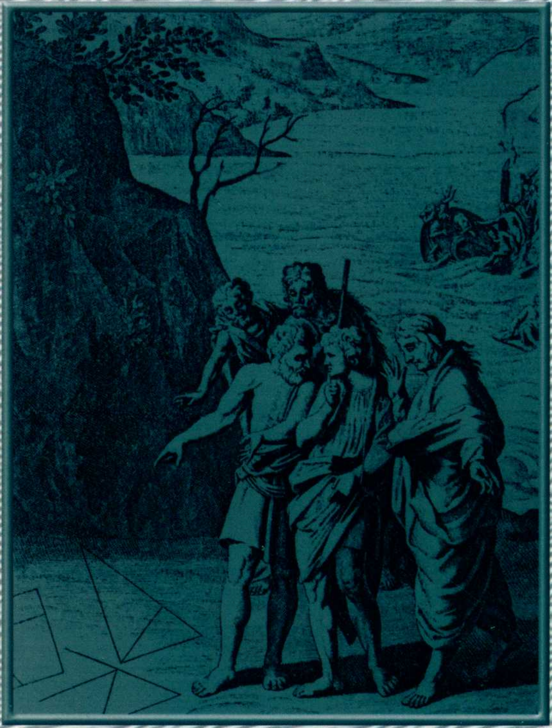
数学的味道

吴振奎 钱智华 编著



- 数学美的奇异性
- 孪生素数猜想证明的一个突破
- 数学大师们的偶然失误
- 布尔毕达哥拉斯三元数组之我见
- 庞加莱猜想获证
- 谣言何以传播如此迅速

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学的味道

吴振奎　钱智华　编著

◎数学美的奇异性

◎孪生素数猜想证明的一个突破

◎数学大师们的偶然失误

◎布尔毕达哥拉斯三元数组之我见

◎庞加莱猜想获证

◎谣言何以传播如此迅速

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

这是一本数学普及读物，书中汇集了曾在一些杂志上发表的小品文数十篇.这些文章介绍了数学中的一些知识、趣闻、轶事.文章的内容可为大中学校师生开拓数学视野，了解数学的内容、方法、意义提供某些素材.

本书适合大中学校师生及数学爱好者参阅.

图书在版编目(CIP)数据

数学的味道/吴振奎，钱智华编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.11

ISBN 978-7-5603-6243-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①吴…②钱… Ⅲ.①数学-普及读物 Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第245659号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张永文
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张29.75　字数534千字
版　　次　2018年11月第1版　2018年11月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6243-4
定　　价　58.00元

◎ 再版简语

本书原名《品数学》(由清华大学出版社于 2010 年初版，2011 年再印)，当时“品”字流行，因而“附庸风雅”赶了一回时髦.

然而回过头来再想想，数学不丑(甚至是美)，它是高贵的，因而无须修饰、美化. 如果静下心来再去细细品味它，也许真的会悟出一些“数学的味道”，不是吗?

这次再版对原书做了增补和修订，也许仍不完美，但我们尽力了，当然这不能作为功力不够的搪塞和理由.

作者于 2018 年元旦

◎ 前言

无聊去读书，寂寞才写作.

十几年前，《中等数学》杂志开设“数海拾贝”栏目，笔者应邀陆续为该栏目撰写了一些数学小品；其间，笔者又相继为台湾《数学传播》杂志写了些东西；此外，还在《自然杂志》《科学》《科学世界》《数学通讯》等杂志发表了一些短文.这些文章是我将自己学数学、读数学、做数学的体会，用尽可能通俗的语言或形式写出来的，它们涉及数学中的诸多方面或领域，它们或古典但不失新潮、或前沿却很现实、或抽象但又具体(生动)、或深奥但却有趣.这样积少成多、集腋成裘，累计下来已有五十余篇小作见刊.

笔者一直盼望能有机会将它们汇集成册，只是机缘未至.

数学是一片深奥的海洋，一座美丽的花园，一个奇妙的世界.这短短几十篇小文只能作为遨游其中的走马看花般的速览，也仅能算作管中窥豹式的猎奇而已.

若说“数海拾贝”“数坛览胜”“数园撷英”都似乎有些夸张，这里的“贝”“胜”“英”或许只能是雾里看花、水中望月般的观赏，单凭这些(本书诸文)要想把它(数学)看得清清楚楚、明明白白、真真切切，似乎有点难(这要凭借您的功力和悟性以及您的数学功底了).然而慢慢读来，再细细品嚼，您也许会从中尝出些许芳香与甘甜，只要不是苦涩，这便是收获.

当下文坛流行一个“品”字，思来想去本书干脆取名《品数学》以附庸风雅、赶回时髦.

鉴于笔者的学识与功力，此书的草就只能算作是了却我们的一桩心愿而已，尽管我们已经努力，尽管我们十分小心，但错误与缺点在所难免，只有祈望读者的赐教了.

作者于2008年元旦

◎ 目录

第二篇　知识篇

第三篇　问题篇

第四篇　生活篇

数学之美(代序)

第0章

社会的进步就是人类对美的追求的结晶.

——马克思(Marx)

数学,如果正确地看,不但拥有真理,而且也具有至高无上的美.

——罗素(B. A. W. Russell)

美是自然.

由于数学是上帝用来书写宇宙的文字(伽利略,Galilei),因而它们不仅含有真理,也蕴含“至高无上的美”(罗素).大物理学家迪拉克(Dirac)说“上帝使用了美丽的数学来创造这个世界.”他称数学是美丽的.

“美”是一个哲学概念.美学是一门社会科学.对于山水、风景、体形、相貌这类自然形成的事物,可以依据大多数人的审美观点直观地说“真美”或“真丑”;然而对文学、艺术、建筑、园林这类带有人工雕琢痕迹的物件,人们再去欣赏它时,美与不美便是一种抽象的思维、判断过程了,比如欣赏毕加索的画作(图0.0.1).

这不仅需要观赏者有较高的艺术修养,还要有抽象思维的能力,因为这类所谓立体派画作是将自然物象分解成几何块面,从而从根本上摆脱传统绘画的视觉规律和空间概念(也有人认为这是画家在四维空间作画,即将四维空间的物象用二维图形表现出来).

(a) 玛丽·泰瑞勒的画像（毕加索）

(b) 窗边的女子（毕加索）

图 0.0.1

数学 —— 人类进化过程中创造的学问，它是智慧的积累、知识的升华、技巧的创新，其中也自然不缺乏美. 因为数学正是在不断追求美的过程中发展的. 诚然，人类的进步、社会的发展，正是人类不断追求“美”、创造“美”的结晶.

自然界的美可以通过眼、耳直接感受，而数学美像其他艺术、文学作品一样，需通过心灵去思维琢磨，发幽探微.

数学之美到底美在哪里?

§1　数学的和谐之美

所谓“数学的和谐”不仅是宇宙的特点、原子的特点，也是生命的特点、人的特点.

—— 高尔泰

和谐是美妙的，宇宙是和谐的，因而也是美妙的(宇宙的和谐正是宇宙自身不断完善的结果). 无论中国古代的哲人庄子，还是古希腊的学者毕达哥拉斯(Pythagoras)、柏拉图(Plato) 等皆把宇宙的和谐比作音乐的和谐.

数学的严谨自然流露出它的和谐，为了追求严谨、追求和谐，数学家们一直在努力以消除其中不和谐的东西. 比如悖论，它是指一个自相矛盾或与广泛认同的见解相反的命题或结论(一个反例)，一种误解或看似正确的错误命题及看似错误的正确结论.

在很大程度上讲，悖论对数学的发展起着举足轻重的作用，数学史上被称作“数学危机” 的现象，正是由于某些数学理论不和谐所致. 通过消除这些不和谐问题的研究，反过来却导致数学本身的和谐且促进了数学的发展. 这正如数学家贝尔(Bell) 和戴维斯(Davis) 指出的那样：数学过去的错误和未解决的困

难为它未来的发展提供契机.

古希腊毕达哥拉斯学派认为宇宙间一切数字现象都能归结为整数或整数之比,然而希伯斯发现腰长为1的等腰直角三角形的斜边长不能用两个整数之比表示(图 0.1.1),这一发现引起毕达哥拉斯学派的恐慌(也使希伯斯为此付出生命的代价),但它却导致了一类新数 —— 无理数的诞生.

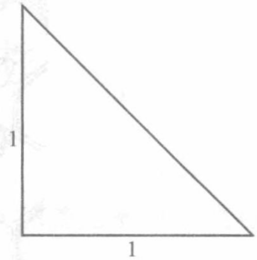


图 0.1.1

《几何原本》两千多年来一直被放在绝对几何的地位,哲学家康德等人甚至认为:关于空间的原理是人们先验的综合判断,物质世界必然是欧几里得(Euclid) 式的,欧几里得几何是唯一的、必然的、完美的.

当有人试图将欧几里得几何中的第五公设(过直线外一点只能作一条直线与之平行) 用其他公理去证明时(以求公设体系简化) 不幸都失败了. 德国数学家高斯(Gauss) 首先意识到:用欧几里得的其他公设去证明第五公设是办不到的. 然而俄国学者罗巴切夫斯基(Лобачвскцй) 和匈牙利的波尔约认为:在选择与平行公设相矛盾的其他公设后,也能建立起逻辑上无矛盾的几何学 —— 非欧几何. 而后,德国数学家克莱因(Klein)、法国数学家庞加莱(Poincaré) 等人的工作使得一种更一般的非欧几何 —— 黎曼(Riemann) 几何诞生了.

人们很早以前就注意到了蜂房的构造,乍看上去是一些并排且规则摆放的正六边形的“筒”,你再仔细观察就会看到,每个“筒” 底由三块同样大小的菱形所搭建(图 0.1.2).

18 世纪初,法国学者马拉尔迪测量了蜂房底面三块菱形的角度,发现其锐角(β) 为 $70°32'$,钝角(α) 为 $109°28'$. 法国一位物理学家由此猜测:蜂房的如此结构是建造同样大的容积所用材料最节省的,这一点后来被法国数学家柯尼希证得.

再如,生命现象中的某些最优化结构(比如血管粗细直径之比为$\sqrt[3]{2}:1$ 等) 是生物亿万年来不断进化、去劣存优的结果. 数学也为这些现象找到了可靠的理论依据.

动物的头骨看上去似乎有差异,其实它们不过是同一结构在不同坐标系下的表现和写真(图 0.1.3),这是大自然选择和生物本身进化的必然结果(以此观点去看达尔文(Darwin) 生物进化,是否会有别样的感觉).

数学论证了自然界的和谐,反之自然界的和谐也为验证数学的严谨与和谐提供了有力的范例.

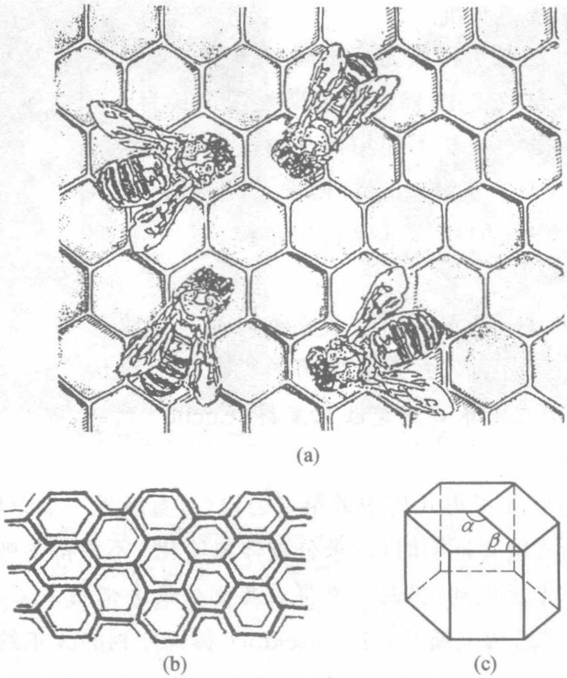


图 0.1.2

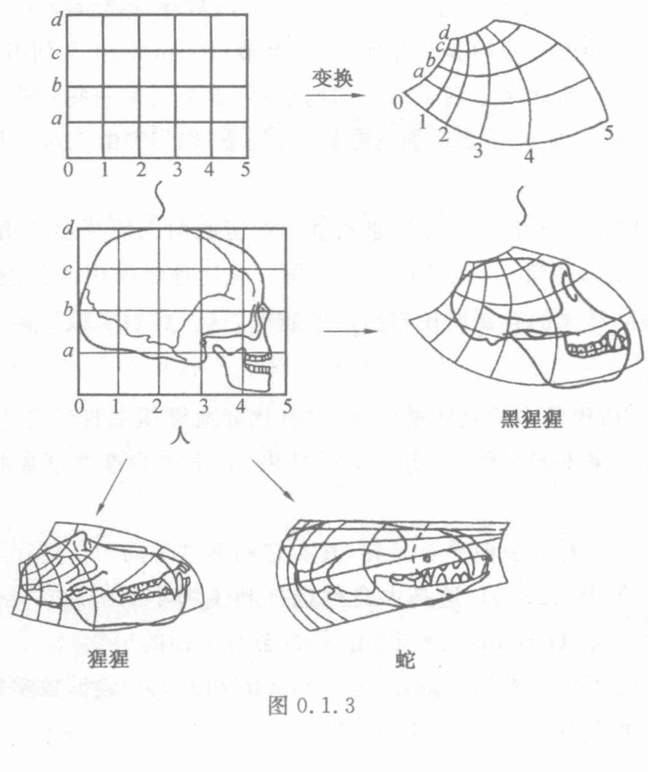


图 0.1.3

§2　数学美的简洁性

数学简化了思维过程并使之更可靠.

—— 弗莱伊

已故数学家华罗庚教授说过:宇宙之大、原子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之烦 …… 无不可用数学表示.

真理越是朴素它就越加简洁,简洁本身就是一种美.数学之所以用途如此广泛,皆因数学的首要特点在于它的简洁.数学家莫德尔(Mordell)说:在数学里美的各个属性中,首先要推崇的大概是简单性.

自然界原本就是简洁的,现实世界中光沿直线方向传播 —— 这是光在传播时的最短路径;植物的叶序(叶子在植物茎上的排列顺序)是植物通风、采光的最佳布局;某些攀缘植物如藤类,它们绕着攀依物螺旋式地向上延长,它们所选的螺线形状对于植物上攀路径来讲是最节省的.

大雁迁徙时排成的人字形,它的一边与其飞行方向的夹角是$54°44'8''$,从空气动力学角度看,这个角度对大雁队伍飞行阻力最小,因而是最佳的(顺便一提:金刚石晶体中也蕴含这种角度).这些最佳、最好、最省的事例展示了自然界的简洁与和谐.宇宙万物皆如此,因而作为描述宇宙的文字与工具的数学也是如此.

诗人但丁(Dante)赞美圆是最美的图形.太阳是圆的,满月是圆的,水珠看上去也是圆的(指它们的投影)…….圆的线条明快、简练、均匀、对称.近代数学研究还发现圆的等周极值性质:在周长给定的封闭图形中圆所围得的面积最大.

无论古人、还是今人,人们对圆有着特殊的亲切的情感,皆因圆的简洁和美丽,我们汉代砖刻中就体现了这一点(图 0.2.1).

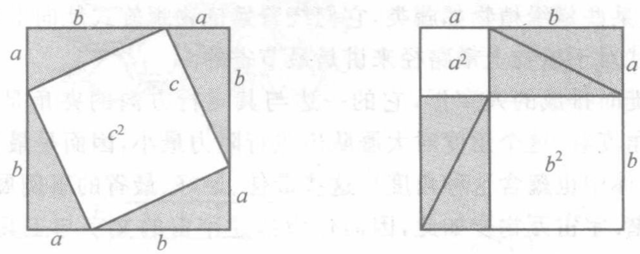
图 0.2.1　汉代砖刻中的圆

数学中人们对于简洁的追求是永无止境的:建立公理体系时人们试图找出最少的几条,命题的证明力求严谨简练,计算的方法尽量便捷明快,数学拒绝烦冗.此外数学符号的不断创立与改进正是数学追求简洁性的体现.我国仅数学表示的演化就经历了十分漫长的过程(图 0.2.2).

数学符号与算式可以把自然界朴实本质的东西以最简的形式把它揭示出来.

图 0.2.2　战国时期前后汉字数码的演化

2 000 多年以前，以“百牛大祭”形式庆贺其被发现的直角三角形三边关系的定理 —— 毕达哥拉斯定理（在我国称为勾股定理）：若直角三角形的三边长为 a，b，c，则 $c^2 = a^2 + b^2$。这个看上去十分简单的式子，深刻地揭示了直角三角形三边之间朴实而深邃的关系。它的证明据说有数百种之多（图 0.2.3，图 0.2.4）。



(a)　　　　(b)

图 0.2.3　勾股（毕达哥拉斯）定理的证明

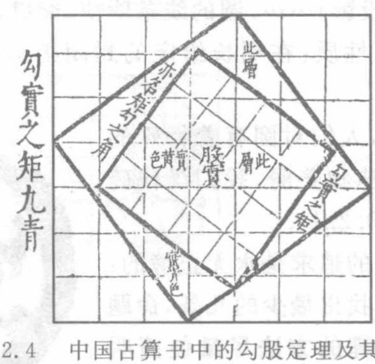


图 0.2.4　中国古算书中的勾股定理及其中国证法

将它推广到三角函数领域则有：$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$，式子不仅反映了正余弦之间的互补或对偶关系，同时也是对勾股定理的又一诠释。它源于勾股定理，却比勾股定理更具有普遍性，因为这里角 α 是任意的，反观勾股定理（注意这只是在直角三角形的情形成立）不过只是其特例而已，勾股定理表达式的简洁性自不待言，而由此引发的诸多课题，令人目不暇接（如果读者有兴趣可见拙作《数学的创造》一书）。

中国古算书中也有不少该定理的证明图示.

§3　数学的形式美

只有音乐堪与数学媲美.

——怀德海

在艺术家追求的美中,形式是特别重要的,比如,泰山的雄伟、华山的险峻、黄山的奇特、峨眉山的秀丽、青海的幽深、滇池的开阔、黄河的蜿蜒、长江的浩瀚…… 常常是艺术家们渲染它们美的不同的形式与角度.

数学家也十分注重数学的形式美,尽管有时它们的含义更加深邃,比如整齐简练的数学方程、匀称规则的几何图形,都可以看成一种形式美,这是与自然规律的外在表述有关的一种美.寻求一种最适合表现自然规律的一种方法,是对科学理论形式美的一种追求.

毕达哥拉斯学派非常注重数学的形式美.他们把整数按照可以用石子摆成的形状来分类,比如三角数,如图 0.3.1 所示.

图 0.3.1

四角数又称正方形数,如图 0.3.2 所示.

图 0.3.2

此外他们还定义了五角数、六角数……(它们统称为多角形数).

毕达哥拉斯学派及其崇拜者循此研究发现了多角形数的许多美妙性质,比如他们发现:

每个四角数是两个相继三角数之和.

第 $n-1$ 个三角数与第 n 个 k 角数之和为第 n 个 $k+1$ 角数.

而后的数学家们也一直注重这种多角形数的形式美,且从中不断有所发现.

17 世纪初,法国业余数学家费马(Fermat)在研究多角形数性质时提出猜测:*每个自然数皆可用至多三个三角数,四个四角数,……,k 个 k 角数之和表示.*

高斯在 1796 年 7 月 10 日证明了"每个自然数均可用不多于三个三角数之和表示"后,在日记上写道:"Ευρηκα! num $=\Delta+\Delta+\Delta$",这里 Ευρηκα 是希腊语译

为“找到了”,这句话正是当年阿基米德(Archimedes)在浴室里发现浮力定律后赤身跑到希拉可夫大街上狂喊的话语,这里高斯引用它可见他当时的欣喜之情.

欧拉(Euler)从1730年开始研究自然数表示为四角数之和问题,43年后(此时他已双目失明)他才给出“自然数表示为四个四角数之和”问题的证明.此前,1770年拉格朗日(Lagrange)利用欧拉的一个等式已经证明了该问题.

1815年,法国数学家柯西(Cauchy)证明了“每个自然数均可表示为 k 个 k 角数之和”的结论.

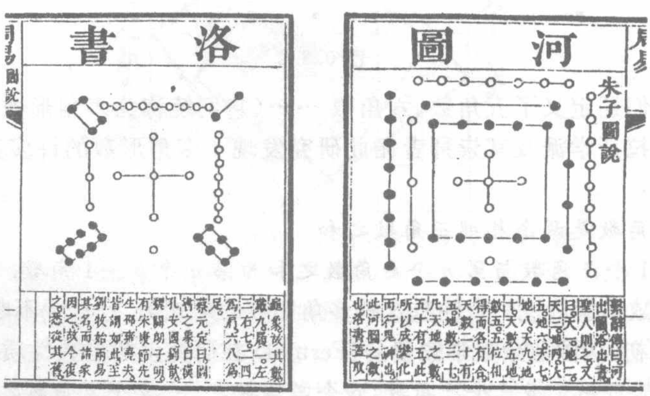
人们把素数(又称质数,是只能被1和它本身整除的数)视为特殊的元素和单位,利用它进行许多数学研究,比如整数可以唯一地分解成若干素数及它们的幂的乘积.著名的哥德巴赫(Goldbach)猜想是指“大于或等于6的偶数,可表示为两个奇素数之和”(俗称“1+1”问题).

比如:$6=3+3, 8=3+5, 10=3+7, \cdots$

这个貌似简单的问题却让数学家们大伤脑筋,人们至今得到的最好的结果是我国已故数学家陈景润所得到的:大偶数可表示为一个素数与一个至多是两个素数乘积的数之和(俗称“1+2”).

幻方——一种极具魅力的数学游戏,也是人们追求数字形式美的生动纪实,关于它有许多有趣、神奇的传说.

据称伏羲氏称天下时,黄河里跃出一匹龙马,马背上驮了一幅图,上面有黑白点55个,用直线连成10个数,后人称之为“河图”.又传夏禹时代,洛水中浮出一只神龟,背上有图有文,图中有黑白点45个,用直线连成9个数,后人称它为“洛书”(图0.3.3).两图中的黑点组成的数都是偶数,古称阴数;白点表示的数为奇数,古称阳数.其中“洛书”译成今天的符号便是一个3阶幻方(图0.3.4).它的三行、三列及两条对角线上的数字和都相等(称为“幻和”).



(a) (b)

图 0.3.3