小波与量子小波

(第二卷)

图像小波与小波应用

冉启文　冉　冉/著

科学出版社

小波与量子小波

(第二卷)

图像小波与小波应用

冉启文　冉　冉　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

《小波与量子小波》系统论述多尺度小波理论、线性调频小波理论和量子小波理论. 全书共十章, 分为三卷.

第一卷介绍小波简史与小波基础理论，由第 1—5 章构成.

第二卷介绍图像小波与小波应用，由第 6—8 章组成，核心内容包括张量积二维多分辨率分析理论、图像正交小波和正交小波包理论、图像金字塔理论、光场小波和光场小波包理论、光场金字塔理论、典型多分辨率分析实例、Daubechies 有限系数多分辨率分析理论、多分辨率时频分析理论体系、小波谱和小波包谱理论、时频局部化与小波包谱意义下的“测不准”原理、线性算子小波表示理论、恒分辨率小波理论和小波包理论、视觉计算理论与马尔小波理论、周期小波理论、周期小波级数理论与傅里叶级数理论的有趣对比.

第三卷介绍调频小波与量子小波, 由第 9 章和第 10 章以及包含 296 个练习题的四个习题集构成.

本书适合数学、统计学、物理学、力学、信息科学、生命科学和医学、计算机科学、化学、天文学、材料科学、能源科学、测绘科学、电子学、机械学、环境科学、林学、经济学和管理学等相关领域的研究人员和工程技术人员参考，也适合高等院校相关专业高年级本科生、研究生作为学习与研究小波的教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

小波与量子小波. 第二卷, 图像小波与小波应用/冉启文, 冉冉著. —北京: 科学出版社, 2019.3

ISBN 978-7-03-060917-5

Ⅰ. ①小… Ⅱ. ①冉… ②冉… Ⅲ. ①小波理论 Ⅳ. ①O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 050960 号

责任编辑: 李静科 李 萍 / 责任校对: 严 娜

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 3 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2019 年 3 月第一次印刷 印张: 25 1/2

字数: 514 000

定价: 168.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

献给我深爱的妻子

——冉启文

将此书献给我的母亲

因为她一直以来的支持与爱，这本书才得以完成

——冉　冉

前　言

小波的出现是历史的必然，也是科学思想发展的必然.

小波是什么？这个问题已经在很多文献中被提出而且给出了各自的回答，其中典型代表应该是 20 世纪 90 年代初法国数学家迈耶(Meyer Y)在《小波与算子》中和比利时数学家朵蓓琪丝(Daubechies I)在《小波十讲》中给出的回答. 经过从 20 世纪 90 年代初以来的二十多年快速发展以及对小波思想产生和发展历程的追溯，在“小波”名义下的各种研究无论是深度还是广度，都已经出现了十分显著的变化，重新“定义”小波正当其时.

《小波与量子小波》的小波包含丰富的逻辑内涵，体现为多尺度小波、线性调频小波和量子小波. 这样的小波具有将近两百年的历史渊源和传承，它是从 20 世纪 80 年代才得以真正兴起的深邃科学思想和方法，其产生、发展、完善和应用直接得益于数学、物理学、量子力学、计算机科学、信息科学、生物学和医学等领域众多科学家和工程师的卓越智慧和共同努力，小波的发展史淋漓尽致地展现出它是现代数学、现代物理学与现代科学技术研究交互推动的完美典范. 小波的思想简单、优美且普适，其数学理论是从一个或少数几个特别的函数出发，经过简单的“伸缩”和/或“平移”构造函数空间的规范正交基，其科学理念一脉相承于显微镜等的思想精华，以任意的伸缩倍数聚焦于研究对象的任意局部位置，获得任意层次相互独立的局部细节. 小波在科学界享有“数学显微镜”的美誉.

《小波与量子小波》系统论述多尺度小波理论、线性调频小波理论和量子小波理论. 全书由十章和四个习题集(共 296 个练习题)构成，分为相对独立的三卷，它们分别是《小波与量子小波(第一卷)：小波简史与小波基础理论》《小波与量子小波(第二卷)：图像小波与小波应用》和《小波与量子小波(第三卷)：调频小波与量子小波》. 本书是《小波与量子小波》的第二卷，它由全书的第 6—8 章组成，主要内容包括图像小波和小波包理论、多分辨率分析理论应用和多尺度小波理论典型应用三部分，这些研究内容本质上在不同层次上体现了多尺度小波思想和多分辨率分析思想的典型应用.

在图像小波理论与图像小波包理论中，形式上是研究二维多分辨率分析和二维形式的多尺度小波和小波包理论，实际上提供了通过张量积方法突破维数对多分辨率分析理论、小波理论和小波包理论的限制，同时，作为“多尺度小波理论和小波包理论”和“多分辨率分析方法”在“图像”研究中的应用，最终实现格式相同的多分辨率多尺度小波和小波包的连续理论方法和数值计算方法，最重要的是建立

“小波(光源)光场”和“小波包(光源)光场”的概念并将“光场”“物理图像”“数字图像”和“超级数字图像”等跨越光学理论和(数字)图像处理理论的研究对象进行完全统一的理论刻画. 通过引入超级数字图像的概念, 即图像任何像素处对应一个“二元函数”或者“普通图像”, 而不仅仅是普通图像在各个像素处的灰度数值, 那么, 当各个像素处的“二元函数”或者“普通图像”是脉冲函数或者δ-函数时, 超级数字图像的概念就包含了普通图像作为特例. 更重要的是, 如果各个像素处的“二元函数”或者“普通图像”被理解为算子的或者线性变换的核函数, 那么, 这种超级数字图像在每个像素处就对应于一个线性变换或者线性算子. 这时, 超级数字图像就是大量算子或者线性变换构成的算子族, 超级图像处理或者变换分析就相当于按照某种统一的模式, 比如, 图像小波或者图像小波包的模式同时分析处理一个算子族或者线性变换族中的所有算子或者线性变换. 这样, 超级数字图像的概念就能够统一表达连续物理图像、离散物理图像、(有限)数字图像和光场, 而且提供这些研究对象的几乎统一的小波分解合成、小波包分解合成、小波链分解合成和金字塔式分解合成理论. 这种表达方式和研究模式是本书的独特创新模式, 而且, 超级数字图像的概念本质上建立了包括传统意义的图像、算子(线性变换)以及算子族的小波理论和小波包理论以及金字塔理论的统一的理论框架. 实际上, 如果读者具备关于像脉冲函数或者δ-函数这样的广义函数或者“分布”的基本知识, 那么, 只要将此处超级数字图像各个像素处对应一个这样的“广义函数”或者“分布”, 就可以获得“广义函数族”或者“分布族”相对应的分布小波理论、分布小波链理论、分布小波包理论和分布金字塔理论以及相对应的分解合成算法理论. 这些研究成果为新颖的小波光场理论、小波光学理论、光信息处理理论和分布理论的建立奠定了宽广坚实的理论基础. 多分辨率分析小波理论的这个应用直接体现了小波思想推动光学和图像处理新理论体系的产生以及两者的融合和统一, 这样的示范应用启发相关领域研究人员在小波理念和基本理论模式基础上重新理解和刻画相应的学科以及某些相邻学科的融合统一.

在多分辨率分析理论应用研究中, 重点研究典型多分辨率分析, 特别是 Daubechies 紧支撑或者有限系数多分辨率分析理论, 比如, 正交的、共轭正交的多分辨率分析理论以及相应的紧支撑小波包理论, 应该说这些都是顺理成章、理所应当的典型研究内容. 但是, 本书更倾向于示范性地给出利用多分辨率分析思想突破某些著名的基本科学原理以及更深刻地突破这些基本科学原理赖以成立的相应的基本科学概念, 引导和启发研究人员重新思考、认识和升华一些基本的科学概念. 具体而言, 本书以小波和小波包的时频特性分析为出发点, 巧妙建立小波谱和小波包谱理论, 展现小波和小波包理论对时频分析局限性的根本突破, 特别是对测不准原理的最终表达形式以及赖以成立的基本概念“频率”的彻底否定, 从而为信号(函数)、图像、算子和分布(广义函数)的表达及处理, 提供新颖有效而且简单明了的理论方法和理论体系. 作者从未发现关于多分辨率分析的这种应用专题以及系统论述

类似文献, 本书在这里的论述是精彩和引人入胜的.

小波理论的应用已经深入渗透到十分广泛的科学研究以及技术研究领域, 将小波思想方法、小波包思想方法和多分辨率分析方法融入各种科学技术问题研究中, 常常能够获得意想不到的理想效果, 在本书第 7 章多分辨率分析理论应用研究中, 借助研究"小波包和金字塔时频分析方法"的契机, 对这个事实进行了充分的论述. 作为小波理论应用研究, 本书第 8 章深入浅出、循序渐进地研究和阐述了小波理论和小波包理论的四类典型应用实例, 即线性算子小波快速算法理论、恒分辨率小波理论和小波包理论及其算法理论、视觉计算理论与马尔小波理论、周期小波理论和周期小波级数理论及其与傅里叶级数理论的有趣对比.

关于线性算子小波表示问题, 借助多分辨率分析小波和小波包理论系统地为线性空间提供具有各种性质的规范正交基或者共轭(双)正交基, 借鉴"卷积算子"在傅里叶基下的对角化表现形式建立"卷积算子"快速算法的思路, 启发性研究线性算子在小波基或者小波包基下的"拟对角形式", 从而获得这些线性算子的快速小波算法.

除此之外, 为了满足离散采样信号或者数字图像在分解合成过程中始终保持恒定分辨率的要求, 作为多分辨率分析小波理论和小波包理论的典型应用, 本书利用多分辨率分析理论框架建立了恒分辨率小波理论和小波包理论及其算法理论. 恒分辨率小波理论本质上是一种冗余的多分辨率分析方法, 这种利用多分辨率分析小波或者小波包获得函数或者信号冗余表达的方法, 就是给出在各种不同尺度下获得的函数或者信号的统一尺度和分辨率表达公式, 它与同维正交小波合成、同维正交小波包合成以及同维金字塔合成算法理论是不相同的, 在离散采样的前提下, 后者给出的是信号采样或者向量在线性空间平凡规范正交基下的表示方法, 而恒分辨率的小波方法、小波包方法和金字塔方法能够按照相同的采样率和尺度获得在任意分解和合成步骤也就是多分辨率分析中任意尺度子空间和小波子空间中函数或者信号的冗余表达, 保证在分解和合成过程中被处理的数字信号和数字图像的任何中间处理结果都具有完全相同的分辨率. 在视觉、听觉和各种传感器系统的信息分析和处理中, 来自具有不同物理频率信息源的信息或者利用多种信息获取途径和方法得到的来自相同信息源的具有多种物理意义的信息数据需要关联处理或者统一融合时, 恒分辨率小波理论将会提供十分便捷的信息分析处理方法和技术.

本书第 8 章的另一个研究重点是视觉计算理论和马尔小波理论, 其中第一个核心问题是研究人工智能(视觉信息或者光信息)方法中信息表达和信息传输模式; 第二个核心问题是研究在信息表达和信息传输过程中小波存在的客观性. 实际上, 选择这个小波应用研究专题的更深刻的动机在于, 这不仅是小波思想和理论产生的重要源泉, 而且这个问题以及研究结果非常突出地表明, 小波不仅仅是一种思维方法和抽象的数学和逻辑理论方法, 同时也是人类视觉系统信息表达和传输功能的恰当描述, 即小波是具有客观物理意义和生物学意义的. 由此可以相信这个成果对于研

究模拟人类智能活动的人工智能方法具有非常重要的示范效果和启迪意义.

周期小波和周期小波级数理论的出现是小波理论给予学术界的又一个意外和惊喜. 这部分内容将尝试说明即使在严格周期现象的研究中, 和被普遍认为研究周期现象“最有效的”傅里叶级数方法相比, 周期小波和周期小波级数仍然具有其独特的优势. 周期小波理论研究的核心问题是多分辨率分析的周期化, 利用由周期化多分辨率分析构造获得的周期小波, 按照正交级数方法获得的正交周期小波级数在研究周期现象时表现出了十分显著的优越性. 最意外的而且也是最令人吃惊的结果是, “满项的”小波级数(即大多数小波系数显著非零)代表了十分异常的函数(比如分形函数), 而“正常的”函数的小波级数却是“有洞的”或“缺项的”(即小波级数非零系数的分布是稀疏的). 回顾傅里叶级数理论可知, 大多数“正常的”函数的傅里叶级数是“满项的”, 而“缺项的”傅里叶级数代表着病态函数(比如魏尔斯特拉斯函数和黎曼函数等). 这似乎表明正交周期小波级数是对傅里叶级数的广泛的、强有力的升级: 周期小波级数分析是傅里叶级数的局部化的和多尺度的升级模式, 其突出的优越特征在于小波级数系数的显著取值直接地而且是集中地落在所研究函数、算子或者分布的奇异支撑集合上, 除此之外, 函数、算子或者分布是光滑的或者是无穷次可微的, 其小波级数系数可以忽略不计.

在撰写本书的过程中, 涉及到二维多分辨率分析理论、小波光场理论、图像和超级图像小波理论以及小波包理论的部分由冉冉主笔撰写, 其余内容由冉启文主笔撰写.

感谢已故洪家荣教授和冯英浚教授, 正是两位教授的支持与帮助坚定了第一作者在 20 世纪 90 年代选择多尺度小波与分数傅里叶变换(线性调频小波)相关关系的研究工作. 感谢舒文豪教授以及第二作者在哈尔滨工业大学学习期间的导师刘树田教授, 与他们的广泛讨论启迪作者研究并逐渐认识到多尺度小波与分数傅里叶变换(线性调频小波)的相似性.

感谢已故中国科学院院士马祖光教授、作为第一作者在博士后研究期间合作导师的王骐教授和马晶教授, 与三位教授的学术交流和学术讨论如沐春风、受益匪浅, 开启了第一作者系统构造线性调频小波和耦合调频小波的研究方向; 同时感谢马晶和谭立英夫妇, 与两位教授从 20 世纪 90 年代开始的友谊以及在光学、小波光学、分数傅里叶光学和卫星激光通信等领域的全面深入合作研究, 深度影响了《小波与量子小波》的写作风格, 特别是长期无私的讨论和争论形成的小波波前滤波思想和分数傅里叶光学调频域滤波思想, 深深影响了本书图像小波理论、小波光场理论和线性调频小波理论的论述风格.

感谢已故中国工程院院士张乃通教授, 他生前大力推动小波理论在通信理论和技术研究中的应用, 积极组织团队加强小波方法与超宽带无线通信方法和技术的融合、多尺度小波和线性调频小波方法与多域协同通信理论和方法的交叉联合研究, 在他生前的最后几年, 还特别鼓励和推荐第一作者将这些交叉融合研究成果撰写并

公开出版，虽然因为各种原因未能完成这些成果的独立出版，但其中部分成果已经融入本书的相关章节，希望对相关领域研究者和学生有所裨益，告慰辞世不久的张乃通院士.

感谢沙学军教授针对小波方法在通信理论和技术研究中应用的有益建议和无私讨论，特别是在基于加权分数傅里叶变换域的多分量多天线通信方法研究和异构网络协同信号处理理论与方法研究过程中深入的、全方位的交流和探索，启发第一作者在本书的撰写过程中重新考虑并采用更恰当的方式阐述多尺度小波理论和线性调频小波理论的某些问题.

感谢严质彬教授，第一作者和他三十多年的友谊一直伴随着小波、分形和混沌、随机过程和随机计算算法等理论的发展以及关于这些理论应用的长期、广泛而且深入的讨论和争论，受益良多，深刻影响着第一作者在《小波与量子小波》中对小波理论以及小波应用某些专题研究的理解和诠释.

除此之外，张海莹博士、赵辉博士、魏德运博士、杨中华博士、赵铁宇博士、袁琳博士、陈冰冰硕士和在读博士研究生王玲参与了部分文献资料的搜集整理工作，在“小波与科学”慕课课程建设过程中，张海莹博士、肖宇博士、杨占文博士、李莉博士和袁腊梅博士部分参与了将《小波与量子小波》中多尺度小波理论的部分内容转换成线上课程内容的工作，在此一并表示感谢.

《小波与量子小波》能够顺利出版，感谢哈尔滨工业大学研究生院和本科生院的资助和大力支持！特别感谢“973”计划课题“资源复用与抗干扰机理(2007CB310606)”和“异构网络协同信号处理理论与方法(2013CB329003)”的资助和大力支持！感谢国家自然科学基金项目“基于加权分数傅里叶变换域的多分量多天线通信方法(61671179)”的资助和大力支持！

最后，感谢吕春玲女士，不仅因为她对作者长期在工作、生活等多方面的关心和照顾，更因为她在《小波与量子小波》的成书过程中付出了大量的时间和精力，完成了十分繁重的相关资料整理、文字编辑排版以及巨量的数学公式和符号编排工作，同时，在将《小波与量子小波》的部分早期内容以“小波理论与应用”的课程名称在‘超星学术网’上公开授课过程中，以及在按照‘学堂在线’要求将《小波与量子小波》中多尺度小波理论的部分内容和习题转换、处理、编辑和整理成为在线慕课课程“小波与科学”的过程中，她完成了超出想象的大量繁琐复杂工作，深得相关网站工作人员的好评和赞赏. 作者再次感谢她，唯愿《小波与量子小波》的出版能够对相关领域科学技术研究人员和学生理解及应用小波有所助益，以此回馈和报答她的辛勤付出！

冉启文
2018 年 4 月于中国哈尔滨
冉　冉
2018 年 4 月于加拿大多伦多

目　　录

第二卷　图像小波与小波应用

第一卷　小波简史与小波基础理论

第三卷　调频小波与量子小波

第 6 章　图像小波与图像小波包理论

在多分辨率分析形式化小波构造理论体系下，利用尺度函数和一系列伸缩嵌套尺度子空间，能够建立相邻两个伸缩嵌套闭尺度子空间的正交直和分解关系，并给出这个正交直和分解中小波子空间整数平移规范正交基的构造和表达. 在一元函数的函数空间中，建立多分辨率分析小波基础上的小波链理论和小波包理论，为一元函数空间、尺度子空间、小波子空间、小波包子空间提供各种规范正交基，为一元函数或一元函数空间中的分布或算子表达提供非常便利的工具.

本章将在一元函数空间多分辨率分析基础上，利用张量积方法建立二元函数或图像的多分辨率分析小波理论、图像小波链理论、图像小波包理论和图像小波包金字塔理论，为了研究数字图像，本章还将建立数字图像的小波理论、小波链理论、小波包理论和小波包金字塔理论.

本章另一个重要内容是光场小波和光场小波包理论. 考虑到物理图像和数字图像的光场本质和光场描述，放弃用脉冲函数(δ-函数)刻画的“经典点光源”，把光场理论建立在各种尺度的“尺度光源”“小波光源”和“小波包光源”的基础上，构建光场小波理论、光场小波链理论、光场小波包理论和光场小波包金字塔理论，把物理图像处理、数字图像处理理解为“抽象的光场传播过程”，特别是物理图像处理和数字图像处理的小波变换、小波链变换、小波包变换以及小波包金字塔变换，各自都体现为一种特殊的小波光场传播方式. 这为光学和光通信提供一种“小波计算理论”和“小波包计算理论”，这样可以把光学和光场传播理解为一种计算和计算过程，而计算的理论基础就是小波理论和小波包理论，而完整的理论体系就是光场小波理论和光场小波包理论.

在本章图像小波理论和图像小波包理论研究过程中，物理图像小波理论和小波包理论最经常使用的两个希尔伯特空间分别是二元平方可积函数构成的线性空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})=\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 和平方可和的“行数”和“列数”均是无穷的矩阵构成的线性空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=\ell^2(\mathbb{Z}^2)$，在这里把它们简单罗列以备用.

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})=\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)\\
&\qquad\qquad=\left\{f(x,y);\iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left|f(x,y)\right|^2dxdy<+\infty\right\}\\
&\left\langle f,g\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}=\iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f(x,y)\overline{g}(x,y)dxdy
\end{aligned}}$$

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = \langle f,f\rangle = \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^2\, dxdy$$

$$(f=g) \Leftrightarrow (f(x,y)=g(x,y),\ \text{a.e.},\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

$$\Leftrightarrow \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y)-g(x,y)|^2\, dxdy = 0$$

二维小波和二维小波包是一维小波和一维小波包理论的自然延伸，研究对象是 $f(x,y)$，它是能量有限或者平方可积的二元函数或物理图像，它们全体构成的二元函数线性空间即为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})=\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$．

在研究物理图像小波变换和小波包变换时，研究对象从物理图像 $f(x,y)$ 转换为“矩阵”，这种矩阵的“行数”和“列数”都是无限的，而与物理图像要求它是平方可积二元函数对等，要求这种“行数”和“列数”都是无限的矩阵必须是平方可和的矩阵，即其全部元素的模平方之和或者能量是有限实数．这样的矩阵全体构成的线性空间就是 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=\ell^2(\mathbb{Z}^2)$．

$$\begin{aligned}\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) &= \ell^2(\mathbb{Z}^2)\\ &= \left\{\mathbb{A}=(a_{r,s});a_{r,s}\in\mathbb{C},(r,s)\in\mathbb{Z}^2,\ \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2}|a_{r,s}|^2<+\infty\right\}\end{aligned}$$

$$\langle \mathbb{A},\mathbb{B}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})} = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2} a_{r,s}b^*_{r,s}$$

$$\langle \mathbb{A},\mathbb{A}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})} = \|\mathbb{A}\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})} = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2}|a_{r,s}|^2$$

在平方可和的二维无穷序列全体构成的矩阵空间 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ 中，其向量是行列无穷维矩阵形式的点 $\mathbb{A}=\{(a_{r,s});a_{r,s}\in\mathbb{C},(r,s)\in\mathbb{Z}^2\}$．形象地说，$\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 中的点或向量是无穷维矩阵，无论是上下或左右都延伸到无穷远．

在建立数字图像小波理论和小波包理论过程中，将使用另一个希尔伯特空间，即 $M\times N$ 的复数矩阵全体构成的空间 $\mathbb{C}^{M\times N}$．

$$\mathbb{C}^{M\times N} = \{\mathbb{A}=(a_{r,s})_{M\times N};a_{r,s}\in\mathbb{C},\ (r,s)\in\mathbb{Z}_{M\times N}\}$$

$$\langle \mathbb{A},\mathbb{B}\rangle_{\mathbb{C}^{M\times N}} = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}_{M\times N}} a_{r,s}b^*_{r,s}$$

$$\langle \mathbb{A},\mathbb{A}\rangle_{\mathbb{C}^{M\times N}} = \|\mathbb{A}\|^2_{\mathbb{C}^{M\times N}} = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}_{M\times N}}|a_{r,s}|^2$$

其中，$\mathbb{Z}_{M\times N}=\{(r,s);0\leqslant r\leqslant M-1,0\leqslant s\leqslant N-1\}$ 表示 $M\times N$ 个二元非负整数组构成的集合．实际上，$M=N$ 是最经常使用的．

特别说明，在物理图像和数字图像二维小波理论以及二维小波包理论中，因为

分解和合成过程中大量出现涉及矩阵范数的恒等式，但出现在这些恒等式中的矩阵未必同维，所以在这里进行统一的说明，在这种情况下，矩阵范数都理解为行列数最大的矩阵范数，这个规定不影响数值运算. 另外，在相关内容的阐述中，当出现不同维数的两个矩阵进行内积运算时，也理解为行列数共同最大数值的矩阵空间中的内积，不足的元素用 0 进行填充，保证进行内积运算时它们是同维的，这样的规定既不影响内积的数值，也不影响对正交性的判断. 在一些特殊的公式和表达式中，为了强调维数的区别，在叙述中会特意标出相应的维数.

6.1　二维尺度函数和二维小波函数

这里将构造和研究二维多分辨率分析以及相应的二维小波构造和小波包构造，使用的方法是张量积，而张量积的基础是一维多分辨率分析、一维多分辨率分析小波和小波包.

6.1.1　二维多分辨率分析与小波

本小节实现从一维多分辨率分析和一维正交小波到二维多分辨率分析和二维正交小波的构造.

(α) 一维多分辨率分析与一维小波

如果$(\{V_J;J\in\mathbb{Z}\},\varphi(x))$是函数空间$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$上的一个多分辨率分析，即这个尺度子空间列与函数的组合满足如下五个要求：

❶ 单调性：$V_J\subseteq V_{J+1},J\in\mathbb{Z}$；

❷ 稠密性：$\overline{\bigcup_{J\in\mathbb{Z}}V_J}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$；

❸ 唯一性：$\bigcap_{J\in\mathbb{Z}}V_J=\{0\}$；

❹ 伸缩性：$f(x)\in V_J\Leftrightarrow f(2x)\in V_{J+1},J\in\mathbb{Z}$；

❺ 构造性：$\{\varphi(x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 构成 V_0 的规范正交基，

其中 $\varphi(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 称为尺度函数，对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$，V_j 称为第 j 级尺度子空间. 定义空间 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中的闭线性子空间列 $\{W_j;j\in\mathbb{Z}\}$：对 $\forall j\in\mathbb{Z}$，子空间 W_j 满足 $W_j\perp V_j,V_{j+1}=W_j\oplus V_j$，其中，$W_j$ 称为(第 j 级)小波子空间.

根据多分辨率分析理论构造获得的正交小波函数是 $\psi(x)\in W_0$.

① 小波子空间列 $\{W_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 相互正交，而且伸缩依赖：

$$g(x)\in W_j \Leftrightarrow g(2x)\in W_{j+1},\quad W_j\perp W_\ell,\quad \forall j\neq \ell,\ (j,\ell)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

② 尺度空间列 $\{V_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 和小波空间列 $\{W_j; j\in\mathbb{Z}\}$ 具有如下关系：

$$\begin{cases} m\geqslant j\Rightarrow W_m\perp V_j \\ m<j\Rightarrow W_m\subseteq V_j \end{cases}$$

③ 空间正交直和分解关系：对于 $j\in\mathbb{Z}, L\in\mathbb{N}$，

$$V_{j+L+1}=W_{j+L}\oplus W_{j+L-1}\oplus\cdots\oplus W_j\oplus V_j=\bigoplus_{k=0}^{+\infty}W_{j+L-k}$$

而且

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})=V_j\oplus\left(\bigoplus_{m=j}^{+\infty}W_m\right)=\bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty}W_m$$

④ 尺度方程和小波方程

$$\begin{cases} \varphi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_n\varphi(2x-n) \\ \psi(x)=\sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_n\varphi(2x-n) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \Phi(\omega)=\mathrm{H}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega) \\ \Psi(\omega)=\mathrm{G}(0.5\omega)\Phi(0.5\omega) \end{cases}$$

或者等价地：对于任意的整数 $j\in\mathbb{Z}$，

$$\begin{cases} \varphi_{j,k}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2k}\phi_{j+1,n}(x),k\in\mathbb{Z} \\ \psi_{j,k}(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2k}\phi_{j+1,n}(x),k\in\mathbb{Z} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \Phi(2^{-j}\omega)=\mathrm{H}(2^{-(j+1)}\omega)\Phi(2^{-(j+1)}\omega) \\ \Psi(2^{-j}\omega)=\mathrm{G}(2^{-(j+1)}\omega)\Phi(2^{-(j+1)}\omega) \end{cases}$$

其中低通和带通滤波器表示如下：

$$\mathrm{H}(\omega)=2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_ne^{-i\omega n},\quad \mathrm{G}(\omega)=2^{-0.5}\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_ne^{-i\omega n}$$

而且，低通系数和带通系数当 $n\in\mathbb{Z}$ 时表示为

$$\begin{aligned} h_n&=\left\langle\varphi(\cdot),\sqrt{2}\varphi(2\cdot-n)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\sqrt{2}\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)\overline{\varphi}(2x-n)dx \\ g_n&=\left\langle\psi(\cdot),\sqrt{2}\varphi(2\cdot-n)\right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}=\sqrt{2}\int_{x\in\mathbb{R}}\psi(x)\overline{\varphi}(2x-n)dx \end{aligned}$$

同时满足 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left|h_n\right|^2=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left|g_n\right|^2=1$．而 $\Phi(\omega)$ 和 $\Psi(\omega)$ 分别是尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换.

⑤ 子空间的规范正交基

A. $\{\phi_{j,k}(x)=2^{j/2}\phi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_j 的规范正交基;

B. $\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 W_j 的规范正交基;

C. $\{\phi_{j,k}(x),\psi_{j,k}(x);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_{j+1} 的规范正交基;

D. $\{\phi_{j+1,k}(x)=2^{(j+1)/2}\phi(2^{j+1}x-k);k\in\mathbb{Z}\}$ 是 V_{j+1} 的规范正交基;

E. $\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k);(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

⑥ 2×2 的构造矩阵:

$$\mathbf{M}(\omega)=\begin{pmatrix}\mathrm{H}(\omega) & \mathrm{H}(\omega+\pi)\\ \mathrm{G}(\omega) & \mathrm{G}(\omega+\pi)\end{pmatrix}$$

满足如下恒等式:

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}^*(\omega)=\mathbf{M}^*(\omega)\mathbf{M}(\omega)=\mathbf{I}$$

或者等价地, 当 $\omega\in[0,2\pi]$ 时,

$$\begin{cases}\left|\mathrm{H}(\omega)\right|^2+\left|\mathrm{H}(\omega+\pi)\right|^2=1\\ \left|\mathrm{G}(\omega)\right|^2+\left|\mathrm{G}(\omega+\pi)\right|^2=1\\ \mathrm{H}(\omega)\overline{\mathrm{G}}(\omega)+\mathrm{H}(\omega+\pi)\overline{\mathrm{G}}(\omega+\pi)=0\end{cases}$$

或者等价地, 对于任意的 $(m,k)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\begin{cases}\left\langle\mathbf{h}_0^{(2m)},\mathbf{h}_0^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}h_{n-2m}\overline{h}_{n-2k}=\delta(m-k)\\ \left\langle\mathbf{h}_1^{(2m)},\mathbf{h}_1^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2m}\overline{g}_{n-2k}=\delta(m-k)\\ \left\langle\mathbf{h}_1^{(2m)},\mathbf{h}_0^{(2k)}\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}g_{n-2m}\overline{h}_{n-2k}=0\end{cases}$$

其中, $\mathbf{h}_0^{(m)}=\{h_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z}),\mathbf{h}_1^{(m)}=\{g_{n-m};n\in\mathbb{Z}\}^{\mathrm{T}}\in\ell^2(\mathbb{Z}),m\in\mathbb{Z}$. 换言之, $\{\mathbf{h}_0^{(2m)};m\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\mathbf{h}_1^{(2m)};m\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中相互正交的两个偶数平移平方可和无穷维规范正交向量系, 而且, 它们共同构成 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的规范正交基.

(β) 二维多分辨率分析与二维小波

现在构造二维多分辨分析. 为此, 首先定义二维函数:

$$Q^{(0)}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$$