蒂图·安德雷斯库系列丛书(第一辑)

数学反思

(2012—2013)

Mathematical Reflections Two Great Years(2012–2013)

[美] 蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)
[罗] 科斯敏·波浩塔(Cosmin Pohoata) 著
郑元禄 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

蒂图·安德雷斯库系列丛书(第一辑)

数学反思

(2012—2013)

Mathematical Reflections
Two Great Years (2012-2013)

[美] 蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu)
[罗] 科斯敏·波浩塔(Cosmin Pohoata) 著
郑元禄 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2017－067 号

图书在版编目(CIP)数据

数学反思. 2012—2013/(美)蒂图·安德雷斯库(Titu Andreescu),(罗)科斯敏·波浩塔(Cosmin Pohoata)著;郑元禄译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.1

书名原文:Mathematical Reflections Two Great Years(2012－2013)

ISBN 978－7－5603－7759－9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①蒂… ②科… ③郑… Ⅲ. ①数学－竞赛题－题解 Ⅳ. ①O1－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 254879 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 21.75　字数 481 千字
版　　次　2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－7759－9
定　　价　58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

纯粹数学按其方法来说是逻辑思维的诗篇.

——A. 爱因斯坦

序言

得到了忠实读者的赏识和他们具有建设性反馈意见的鼓舞，在此我们呈现《数学反思》一书：本书编撰了同名网上杂志2010和2011卷的修订本. 该杂志每年出版六期，从2006年1月开始，它吸引了世界各国的读者和投稿人. 为了实现使数学变得更优雅、更激动人心这一个共同的目标，该杂志成功地鼓舞了具有不同文化背景的人们对数学的热情.

本书的读者对象是高中学生、数学竞赛的参与者、大学生，以及任何对数学拥有热情的人. 许多问题的提出和解答，以及文章都来自于热情洋溢的读者，他们渴望创造性、经验，以及提高对数学思想的领悟. 在出版本书时，我们特别注意对许多问题的解答和文章的校正与改进，以使读者能够享受到更多的学习乐趣.

这里的文章主要集中于主流课堂以外的令人感兴趣的问题. 学生们通过学习正规的数学课堂教育范围之外的材料才能开阔视野. 对于指导老师来讲，这些文章为其提供了一个超越传统课程内容范畴的机会，激起其对问题讨论的动力，通过极为珍贵的发现时刻指导学生. 所有这些富有特色的问题都是原创的. 为了让读者更容易接受这些材料，本书由具有解题能力的专家精心编撰. 初级部分呈现的是入门问题（尽管未必容易）. 高级部分和奥林匹克部分是为国际数学竞赛准备的. 例如美国数学竞赛（USAMO）或者国际数学奥林匹克（IMO）竞赛. 大学部分为高等学校学生提供了解线性代数、微积分或图论等范围内非传统问题的独有的方法.

没有忠实的读者和网上杂志的合作,本书的出版是看不到希望的. 我们衷心感谢所有的读者,并对他们继续给予有力的支持表示感激之情. 我们真诚希望各位读者能沿着他们的足迹,接过他们的接力棒,使该杂志给热忱的数学爱好者提供更多的机会,以及在未来出版既有创新精神,又有趣的作品的这一使命得到实现.

我们也要对 Maxim Ignatiue 先生为收集稿件提供的帮助表示感谢. 对 Gabriel Dospinescu,Cosmin Pohoata 和 Iven Borseneo 先生审阅本书表示十分感谢. 特别要感谢的是 Richard Stong 先生对手稿多处做了改进. 如果你有兴趣阅读该杂志,请登录:http://awesomemath. org/mathematical-reflections/. 读者也可以将撰写的文章、提出的问题或给出的解答发送到邮箱:reflections@ awesomemath. org.

出售本书的收入,我们将用于维持未来几年杂志的运营. 让我们共同分享本书中的问题和文章吧!

Titu Andreescu 博士

◎ 目录

1 问　　题

1.1 初级问题

J217 如果 a,b,c 是整数,使 $a^2+2bc=1$,$b^2+2ca=2\,012$,求 c^2+2ab 的所有可能值.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J218 证明:在边长为 a,b,c,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r 的三角形中,以下不等式成立

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b-c}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c-a}+\frac{\sqrt{ca}}{c+a-b}\leqslant 1+\frac{R}{r}$$

美国 Pittsburgh 大学 Cezar Lupu 与罗马尼亚 Bucharest 市 Virgil Nicula 提供

J219 试图解答问题:Jimmy 利用以下"公式"

$$\log_{ab}x=\log_a\log_b x$$

其中 a,b,x 是不同于 1 的正实数.证明:上式仅当 x 是方程 $\log_a x+\log_b x=1$ 的解时才成立.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J220 求这样的最小素数 p,使得对于 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 中一些(a_k,b_k),$p=a_k^2+kb_k^2$,$k=1,\cdots,5$.

美国 Princeton 大学 Cosmin Pohoata 提供

J221 求以下方程组的整数解

$$xy-\frac{z}{3}=xyz+1,yz-\frac{x}{3}=xyz-1,zx-\frac{y}{3}=xyz-9$$

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J222 已知$\triangle ABC$ 的垂心,它的一角的内、外角平分线与相应对边的交点,要求给出$\triangle ABC$ 的尺规作图法.

美国 Princeton 大学 Cosmin Pohoata 提供

J223 令 a 与 b 是实数,使 $\sin^3 a-\frac{4}{3}\cos^3 a\leqslant b-\frac{1}{4}$,证明:$\frac{3}{4}\sin a-\cos a\leqslant b+\frac{1}{6}$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J224 考虑单位圆中25个点,证明:其中有两点至多相距$\frac{1}{2}$.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J225 令a,b,c是非负实数,使$a+b+c=1$.证明:$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)+abc\leqslant\frac{1}{8}$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J226 在平面上给出$n\geqslant4$个点,没有三点共线,以T_p表示以这些点为顶点的三角形集合,使它的内部至少包含其他各点中的一点.证明:如果$|T_p|\leqslant n-4$,那么$|T_p|=0$.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J227 对正整数N,令$r(N)$是把N的数字反向得出的数.求所有的三位数N,使$r^2(N)-N^2$是一个正整数的立方.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J228 证明:一个边长为1的正方形与一个边长为2的正方形不能没有重叠地放入一个边长小于3的正方形内部.

美国 Florida 州 Roberto Bosch Cabrera 提供

J229 Adrian有一张他爸爸的信用卡.他不知道个人身份证号码(PIN),就不能取得现金.Adrian有一个紧急事件,请求爸爸向他提供PIN(整个数从0 000到9 999).爸爸告诉Adrian,PIN是一个能整除$3^{22}+3$的最大素数,并且不允许用计算器.Adrian能利用七年级数学知识求出PIN,得到他需要的现金,PIN是什么?

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J230 在$\triangle ABC$中,令M是边BC的中点.设有某个$0°<x<30°$,使$\angle ACB$,$\angle ABC$,$\angle MAC$的度数分别为$x,60°-x,2x$.求x.

罗马尼亚 Zalau 市 Marius Stanean 与 Mircea Lasccu 提供

J231 Gigel与Costel有一堆形状都相同的空瓶子J,并且有很多相同硬币任由他们处理,他们决定玩以下游戏:已知每个空瓶能装100个硬币,他们依次从一堆硬币中取出k个硬币,其中$1\leqslant k\leqslant10$,然后(在同一次中)选出一个空瓶,把选出的硬币放进这个瓶中,装满最后一个空瓶的人是获胜者,设Gigel首先放硬币进空瓶,二人都很灵巧,谁获胜?

美国 Princeton 大学 Cosmin Pohoata 提供

J232 对某个实数a,求出并证明可以写成$a\{a\}\lfloor a\rfloor$的所有整数,这里$\lfloor a\rfloor$与$\{a\}$分别表示小于或等于a的最大整数与a的小数部分.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J233 令 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 是正五边形，$B_1B_2B_3B_4B_5$ 是由它的对角线构成的五边形. 证明

$$\frac{K_{B_1B_2B_3B_4B_5}}{K_{A_1A_2A_3A_4A_5}}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J234 $\triangle ABC$ 的边长为 a,b,c，满足 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}=c^{\frac{3}{2}}$. 证明：$\frac{\pi}{2}<\angle C<\frac{3\pi}{5}$.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J235 在等式 $\sqrt{ABCDEF}=DEF$ 中，不同的字母表示不同的数字. 求六位数 $ABCDEF$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J236 在$\triangle ABC$ 中，令 $ABRS$ 与 $ACXY$ 是在边 AB 与 AC 上向三角形外部作出的正方形，如果 U 是$\triangle SAY$ 的外心，证明：直线 AU 是$\triangle ABC$ 的 A－类似中线.

美国 Princeton 大学 Cosmin Pohoata 提供

J237 证明：当且仅当$\angle BAC=60°$时，$\triangle ABC$ 的内切圆直径等于

$$\frac{AB-BC+CA}{\sqrt{3}}$$

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J238 已知实数 $\alpha\in(0,1)$，证明：有正整数 N 使得对于平面上任意 N 个点，其中没有三点共线，存在一个三角形，使它的一角大于 $\pi\alpha$.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J239 令 a 与 b 是实数，使 $2a^2+3ab+2b^2\leqslant 7$. 证明

$$\max\{2a+b,2b+a\}\leqslant 4$$

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J240 令$\triangle ABC$ 是垂心为 H 的锐角三角形，点 H_a,H_b 与 H_c 在它的内部，满足

$$\angle BH_aC=180°-\angle A,\angle CH_aA=180°-\angle C,\angle AH_aB=180°-\angle B$$

$$\angle CH_bA=180°-\angle B,\angle AH_bB=180°-\angle A,\angle BH_bC=180°-\angle C$$

$$\angle AH_cB=180°-\angle C,\angle BH_cC=180°-\angle B,\angle CH_cA=180°-\angle A$$

证明：点 H,H_a,H_b,H_c 共圆.

捷克共和国 Charles 大学 Michael Rolinek 提供

J241 对一些正整数 a,b,c，求可以表示为

$$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c+\min(a,b,c)}$$

的所有正整数.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J242 在$\triangle ABC$中,令D,E,F分别为从点A,B,C向边BC,CA,AB作出的高线足. 令X,Y,Z分别是线段EF,FD,DE的中点,x,y,z分别为从点X,Y,Z向BC,CA,AB作出的垂线. 证明:直线x,y,z共点.

美国 Princeton 大学 Cosmin Pohoata 提供

J243 令a,b,c是实数,使

$$\left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{6}\right)^3+\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{6}-\frac{c}{2}\right)^3+\left(\frac{a}{6}-\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\right)^3=\frac{1}{8}$$

证明:$(a-3b+2c)(2a+b-3c)(-3a+2b+c)=9$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J244 令a与b是正实数. 证明

$$1\leqslant\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n+1]{a^{n+1}+b^{n+1}}}\leqslant\sqrt[n(n+1)]{\sqrt{2}}$$

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J245 求所有正实数三元组(x,y,z),使它们同时满足不等式$x+y+z-2xyz\leqslant 1$与$xy+yz+zx+\dfrac{1}{xyz}\leqslant 4$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J246 令$\triangle ABC$有外接圆Γ,P是边BC上的点,令Ω是圆,与BC相切于P,且与$\odot\Gamma$外切,令τ是从A到$\odot\Omega$的切线长,U与V是$\odot\Gamma$与圆心为A,半径为τ的圆的交点,证明UV与$\odot\Gamma$相切.

美国 Princeton 大学 Cosmin Pohoata 提供

J247 令a与b是多项式x^3-2x+c的不同零点,证明:当且仅当$b^2(3a^2+4ab+2b^2)=5$时,$a^2(2a^2+4ab+3b^2)=3$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J248 令$f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$定义为$f(x)=\dfrac{\{x\}^2}{\lfloor x\rfloor}$,证明:对任何实数$x$与$y$,$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.

罗马尼亚 Bucharest 市 Sorin Radulescu 提供

J249 对所有素数$q>3$,求可整除3^q-4^q+1的最小素数$q>3$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J250 令$\triangle ABC$具有$\angle A\geqslant 120°$,s是$\triangle ABC$的半周长,证明

$$\sqrt{(s-b)(s-c)}\geqslant(3+\sqrt{6})(s-a)$$

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J251 令 a,b,c 是正实数,使 $a\geqslant b\geqslant c,b^2>ac$. 证明

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}>0$$

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J252 令 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,O_a 是 $\triangle ABC$ 平面上的点,使

$$|\angle BO_aC|=2\angle A,|\angle CO_aA|=180^\circ-\angle A,|\angle AO_aB|=180^\circ-\angle A$$

类似地定义点 O_b 与 O_c. 证明:$\triangle O_aO_bO_c$ 的外接圆通过 $\triangle ABC$ 的外心 O.

捷克共和国 Charles 大学 Michael Rolinek 提供

J253 证明:如果 $a,b,c>0$ 满足 $abc=1$,那么

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\leqslant\frac{3}{4}$$

罗马尼亚 Bucharest 市 Marcel Chirita 提供

J254 解方程

$$F_{a_1}+F_{a_2}+\cdots+F_{a_k}=F_{a_1+a_2+\cdots+a_k}$$

其中 F_i 是第 i 个 Fibonacci 数,a_i 是正整数.

美国 Florida 州 Roberto Bosch 提供

J255 考虑平面上彼此距离至少为 1 的 5 个点. 证明:存在彼此距离至少为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$的 2 个点.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J256 求下式的值

$$1^2 2!+2^2 3!+\cdots+n^2(n+1)!$$

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J257 令 BC 是 $\odot\omega$ 的固定弦,A 在 $\odot\omega$ 的优弧 $\overparen{BC}$ 上变动.

(a)证明:$\triangle ABC$ 的垂心 H 在 A 角平分线上的镜像也沿着一圆(可能有零半径)移动.

(b)证明:H 在 A 角平分线上的投影也沿着一圆移动.

捷克共和国 Charles 大学 Michael Rolinek 提供

J258 令 x,y,z 是正实数,使 $x\leqslant 1,y\leqslant 2,x+y+z=6$. 证明

$$(x+1)(y+1)(z+1)\geqslant 4xyz$$

法国 Ecole 综合工科大学 Gabriel Dospinescu 提供

J259 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的所有三元实数组(x,y,z)中,求使 $\min(|x-y|,|y-z|,|z-x|)$最大的三元组(x,y,z).

美国 San Jose 市 Arkady Alt 提供

J260 求以下方程的整数解

$$x^4 - y^3 = 111$$

墨西哥 Oaxaca 市 José Hernández Santiago 提供

J261 令 $A_1 \cdots A_n$ 是内接于圆心为 O,半径为 R 的圆内接多边形,求外接圆上点 M 的轨迹,使

$$A_1M^2 + \cdots + A_nM^2 = 2nR^2$$

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J262 求这样的所有正整数 m,n,使 $\binom{m+1}{n} = \binom{n}{m+1}$.

美国 Florida 州 Roberto Bosch Cabrera 提供

J263 第 n 个五角形数由以下公式给出

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

证明:有无限多个五角形数可以写成两个正整数完全平方和.

墨西哥 Oaxaca 市 José Hernández Santiago 提供

J264 在 $\triangle ABC$ 中,$2\angle A = 3\angle B$,证明

$$(a^2 - b^2)(a^2 + ac - b^2) = b^2c^2$$

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J265 令 a,b,c 是实数,使

$$5(a+b+c) - 2(ab+bc+ca) = 9$$

证明:等式

$$|3a-4b| = |5c-6|, |3b-4c| = |5a-6|, |3c-4a| = |5b-6|$$

中任意 2 个等式蕴含第 3 个等式.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J266 令 $ABCD$ 是圆外切四边形,使 $AB > AD, BC = CD$. 圆心为 C,半径为 CD 的圆交直线 AD 于 E,直线 BE 交这个四边形的外接圆于 K. 证明:$AK \perp CE$.

罗马尼亚 Bucharest 大学 Mircea Becheanu 提供

J267 解方程组

$$\begin{cases} x^5 + x - 1 = (y^3 + y^2 - 1)z \\ y^5 + y - 1 = (z^3 + z^2 - 1)x \\ z^5 + z - 1 = (x^3 + x^2 - 1)y \end{cases}$$

其中 x,y,z 是实数,使 $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J268 考虑位于凸 n 边形 $A_1\cdots A_n$ 中的凸 m 边形 $B_1\cdots B_m$. 它们的顶点在平面上确定了 $m+n$ 个点. 证明:如果 $m+n\geqslant k^2-k+1$,那么可以在这些顶点中求出一个凸 $k+1$ 边形,在它内部不包含其他点.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J269 求方程 $(x^2-y^2)^2-6\min(x,y)=2\ 013$ 的正整数解.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J270 令 a,b,c 是正实数,证明

$$\frac{1}{a+2b+5c}+\frac{1}{b+2c+5a}+\frac{1}{c+2a+5b}\leqslant\frac{9}{8}\ \frac{a+b+c}{(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})^2}$$

罗马尼亚 Bucharest 市 Tran Bach Hai 提供

J271 求具有以下性质的所有正整数 n:

如果 a,b,c 是整数,使 n 整除 $ab+bc+ca+1$,那么 n 整除 $abc(a+b+c+abc)$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 与法国 Ecole 综合工科大学 Gabriel Dospinescu 提供

J272 令 $\triangle ABC$ 的重心为 G,外心为 O. 证明:如果 BC 是它的最大边,那么 G 在直径为 AO 的圆内部.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J273 令 a,b,c 是大于或等于 1 的实数. 证明

$$\frac{a^3+2}{b^2-b+1}+\frac{b^3+2}{c^2-c+1}+\frac{c^3+2}{a^2-a+1}\geqslant 9$$

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J274 令 p 是素数,k 是非负整数,求以下方程的所有正整数解 (x,y,z)

$$x^k(y-z)+y^k(z-x)+z^k(x-y)=p$$

意大利 Milan 市 Alessandro Ventullo 提供

J275 令 $ABCD$ 是矩形,点 E 在边 AB 上,通过 A,B 与 E 在 CD 上正投影的圆交 AD,BC 于 X,Y. 证明:XY 通过 $\triangle CDE$ 的垂心.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J276 求所有正整数 m 与 n,使

$$10^n-6^m=4n^2$$

亚美尼亚 Vanadzor 市 Tigra Akopyan 提供

J277 是否存在这样的整数 n,使 $4^{5^n}+5^{4^n}$ 是素数?

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J278 求所有的正整数 n,使

$$\{\sqrt[3]{n}\}\leqslant\frac{1}{n}$$

其中$\{x\}$表示 x 的小数部分.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J279 求所有的素数三元组(p,q,r),使 $pqr=p+q+r+2\ 000$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J280 令 a,b,c,d 是正实数,证明

$$2(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\geqslant(abc+bcd+cda+dab)^2$$

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J281 解方程

$$x+\sqrt{(x+1)(x+2)}+\sqrt{(x+2)(x+3)}+\sqrt{(x+3)(x+1)}=4$$

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J282 给定一块 $m\times n$ 木板,k 个方格这样涂色,如果 4 个方格的中心是一个矩形的顶点,此矩形的边与木板边缘平行,那么最多有 2 个方格一定被涂色,求 k 的最大值.

美国 Florida 州 Roberto Bosch Cabrera 提供

J283 令 a,b,c 是正实数,证明

$$\frac{2a+1}{b+c}+\frac{2b+1}{c+a}+\frac{2c+1}{a+b}\geqslant3+\frac{9}{2(a+b+c)}$$

乌兹别克斯坦 Samarkand 市 Zarif Ibragimov, Samsu 提供

J284 求 1 个最大整数,使它不能写成不同素数之和.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

J285 令 a,b,c 是三角形的边长,证明

$$8<\frac{(a+b+c)(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)}{abc}\leqslant9$$

美国 Plano 市 Adithya Ganesh 提供

J286 令 $ABCD$ 是圆内接正方形. 如果 P 是$\overset{\frown}{AB}$上的点,求表达式$\frac{PC\cdot PD}{PA\cdot PB}$的最小值.

意大利 Noci 市 Panagiote Ligouras 提供

J287 令 n 是正整数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是区间$(0,\frac{1}{n})$中的实数,证明

$$\log_{1-a_1}(1-na_2)+\log_{1-a_2}(1-na_3)+\cdots+\log_{1-a_n}(1-na_1)\geqslant n^2$$

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供

J288 在平面上给定 4 个点,使其中没有 3 点共线,这 4 个点组成 6 条线段,证明:如果它们的各中点中有 5 个中点在 1 个圆上,那么第 6 个中点也在这个圆上.

维也纳市理工学院 Michael Rolinek 与捷克共和国 Charles 大学 Josef Tkadlec 提供

1.2 高级问题

S217 求方程 $2x^2-y^{14}=1$ 的所有整数解.

亚美尼亚 Yerevan 市 Nairi Sedrakyan 提供

S218 令 $\triangle ABC$ 的内切圆为圆 n,内心为 I,令 D,E,F 分别为圆 n 与边 BC,CA,AB 的切点,此外,令 S 是 BC 与 EF 的交点,令 P,Q 是 SI 与圆 n 的交点,使 P,Q 分别在劣弧 $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{FD}$ 上,证明直线 AD,BP,CQ 共点.

罗马尼亚 Zalau 市 Marius Stanean 提供

S219 在四边形 $ABCD$ 中,令 $\{P\}=AC\cap BD$, $\{E\}=AD\cap BC$, $\{F\}=AB\cap CD$. 以 $\mathrm{isog}_{XYZ}(P)$ 表示 P 关于 $\triangle XYZ$ 的等角共轭点,证明:当且仅当 $AC\perp BD$ 时 $\mathrm{isog}_{ABE}(P)=\mathrm{isog}_{CDE}(P)=\mathrm{isog}_{ADF}(P)=\mathrm{isog}_{BCF}(P)$.

美国 Princeton 大学 Cosmin Pohoata 提供

S220 令 a,b,c 是非负实数. 证明

$$\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3-\frac{1}{2}(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a))}$$
$$\geqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

罗马尼亚 Zalau 市 Mircea Lascu 与 Marius Stanean 提供

S221 令 $\triangle ABC$ 的重心为 G,令 F 是点,且在 $\triangle ABC$ 平面上的所有点 P 上方,量 $PA+PB+PC$ 取最小值,证明 $FG\leqslant\min(AG,BG,CG)$.

美国 Massachusetts 理工学院 Ivan Borsenco 提供

S222 解方程 $3\varphi(n)=4\tau(n)$,其中 $\varphi(n)$ 是 Euler φ 函数,$\tau(n)$ 是 n 的因子数.

美国 Florida 州 Roberto Bosch Cabrera 提供

S223 定义幻数如下:

(ⅰ)从 0 到 9 中的所有数都是幻数;

(ⅱ)如果大于 9 的数可被它的数字个数整除,且删去它最后一个数字后得出的数也是幻数,那么这样大于 9 的数是幻数.

求最大的幻数.

美国 Florida 州 Roberto Bosch Cabrera 提供

S224 令 a,b,c 是大于 2 的实数,使

$$\frac{7-2a}{3a-6}+\frac{7-2b}{3b-6}+\frac{7-2c}{3c-6}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

证明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant1$.

美国 Dallas 市 Texas 大学 Titu Andreescu 提供