当代世界中的数学

数学思想与数学基础

朱惠霖 田廷彦○编

SHUXUE SIXIANG YU SHUXUE JICHU

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

当代世界中的数学

数学思想与数学基础

朱惠霖 田廷彦◎编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书详细介绍了数学在各领域的精华应用，同时收集了数学中典型的问题并予以解答，本书共分2编，分别为数学思想、数学基础.

本书可供高等院校师生及数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

当代世界中的数学.数学思想与数学基础/朱惠霖，田廷彦编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.1

ISBN 978－7－5603－7255－6

Ⅰ.①当… Ⅱ.①朱… ②田… Ⅲ.①数学－普及读物
Ⅳ.①O1－49

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第026677号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.25 字数 390千字
版　　次 2019年1月第1版 2019年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－7255－6
定　　价 38.00元

序　言

如今，许多人都知道，国际科学界有两本顶级的跨学科学术性杂志，一本是《自然》(*Nature*)，一本是《科学》(*Science*).

恐怕有许多人还不知道，在我们中国，有两本与之同名的杂志①，而且也是跨学科的学术性杂志，只是通常又被定位为"高级科普".

国际上的《自然》和《科学》，一家在英国，一家在美国②. 它们之间，按维基百科上的说法，是竞争关系③.

我国的《自然》和《科学》，都在上海，它们之间，却有着某种历史上的"亲缘"关系. 确切地说，从 1985 年(那年《科学》复刊)到 1994 年(那年《自然》休刊)这段时期，这两家杂志的主要编辑人员，原本是在同一个单位、同一幢楼、同一个部门，甚至是在同一个办公室里朝夕相处的同事!

这是怎么回事呢?

这本《自然》杂志，创刊于 1978 年 5 月. 那个年代，被称为"科学的春天". 3 月，全国科学大会召开. 科学工作者、教育工作者，乃至莘莘学子，意气风发. 在这样的氛围下，《自然》的创刊，是一件大事. 全国各主要媒体，都报道了.

这本《自然》杂志，设在上海科学技术出版社，由刚刚复出的资深出版家贺崇寅任主编，又调集精兵强将，组成了一个业务水平高、工作能力强、自然科学各分支齐备的编辑班子. 正是这个编辑班子，使得《自然》杂志甫一问世，便不同凡响；没有几年，便蜚声科学界和教育界④.

1983 年，当这个班子即将一分为二的时候，上海市出版局经办此事的一位副局长不无遗憾地说，在上海出版界，还从未有过如此整齐的编辑班子呢!

一分为二? 没错. 1983 年，中共上海市委宣传部发文，将《自然》杂志调住上海交通大学. 为什么? 此处不必说. 我只想说，这次强制性的调动，却有一项

---

① 其中的《自然》杂志，在创刊注册时，不知什么原因，将"杂志"两字放进了刊名之中，因此正式名称是《自然杂志》. 但在本文中，仍称其为《自然》或《自然》杂志. 此外，应该说明，在我国台湾，也有两本与之同名的杂志，均由民间(甚至个人)资金维持. 台湾的《自然》，创刊于 1977 年，系普及性刊物，内容以动植物为主，兼及天文、地理、考古、人类、古生物等，1996 年终因财力不济而停办. 台湾的《科学》，正式名称《科学月刊》，创刊于 1970 年，以介绍新知识为主，"深度以高中及大一学生看得懂为原则"，创刊至今，从未脱期，令人赞叹.

② 英国的《自然》，创刊于 1869 年，现属自然出版集团(Nature Publishing Group)，总部在伦敦. 美国的《科学》，创刊于 1880 年，属美国科学促进会(American Association for the Advancement of Science)，总部在华盛顿.

③ 可参见 http://en.wikipedia.org/wiki/Science_(journal).

④ 可参见《瞭望东方周刊》2008 年第 51 期上的"一本科普杂志的 30 年'怪现象'"一文.

十分温情的举措，即编辑部每个成员都有选择去或不去的权利. 结果是，大约一半人选择去交通大学，大约一半人选择不去，留在了上海科学技术出版社.

我属去的那一半. 留下的那一半，情况如何，一时不得而知. 但是到1985年，便知道了：他们组成了《科学》编辑部，《科学》杂志复刊了！

《科学》，创刊于1915年1月，是中国历时最长、影响最大的综合性科学期刊，对于中国现代科学的萌发和成长，有着独特的贡献. 中国现代数学史上有一件一直让人津津乐道的事：华罗庚先生当年就是在这本杂志上发表文章而崭露头角的.《科学》于1950年5月停刊，1957年复刊，1960年又停刊. 1985年的这次复刊，其启动和运作，外人均不知其详，但我相信，留下的原《自然》杂志资深编辑，特别是吴智仁先生和潘友星先生，无疑是起了很大的甚至是主要的作用的. 复刊后的《科学》，由时为中国科学院副院长的周光召任主编，上海科学技术出版社出版.

于是，原来是一个编辑班子，结果分成两半（各自又招了些人马），一半随《自然》杂志披荆斩棘，一半在《科学》杂志辛勤劳作.

《自然》杂志去交通大学后，命运多舛. 1987年，中共上海市委宣传部又发文：将《自然》杂志从交通大学调出，"挂靠"到上海市科学技术协会，属自收自支编制. 至1993年底，这本杂志终因入不敷出，编辑流失殆尽（整个编辑部，只剩我一人），不得不休刊了. 1994年，上海大学接手. 原有人员，先后各奔前程.《自然》与《科学》的那种"亲缘"关系，至此结束.

这段多少有点辛酸的历史，在我编这本集子的过程中，时时在脑海里浮现，让我感慨，让我回味，也让我思索……

好了，不管怎么说，眼前这件事还是让人欣慰的：在近20年之后，《自然》与《科学》的数学部分，竟然在这本集子里"久别重逢"了！

说起这次"重逢"，首先要感谢原在上海教育出版社任副编审的叶中豪先生. 是他，多次劝说我将《自然》杂志上的数学文章结集成册；是他，了解《自然》和《科学》的这段"亲缘"关系，建议将《科学》杂志上的数学文章也收集进来，实现了这次"重逢"；又是他，在上海教育出版社申报这一选题，并获得通过.

其次，要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生. 是他，当这本集子在上海教育出版社的出版遇到困难时，毅然伸手相助，接下了这项出版任务[①].

当然，还要感谢与我共同编这本集子的《科学》杂志数学编辑田廷彦先生. 是他，精心为这本集子选编了《科学》杂志上的许多数学文章.

他们三人，加上我，用时下很流行的说法，都是不折不扣的"数学控". 我们

---

① 说来有趣，我与刘培杰先生从未谋面，却似乎有"缘"已久. 这次选编这本集子，发觉他早年曾向《自然》杂志投稿，且被我录用，即收入本集子的《费马数》一文. 屈指算来，那该是20年前的事了.

以我们对数学的热爱和钟情，为广大数学研究者、教育者、普及者、学习者和爱好者(相信其中也有不少的“数学控”)献上这本集子，献上这些由国内外数学家、数学史家和数学普及作家撰写的精彩数学文章.

这里所说的“数学文章”，不是指数学上的创造性论文，而是指综述性文章、阐释性文章、普及性文章，以及关于人物和史实的介绍性文章. 其实，这些文章，都是可让大学本科水平的读者基本上看得懂的数学普及文章.

按美国物理学家、科学普及作家杰里米・伯恩斯坦(Jeremy Bernstein，1929—)的说法，在与公众交流方面，数学家排在最后一名①. 大概是由于这个原因，国际上的《自然》和《科学》，数学文章所占的份额，相当有限.

然而，在我们的《自然》和《科学》上，情况并非如此. 在《自然》杂志上，从1984年起就常设“数林撷英”专栏，专门刊登数学中有趣的论题；在《科学》杂志上，则有类似的“科学奥林匹克”专栏. 许多德高望重的数学大师，愿意在这两本杂志上发表总结性、前瞻性的综述；许多正在从事前沿研究的数学家，乐于将数学顶峰上的无限风光传达给我们的读者. 在数学这个需要人类第一流智能的领域，流传着说不完道不尽的趣事佳话，繁衍着想不到料不及的奇花异卉. 这些，都在这两本杂志上得到了充分的反映.

在编这本集子的时候，我们发觉，《自然》(在下文所说的时期内)和《科学》上的数学好文章是如此之多，多得简直令人苦恼：囿于篇幅，我们必须屡屡面对“熊掌与鱼”的两难，最终又不得不忍痛割爱. 即使这样，篇幅仍然宏大，最终不得不考虑分册出版.

现在这本集子中的近200篇文章，几乎全部选自从1978年创刊至1993年年底休刊前夕这段时期的《自然》杂志，和从1985年复刊至2010年年底这段时期的《科学》杂志. 它们被分成12个版块，每个版块中的文章，基本上以发表时间为序，但少数文章被提到前面，与内容相关的文章接在一起.

还要说明的是，在“数学的若干重大问题”版块中，破例从《世界科学》杂志上选了两篇本人的译作，以全面反映当时国际数学界的大事；在“数学中的有趣话题”版块中，破例从台湾《科学月刊》上选了一篇“天使与魔鬼”，田廷彦先生对这篇文章钟爱有加；在“当代数学人物”版块中，所介绍的数学人物则以20世纪以来为限.

这本集子中的文章，在当初发表时，有些作者和译者用了笔名. 这次选入，仍然不动. 只是交代：在这些笔名中，有一位叫“淑生”的，即本人也.

照说，选用这些文章，应事先联系作译者，征求意见，得到授权. 但有些作译

---

① 参见 Mathematics Today：Twelve Informal Essays，Springer-Verlag(1978)p. 2. Edited by Lynn Arthur Steen.

者，他们的联系方式，早已散失；不少作译者，由于久未联系，目前的通信地址也不得而知；还有少数作译者，已经作古，我们不知与谁联系. 在这种情况下，我们只能表示深深的歉意. 更有许多作译者，可说是我们的老朋友了，相信不会有什么意见，不过在此还是要郑重地说一声：请多多包涵.

在这些文章中，也融入了我们编辑的不少心血. 极端的情况是：有一两篇文章是编辑根据作者的演讲提纲，再参考作者已发表的论文，越俎代庖地写成的. 尽管我们做编辑这一行的，“为他人作嫁衣裳”，似乎是份内的事，但在这本集子出版的时候，我还是将要为这些文章付出过劳动、做出过贡献的编辑，一一介绍如下，并对其中我的师长和同仁、同行，诚致谢忱.

《自然》上的数学文章，在我 1982 年 2 月从复旦大学数学系毕业到《自然》杂志工作之前，基本上由我的恩师陈以鸿先生编辑；在这之后到 1987 年先生退休，是他自己以及我在他指导下的编辑劳动的成果. 此后，又有张昌政先生承担了大量编辑工作；而计算机方面的有关文章，在很大程度上则仰仗于徐民祥先生.

《科学》上的数学文章，在复刊后，先是由黄华先生负责编辑，直至 1996 年他出国求学；此后便是由田廷彦先生悉心雕琢，直到现在；其间静晓英女士也完成了一些工作. 当然，《科学》杂志负责复审和终审的编审，如潘友星先生、段韬女士，也是付出了心血的.

回顾往事，感悟颇多. 但作为这两本杂志的编辑，应该有这样的共同感受：一是荣幸，二是艰辛. 荣幸方面就不说了，而说到艰辛，无论是随《自然》杂志流离，还是在《科学》杂志颠沛，都可用八个字来概括：“筚路蓝缕，以启山林”.

是的，筚路蓝缕，以启山林！

如今，蓦然回首，我看到了：

一座巍巍的山，一片苍苍的林！

《自然》杂志原副主编兼编辑部主任

朱惠霖

2017 年 5 月于沪西半半斋

◎目录

第一编

数学思想

从三角形到流形[①]

本文深入浅出地回顾了整体微分几何学的发展，阐述了运用拓扑学的工具，如何推进偏微分方程、大范围分析学、粒子物理中的统一场论和分子生物学中的 DNA 理论等的发展. 作者着重地指出局部的和整体的拓扑性质之间的联系，强调“欧拉示性数是整体不变量的一个源泉”，并鉴于“所有已知的流形上的整体结构绝大多数是同偶维相关的”，作者希望奇维的流形将受到更多的注意.

一、几　　何

我知道大家想要我全面地谈谈几何：几何是什么；许多世纪以来它的发展情况；它当前的动态和问题；如果可能，窥测一下将来. 这里的第一个问题是不会有确切的回答的. 对于“几何”这个词的含义，不同的时期和不同的数学家都有不同的看法. 在欧几里得看来，几何由一组从公理引出的逻辑推论组成. 随着几何范围的不断扩展，这样的说法显然是不够的. 1932 年大几何学家 O. 维布伦和 J. H. C. 怀特海德说：“数学的一个分

① 陈省身，《自然杂志》第 2 卷(1979 年)第 8 期. 1978 年 4 月 27 日在美国加州大学伯克莱分校所做“教授会研究报告”. 作者 1978 年夏季曾在北京、长春等地做过同样内容的报告. 现据预印本译出.

支之所以称为几何，是因为这个名称对于相当多的有威望的人，在感情和传统上看来是好的."[1] 这个看法，得到了法国大几何学家 E. 嘉当的热情赞同[2]. 一个分析学家，美国大数学家 G. 伯克霍夫(Birkhoff)，谈到了一个"使人不安的隐忧：几何学可能最后只不过是分析学的一件华丽的直观外衣"[3]. 最近我的朋友 A. 韦依说："从心理学角度来看，真实的几何直观也许是永远不可能弄明白的. 以前它主要意味着三维空间中的形象的了解力. 现在高维空间已经把比较初等的问题基本上都排除了，形象的了解力至多只能是部分的或象征性的. 某种程度的触觉的想象也似乎牵涉进来了."[4]

现在，我们还是抛开这个问题，来看一些具体问题为好.

二、三　角　形

三角形是最简单的几何图形之一，它有许多很好的性质，例如它有唯一的一个内切圆，并有唯一的一个外接圆. 又例如九点圆定理，本世纪初几乎每个有一定水平的数学家都知道这个定理. 三角形的最引人深思的性质与它的内角和有关. 欧几里得说，三角形的内角和等于 $180°$，或 π 弧度. 这个性质是从一个深刻的公理 —— 平行公理推出的. 想绕开这个公理的努力都失败了，但这种努力却导致了非欧几何的发现. 在非欧几何中，三角形的内角和小于 π(双曲非欧几何) 或大于 π(椭圆非欧几何). 双曲非欧几何是高斯、J. 鲍耶和罗马契夫斯基在 19 世纪发现的. 这一发现是人类知识史上最光辉的篇章之一.

三角形的推广是 n 角形，或叫 n 边形. 把 n 角形割成 $n-2$ 个三角形，就可看出它的内角和等于 $(n-2)\pi$. 这个结果不如用外角和来叙述得好：任何 n 角形的外角和等于 2π，三角形也不例外.

三、平面上的曲线；旋转指数与正则同伦

应用微积分的工具，就可以讨论平面上的光滑曲线，也就是切线处处存在且连续变化的曲线. 设 C 是一条封闭的光滑定向曲线，O 是一定点. C 上每一点对应着一条通过点 O 的直线，它平行于 C 在这点的切线. 如果这点按 C 的定向跑遍 C 一次，对应的直线总计旋转了一个 $2n\pi$ 角，也就是说旋转了 n 圈. 我们称整数 n 为 C 的旋转指数(图 1). 微分几何中的一个著名的定理说：如果 C 是简单曲线(也就是说 C 自身无交叉点)，则 $n=\pm 1$.

很明显，应该有一个定理把 n 角形外角和定理与简单封闭光滑曲线的旋转指数定理统一起来. 要解决这个问题，就要考虑范围更广的一类简单封闭分段光滑曲线. 计算这种曲线的旋转指数时，很自然地要规定切线在每个反点处旋

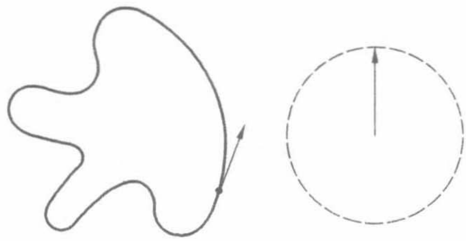


图 1

转的角度等于该点处的外角(图 2). 这样,上面的旋转指数定理对这种曲线也成立. 应用于 n 角形这一特殊情形,就得到 n 角形外角和等于 2π 这个结论.

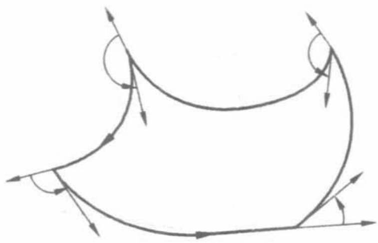
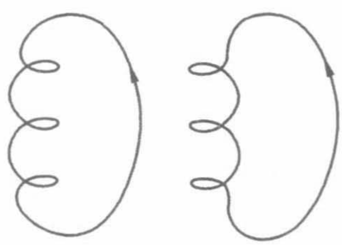


图 2

这个定理还可进一步推广到自身有交叉点的曲线. 对一个常规的(generic) 交叉点,可规定一个正负号. 于是,如果曲线已适当地定向,它的旋转指数等于 1 加上交叉点的代数个数(图 3). 例如"8" 字形曲线的旋转指数为 0.



n=4　　m=-2

图 3

形变,也叫作同伦,是几何学中乃至数学中的一个基本概念. 两条闭光滑曲线称为是正则同伦的,如果其中一条可通过一族闭光滑曲线变形成另一条的话. 因为旋转指数在形变过程中是连续变化的,而它又是整数,所以一定保持不变. 这就是说,正则同伦的曲线具有相同的旋转指数. 格劳斯坦 — 惠特尼(Graustein-Whitney) 的一个出色的定理说,上述命题的逆命题也成立[5],即具有相同旋转指数的闭光滑曲线一定是正则同伦的.

这里,在研究平面上的闭光滑曲线时用了数学中的一个典型手法,就是考察全部这样的曲线,并把它们加以分类(在这里就是正则同伦类). 这种手法在

实验科学中是行不通的，因此它是理论科学和实验科学方法论上一个根本性的差别. 格劳斯坦－惠特尼定理说明，旋转指数是正则同伦类的唯一不变量.

四、三维欧几里得空间

现在，从平面转向有着更加丰富内容和不同特色的三维欧氏空间. 空间曲线（除平面曲线外）中最美好的也许要算圆螺旋线了. 它的曲率、挠率都是常量，并且它是唯一能够在自身内进行 ∞^1 刚体运动的曲线. 圆螺旋线可按挠率的正负分成右手螺旋线和左手螺旋线两类，它们有本质的区别. 一条右手螺旋线是不可能与一条左手螺旋线迭合起来的，除非用镜面反射. 螺旋线在力学中起了重要的作用. DNA（脱氧核糖核酸）分子的克里克－沃森（Crick-Watson）模型是双螺旋线，这从几何学的观点来看可能不是完全的巧合. 双螺旋线有一些有趣的几何性质. 特别是，如果用线段或弧段分别把两条螺线的两端连接起来，就得到两条闭曲线，它们在三维空间中有一个环绕数（linking number）L（图 4）.

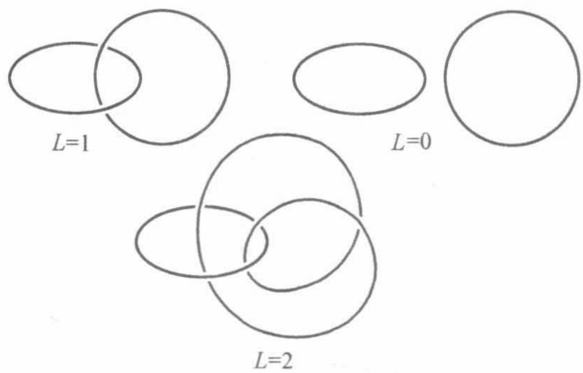


图 4

最近在生物化学中由数学家 W. 波尔和 G. 罗伯茨提出一个有争论的问题，这就是：染色体的 DNA 分子是不是双螺旋线的？如果是这样，那么它就有两条闭线，它们的环绕数是 300 000 级的. 分子的复制过程是：分开这两条闭线，并且把每一条闭线补上它在分子中的补充线（即相补的线）. 由于环绕数这么大，波尔和罗伯茨表明复制过程在数学上会有严重的困难. 因此 DNA 分子（至少对于染色体的来说）的这种双螺旋线构造是受到怀疑的[6].

环绕数 L 可由 J. H. 怀特公式[7]

$$T+W=L \tag{1}$$

决定，这里 T 是全挠率（total twist），W 是拧数（writhing number）. 拧数 W 可用实验来测定，并且在酶的作用下会变化. 这个公式是分子生物学中一个重要

的基本公式. DNA 分子一般是很长的. 为了要把它们放到不大的空间中，最经济的办法是拧它们，使它们卷起来. 上面的讨论可能启示着一门新科学 —— 随机几何学正在产生，它的主要例子来自生物学.

在三维空间中，比起曲线来曲面有重要得多的性质. 1827 年高斯的论文《曲面的一般研究》(*Disquisitiones generales circa superficies curvas*) 标志着微分几何的诞生. 它提高了微分几何的地位，把原来只是微积分的一章提高成一门独立的科学. 主要思想是：曲面上有内蕴几何，它仅仅由曲面上弧长的度量决定. 从弧元素出发，可规定其他几何概念，如两条曲线的夹角和曲面片的面积等. 于是平面几何得以推广到任何曲面 Σ 上，这曲面只以弧元素的局部性质为基础. 几何的这种局部化是既有开创性又有革命性的. 在曲面上，相当于平面几何中的直线的是测地线，就是两点(足够靠近的) 间“最短” 曲线. 更进一步说，曲面 Σ 上的曲线有“测地曲率”，这是平面曲线的曲率的推广. 测地线就是测地曲率处处为 0 的曲线.

设曲面 Σ 是光滑的，并取了定向. 于是在 Σ 的每一点 P 有一个单位法向量 $v(P)$，它垂直于 Σ 在点 P 的切平面(图 5(a)，(b)). $v(P)$ 可看作以原点为球心的单位球面 S_0 上的一点. 从 P 到 $v(P)$ 的映射获得高斯映射

$$g:\Sigma \to S_0 \tag{2}$$

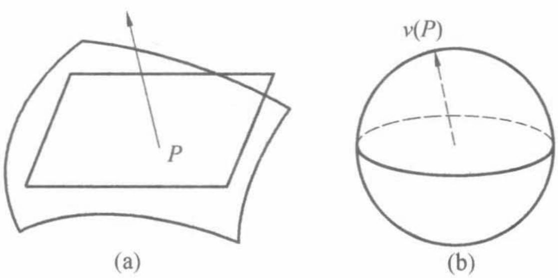


图 5

S_0 的面积元与相应的 Σ 的面积元之比值叫作高斯曲率. 高斯的一个出色定理说：高斯曲率仅仅依赖于 Σ 的内蕴几何. 而且事实上，在某种意义下它刻画了这个几何. 显然，平面的高斯曲率是 0.

像平面几何中那样，我们在 Σ 上考虑一个由一条或几条分段光滑曲线所围成的区域 D. D 有一个重要的拓扑不变量 $x(D)$，称作 D 的欧拉示性数. 它可以很容易地下定义：用“适当” 的方法将 D 分割成许多多角形，以 v，e 和 f 分别表示顶点、边和面片的数目，则

$$x(D) = v - e + f \tag{3}$$

(早在欧拉之前就有人知道这个欧拉多面体定理，但似乎欧拉是第一个认识公式(3) 中这个“交错和” 的重要意义的人.)

在曲面论中，高斯－邦尼特(Bonnet)公式是

$$\Sigma\text{外角} + \int_{\partial D}\text{测地曲率} + \iint_{D}\text{高斯曲率} = 2\pi\chi(D) \tag{4}$$

这里 ∂D 是 D 的边缘．如果 D 是一个平面区域，高斯曲率就为 0；如果它还是单连通的，就有 $\chi(D)=1$．在这种情况下，公式(4)就简化成第三节中讨论过的旋转指数定理．现在我们离开第二节中的三角形的内角和已经走了多么远呀！

我们推广闭平面曲线的几何，考虑的空间中闭定向曲面．旋转指数的推广是公式(2)中的高斯映射 g 的映射度 d．d 的确切意义是深刻的．直观地说，它是映射下的象 $g(\Sigma)$ 覆盖 S_0 的代数"层"数．在平面上，旋转指数可以是任何整数，而 d 则不同，它是由 Σ 的拓扑所完全决定了的

$$d = \frac{1}{2}\chi(\Sigma) \tag{5}$$

嵌入的单位球面的 d 是 $+1$，它与球面的定向无关．S. 斯美尔[8] 得到了一个使人惊异的结果：两个相反定向的单位球面是正则同伦的．说得形象一点：可以通过正则同伦把单位球面从内向外翻过来．在曲面的正则同伦过程中，必须保持曲面在每一点处都有切平面，但允许自身相交．

五、从坐标空间到流形

17 世纪笛卡儿引进了坐标，引起了几何学的革命．用 H. 韦尔的话来说，"以坐标的形式把数引进几何学，是一种暴力行为．"[9] 按他的意思，从此图形和数就会像天使和魔鬼那样争夺每个几何学家的灵魂．在平面上，一点的笛卡儿坐标 (x,y) 是它的两条互相垂直的固定直线(坐标轴)的距离(带正负号)．一条直线是满足线性方程

$$ax + by + c = 0 \tag{6}$$

的点的轨迹．这样产生的后果是从几何到代数的转化．

解析几何一旦闯进了大门，别的坐标系也就纷纷登台．这里面有平面上的极坐标，空间的球坐标、柱坐标，以及平面和空间的椭圆坐标．后者适用于共焦的二次曲面的研究，特别是椭球的研究．地球就是一个椭球．

还需要有更高维数的坐标空间．虽然我们原来只习惯于三维空间，但相对论要求把时间作为第四维．描写质点的运动状态(位置和速度)需要六个坐标(速矢端线)，这是一个比较初等的例子．全体一元连续函数组成一个无穷维空间，其中平方可积的函数构成一个希尔伯特空间，它有可数个坐标．在这里我们考察具有规定性质的函数的全体，这种处理问题的手法在数学中是基本的．

由于坐标系的大量出现，自然地需要有一个关于坐标的理论．一般的坐标只需要能够把坐标与点等同起来，即坐标与点之间存在一一对应；至于它是怎

么来的,有什么意义,这些都不是本质的.

如果你觉得接受一般的坐标概念有困难,那么你有一个好的伙伴.爱因斯坦从发表狭义相对论(1908 年)到发表广义相对论(1915 年)花了七年时间.他对延迟这么久的解释是:“为什么建立广义相对论又用了七年时间呢?主要原因是:要摆脱‘坐标必须有直接的度量意义’这个旧概念是不容易的.”[10]

在几何学研究中有了坐标这个工具之后,我们现在希望摆脱它的束缚.这引出了流形这一重要概念.一个流形在局部上可用坐标刻画,但这个坐标系是可以任意变换的.换句话说,流形是一个具有可变的或相对的坐标(相对性原则)的空间.或许我可以用人类穿着衣服来做个比喻.“人开始穿着衣服”是一件极端重要的历史事件.“人会改换衣服”的能力也有着同样重要的意义.如果把几何看作人体,坐标看作衣服,那么可以像下面这样描写几何进化史

综合几何	裸体人
坐标几何	原始人
流　　形	现代人

流形这个概念即使对于数学家来说也是不简单的.例如 J. 哈达玛德这样一位大数学家,在讲到以流形这个概念为基础的李群理论时就说:“要想对李群理论保持着不只是初等的、肤浅的,而是更多一些的理解,感到有着不可克服的困难.”[11]

六、流形,局部工具

在流形的研究中,由于坐标几乎已失去意义,就需要一些新的工具.主要的工具是不变量.不变量分两类:局部的和整体的.前者是局部坐标变换之下的不变量;后者是流形的整体不变量,如拓扑不变量.外微分运算和里奇(Ricci)张量分析是两个最重要的局部工具.

外微分形式是多重积分的被积式.例如在(x,y,z)空间上的积分

$$\iint_D P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7}$$

的被积式 $P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,这里 D 是一个二维区域,P,Q,R 是 x,y,z 的函数.人们发觉如果上面的微分的乘法是反称的,也就是

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y,\cdots \tag{8}$$

这里记号 $\wedge$ 表示外乘,那么 D(设已有了定向)中变量的变换就会自动地被照顾到了.更有启发性的办法是引进二次的外微分形式

$$w = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{9}$$