

概率论与数理统计

概要与训练

南昌航空大学《概率论与数理统计》课程组 编写



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

概率论与数理统计

概要与训练

南昌航空大学《概率论与数理统计》课程组 编写

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内容简介

本书是根据大学《概率论与数理统计》教学要求和实际教学的进程精心编写的。全书包含两大部分：第一部分为学习概要，以章为单位，集中了各章的主要概念、重要方法、定理（结论）和典型例题。第二部分为课程训练的练习题，练习题分为三类：基本题、提高题和复习题。基本题是针对每堂课的学习，是一般学生必须按时完成的题，目的是帮助学生掌握课堂教学内容；提高题（7*）难度较大，只有很好地掌握课堂教学内容的学生才能解答；复习题是每章之后方便同学综合该章所学，进一步提升能力而精心编制的，希望有助于学生学习。另外还附有若干训练试卷。作为公共基础课程，本书适合大学理、工、经、管等众多专业的学生学习。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计概要与训练 / 南昌航空大学《概率论与数理统计》课程组编写. —北京：电子工业出版社，2018.6

ISBN 978-7-121-34351-3

I. ①概… II. ①南… III. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 115540 号

策划编辑：祁玉芹

责任编辑：祁玉芹

印刷：中国电影出版社印刷厂

装订：中国电影出版社印刷厂

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开本：787×1092 1/16 印张：7 字数：162 千字

版次：2018 年 6 月第 1 版

印次：2018 年 6 月第 1 次印刷

定价：18.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010) 68253127。

前言

P R E F A C E

为了帮助工科、经管等非数学类专业的大学生学好《概率论与数理统计》，我们组织了有多年教学经验的教师，根据大学《概率论与数理统计》教学要求和实际教学的进程，精心编写了本学习概要与训练。学习概要与训练分两大部分。第一部分为学习概要，以章为单位，集中了各章的主要概念、重要方法、定理（结论）和典型例题。第二部分为课程训练的练习题，练习题分为三类：基本题、提高题和复习题。基本题是针对每堂课的学习，是一般学生必须按时完成的题，目的是帮助学生掌握课堂教学内容；提高题（7*）难度较大，只有很好地掌握课堂教学内容的学生才能解答；复习题是每章之后方便同学综合该章所学，进一步提升能力而精心编制的，希望有助于学生学习。另外还附有若干训练试卷。

参加课程训练编写的教师有：李园庭副教授（第一、二章）；程筠讲师（2015 年江西省讲课大赛二等奖得主，第三、四章）；邢秋菊博士（第五、六章）；邹维林博士（第七、八章）。各章的学习概要部分的编写，本书策划、组稿、统稿、审核等都由雷呈凤教授完成。

本课程训练经历了多次大范围的试用、调整、修改，使用效果良好，确实对工科学生学习《概率论与数理统计》有较大帮助。其中根据使用具体情况，做了三次较大的调整和补充，前两次均由李园庭副教授负责，同时每次大的调整和补充之后都进行了认真负责的审阅。

本课程训练的内容涵盖了盛骤等编写的《概率论与数理统计》的第一至第八章，建议读者和该书一起使用。同时建议广大读者不要使用、发表、出版任何解答、答案等，以免影响其他读者独立自主学习而影响到训练效果。由于种种原因，本课程训练的不足之处在所难免，欢迎各位批评指正。

编者

2018 年于南昌

目 录

C O N T E N T S

第一章 随机事件及其概率	1
第一章第一次作业	5
第一章第二次作业	7
第一章第三次作业	9
第一章第四次作业	11
第一章复习题	13
第二章 随机变量及其分布	15
第二章第一次作业	17
第二章第二次作业	19
第二章第三次作业	21
第二章第四次作业	23
第二章复习题	25
第三章 多维随机变量及其分布	27
第三章第一次作业	31
第三章第二次作业	33
第三章第三次作业	35
第三章第四次作业	37
第三章复习题	39

第四章 随机变量的数字特征	41
第四章第一次作业	45
第四章第二次作业	47
第四章第三次作业	49
第四章复习题	51
第五章 大数定理与中心极限定理	53
第五章第一次作业	55
第五章复习题	57
概率论模拟试卷之一	59
概率论模拟试卷之二	63
第六章 样本及抽样分布	67
第六章第一次作业	71
第六章第二次作业	73
第六章复习题	75
第七章 参数估计	77
第七章第一次作业	81
第七章第二次作业	83
第七章第三次作业	85
第七章第四次作业	87
第七章复习题	89
第八章 假设检验	91
第八章第一次作业	93
第八章第二次作业	95
第八章复习题	97
概率论与数理统计模拟试卷之一	99
概率论与数理统计模拟试卷之二	103

第一章 随机事件及其概率

随机试验

随机试验具有下列特点：

1. 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行；
2. 可观察性：试验结果可观察，所有可能的结果是明确的；
3. 不确定性：每次试验出现的结果事先不能准确预知。

概率的统计定义

在相同条件下重复进行 n 次试验，若事件 A 发生的频率 $f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$ 随着试验次数 n 的增大而稳定地在某个常数 p ($0 \leq p \leq 1$) 附近摆动，则称 p 为事件的概率，记为 $P(A)$ 。

概率的公理化定义

设 E 是随机试验， S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$ ，若 $P(A)$ 满足下列三个条件：

1. 非负性：对每一个事件 A ，有 $P(A) \geq 0$ ；
2. 完备性： $P(S) = 1$ ；

3. 可列可加性：设 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互不相容的事件，则有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 。

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

古典概型

我们称具有下列两个特征的随机试验模型为古典概型：

1. 随机试验只有有限个可能的结果；
2. 每一个结果发生的可能性大小相同。

因而古典概型又称为等可能概型。在概率论的产生和发展过程中，它是最早的研究对象，且在实际中也是最常用的一种概率模型。它在数学上可表述为：

在古典概型的假设下，我们来推导事件概率的计算公式。设事件 A 包含其样本空间 S 中 k 个基本事件，即 $A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \dots \cup \{e_{i_k}\}$ ，则事件 A 发生的概率 $P(A) = P(\bigcup_{j=1}^k e_{i_j}) = \sum_{j=1}^k P(e_{i_j})$

$= \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{S \text{ 中基本事件的总数}}$, 称此概率为古典概率, 这种确定概率的方法称为古典方法。这

就把求古典概率的问题转化为对基本事件的计数问题。

几何概型

古典概型只考虑了有限等可能结果的随机试验的概率模型。这里我们进一步研究样本空间为一线段、平面区域或空间立体等的等可能随机试验的概率模型——几何概型。

1. 设样本空间 S 是平面上某个区域, 它的面积记为 $\mu(S)$;

2. 向区域 S 内随机投掷一点, 这里“随机投掷一点”的含义是指该点落入 S 内任何部分区域 A 的可能性只与区域 A 的面积 $\mu(A)$ 成比例, 而与区域 A 的位置和形状无关。向区域 S 内随机投掷一点, 该点落在区域 A 的事件仍记为 A , 则 A 概率为 $P(A) = \lambda \mu(A)$, 其中 λ 为常数, 而 $P(S) = \lambda \mu(S)$, 于是得 $\lambda = \frac{1}{\mu(S)}$, 从而事件 A 的概率为:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

条件概率

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 则称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1)$$

为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 的条件概率。相应地, 把 $P(B)$ 称为无条件概率。

乘法公式

由条件概率的定义立即得到:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0)$$

注意到 $AB = BA$, 及 A, B 的对称性可得到:

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad (P(B) > 0)$$

以上两式都称为乘法公式, 利用它们可计算两个事件同时发生的概率。

全概率公式

全概率公式是概率论中的一个基本公式。它是一个复杂事件的概率计算问题, 可化为在不同情况或不同原因或不同途径下发生的简单事件的概率的求和问题。

定理设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是一个完备事件组, 且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots$ 则对任一事件 B , 有:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) + \dots$$

贝叶斯公式

利用全概率公式, 可通过综合分析一事件发生的不同原因、情况或途径及其可能性来

求得该事件发生的概率。下面给出的贝叶斯公式则考虑与之完全相反的问题，即一事件已经发生，要考察该事件发生的各种原因、情况或途径的可能性。例如，有三个放有不同数量和颜色的球的箱子，现从任一箱中任意摸出一球，发现是红球，求该球是取自 1 号箱的概率；或问，该球取自哪号箱的可能性最大？

定理设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是一完备事件组，则对任一事件 B ， $P(B) > 0$ ，有：

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B | A_j)}, \quad i=1, 2, \dots \quad \text{贝叶斯公式。}$$

两个事件的独立性

定义若两个事件 A ， B 满足：

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (1)$$

则称 A ， B 独立，或称 A ， B 相互独立。

注：当 $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ 时， A ， B 相互独立与 A ， B 互不相容不能同时成立。但 $\emptyset$ 与 S 既相互独立又互不相容(自证)。

定理设 A ， B 是两个事件，且 $P(A) > 0$ ，若 A ， B 相互独立，则 $P(A|B) = P(A)$ 。反之亦然。

定理设 A ， B 是两个事件，若事件 A ， B 相互独立，则下列各对事件也相互独立： A 与 $\bar{B}$ ， $\bar{A}$ 与 B ， $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 。

有限个事件的独立性

定义设 A, B, C 为三个事件，若满足等式：

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B), \\ P(AC) &= P(A)P(C), \\ P(BC) &= P(B)P(C), \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C), \end{aligned}$$

则称事件 A, B, C 相互独立。

对 n 个事件的独立性，可类似写出其定义：

定义设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个事件，若其中任意两个事件之间均相互独立，则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立。

相互独立性的性质

性质 1 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 相互独立，则其中任意 k ($1 < k \leq n$) 个事件也相互独立。

由独立性定义可直接推出。

性质 2 若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 相互独立，则将 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意 m ($1 \leq m \leq n$) 个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立。

性质 3 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n ($n \geq 2$) 个随机事件，则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立 $\xrightarrow{\text{不}} A_1, A_2, \dots, A_n$ 两

两独立。

伯努利概型

设随机试验只有两种可能的结果：事件 A 发生(记为 A)或事件 A 不发生(记为 $\bar{A}$)，则称这样的试验为伯努利(Bernoulli)试验。设 $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p$, ($0 < p < 1$)，将伯努利试验独立地重复进行 n 次，称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验，或简称为伯努利概型。

定理（伯努利定理） 设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 p ($0 < p < 1$)，则在 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, ($k = 0, 1, \dots, n$)。

推论 设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 p ($0 < p < 1$)，则在 n 重伯努利试验中，事件 A 在第 k 次试验中的才首次发生的概率为 $p(1 - p)^{k-1}$, ($k = 0, 1, \dots, n$)。

第一章第一次作业 班级_____姓名_____学号_____

1. 设 A, B 为两个随机事件, 通过 A, B 的运算关系在空白内分别写出下列事件及其对立事件。(1) A 发生, 但 B 不发生, 其对立事件为_____ ; (2) A, B 最多只有一个发生, 其对立事件为_____。

2. 将骰子掷二次, 观察出现的点数, 则该试验的样本空间的样本点总数是; 如果将掷第一次出现的点数记为 x , 掷第二次出现的点数记为 y , 将样本点写成坐标 (x, y) , 则:
满足 $x + y = 5$ 的样本点是_____ ;
满足 $x + y \leq 5$ 的样本点是_____。

3. 某人旅行, 用 P, T 和 S 分别表示他所选择的交通工具是飞机、火车和船, 假设他可选的交通工具是这三种之一, 则下面等式成立的是 ()。

A. $\bar{P} = \overline{T \cap S}$

B. $\bar{P} = T \cup S$

C. $\bar{P} = T \cap S$

D. $\bar{P} = \overline{T \cup S}$

4. 以 A 表示“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则其对立事件 $\bar{A}$ 为 ()。

A. 甲、乙两种产品均畅销

B. 甲种产品滞销

C. 甲种产品滞销或乙种产品畅销

D. 甲种产品滞销, 乙种产品畅销

5. 化简事件 $[\bar{A} \cup (\bar{A}B)](\bar{A} \cup B) \cup \overline{AB}$ 。

6. 设 A, B, C 为三个事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下面事件: (1) $M = \{A, B, C \text{ 中至少有两个发生}\}$; (2) $N = \{A \text{ 不发生, 但 } B, C \text{ 中至少有一个发生}\}$; (3) $P = \{A, B, C \text{ 中不多于一个发生}\}$; (4) $Q = \{\text{只有 } B \text{ 发生}\}$ 。

7*. 事件 A, B, C 满足等式 $A \cup C = B \cup C$, 问 $A = B$ 是否成立? 如果成立, 请证明; 如果不成立, 举出反例。

第一章第二次作业 班级_____姓名_____学号_____

1. 如果完成一项任务有 r 类办法, 第 i 类办法有 m_i 种不同的方法 ($i = 1, 2, \dots, r$), 则完成这项任务的方法总数为; 又如果完成一项任务, 必须经过 r 个步骤, 而完成第 i 个步骤有 n_i 种不同的方法 ($i = 1, 2, \dots, r$), 则完成这项任务的方法总数为_____。

2. 从 $1, 2, \dots, 9$ 这 9 个数中依次取 5 次, 每次取一个数进行排列, 则排成的 5 位数中没有重复数字的有个; 又如果从这 9 个数中一次任取 5 个数 (只取一次), 则所有可能的不同结果有个_____。

3. 在 A, C, C, C, E, E, I, N, S 9 个字母中随机地取 7 个字母排成一行, 那么恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为 ()。

A. $\frac{4}{9!}$

B. $\frac{24}{9!}$

C. $\frac{12}{7!}$

D. $\frac{3}{7!}$

4. 袋中有 5 个黑球、4 个白球, 大小相同, 一次随机地摸出 4 个球, 其中恰好有 3 个黑球的概率是 ()。

A. $\frac{C_4^1}{C_9^4}$

B. $\frac{C_5^3}{C_9^4}$

C. $\frac{C_5^3 C_4^1}{C_9^4}$

D. $\frac{C_5^3}{C_5^4}$

5. 从 $1, 2, \dots, 9$ 这9个数字中任取3个不同的数字, 事件 $A = \{\text{三个数字中不含3或不含5或不含7}\}$, 求 $P(A)$ 。

6. 4封信随机地投入10个邮筒, 求前5个邮筒没有信的概率及每个邮筒最多只有一封信的概率。

7*. 从5双不同的鞋子中任取4只, 这4只鞋子中至少有2只配成一双的概率是多少?

第一章第三次作业 班级_____姓名_____学号_____

1. 从 $1, 2, \dots, 9$ 这9个整数中任取1个, 记事件 $A = \{\text{取得的数为奇数}\}$, 事件 $B = \{\text{取得的数为素数}\}$ (只能被1和自己整除的整数称为素数。注意: 1不是素数), 则 $P(B|A) =$ _____。

2. 一批零件共100个, 次品率为10%。每次从中取一个, 作不放回抽样, 则第一次取得次品, 且第二次和第三次取得合格品的概率为_____。

3. 一批产品中一, 二, 三等品分别占70%, 20%, 10%, 从中随意取出一件, 结果不是二等品, 则取到的是一等品的概率为()。

A. $\frac{7}{10}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $\frac{2}{7}$

D. $\frac{2}{3}$

4. 已知 $P(B) > 0$, $A_1 A_2 = \phi$, 则下列结论不成立的是()。

A. $P(A_1|B) \geq 0$

B. $P(\overline{A_1 A_2} | B) = 1$

C. $P(A_1 A_2 | B) = 0$

D. $P[(A_1 \cup A_2) | B] = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$

5. 设甲袋装有 6 个红球, 4 个白球; 乙袋装有 3 个红球, 5 个白球。今从甲袋中任取二球放入乙袋, 再从乙袋中任取一球, 问取到白球的概率是多少?

6. 已知盒子中有 5 个红球、3 个白球和 2 个黄球, 从中先后两次取球, 每次任取 1 个, 作不放回抽样。(1) 若已知第二次取到红球, 求第一次也取到红球的概率; (2) 若第二次取到的不是红球, 求第一次取到的也不是红球的概率。

7*. 设 10 件产品中有 4 件不合格, 从中取两件, 已知所取的两件产品中有一件是不合格的, 求另一件也是不合格的产品的概率。

第一章第四次作业 班级_____姓名_____学号_____

1. 设事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.3, P(A \cup B) = 0.58$, 则 $P(\bar{A} | B) =$ _____。

2. 设事件 A 与 B 互不相容, $P(A) = 0.4, P(A \cup B) = 0.7$, 则 $P(B) =$ _____。

3. 从 $1, 2, \dots, 9$ 这 9 个数字中任取一个数, 用 A 表示取到的数是 2 或 4 或 6; 用 B 表示取到的数不超过 3, 用 C 表示取到的数大于 6。下述论断不正确的是 ()。

A. A 与 B 相互独立

B. B 与 C 相互独立

C. A 与 C 不相互独立

D. B 与 C 互不相容

4. 设 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 且 A, B 为互不相容事件, 下述论断正确的是 ()。

A. $P(A | B) = 0$

B. $P(\bar{B} | \bar{A}) = 0$

C. $P(A | B) = P(A)$

D. $P(AB) = P(A)P(B)$