Bézier与B样条方法的可调扩展研究

严兰兰 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

Bézier与B样条方法的可调扩展研究

严兰兰 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

Bézier与B样条方法的可调扩展研究/严兰兰著. —武汉：武汉大学出版社,2018.6
ISBN 978-7-307-20236-8

Ⅰ.B… Ⅱ.严… Ⅲ.计算机辅助设计—研究 Ⅳ.TP391.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第106566号

责任编辑:邹 莹 责任校对:杨赛君 装帧设计:张希玉

出版发行：**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件：whu_publish@163.com 网址:www.stmpress.cn)
印刷：北京虎彩文化传播有限公司
开本:720×1000 1/16 印张:13.25 字数:244千字
版次:2018年6月第1版 2018年6月第1次印刷
ISBN 978-7-307-20236-8 定价:78.00元

作者简介

严兰兰，博士，副教授，东华理工大学理学院教师，硕士生导师，主要从事大学公共基础数学的教学与科研工作，主要研究方向为计算机辅助几何设计。主持国家自然科学基金项目2项，江西省自然科学基金项目1项，江西省教育厅科技项目2项，江西省教学改革研究课题2项，江西省教育科学“十二五”规划课题1项，以第一作者身份发表学术论文70余篇，其中SCI 、EI检索论文20余篇，出版专著1部。

前　　言

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design,CAGD)是涉及数学及计算机科学的一门交叉学科,该学科在计算机辅助设计(Computer Aided Design,CAD)、计算机辅助工程分析(Computer Aided Engineering,CAE)和计算机辅助制造(Computer Aided Manufacturing,CAM)中起着中心角色的数学基础作用。

CAGD是一门迅速发展的新兴学科,它的出现和发展既适应现代工业发展的要求,又对现代工业的发展起到了巨大的促进作用,它使几何学从传统时代进入一个崭新的数字化定义的信息时代,焕发出蓬勃生机。

CAGD的主要研究对象是工业产品的几何形状。工业产品的形状大致上可以分为两类:第一类仅由初等解析曲面组成,大多数机械零件属于这一类,可以用画法几何与机械制图的方法完全清楚地表达和传递所包含的全部形状信息;第二类是不能由初等解析曲面组成,而由复杂方式自由变化的曲线曲面,即所谓的自由型曲线曲面组成,例如飞机、汽车、船舶等的外形零件。

Bézier方法、B样条方法是CAGD中描述自由型曲线曲面的两种重要方法,它们虽然有很多优点,但也存在一些不足。本书第1章主要回顾CAGD中形状数学描述的发展主线,分析传统曲线曲面造型方法的优缺点,介绍现有相关文献的研究工作。第2章~第7章着重介绍作者的研究工作,主要以Bézier方法和B样条方法的形状调整、Bézier方法和B样条方法的光滑拼接、B样条方法的插值等问题为研究主线,旨在得出构造形状可调Bézier曲线的一般方法,构造易于拼接的曲线曲面,给出形状和光滑度都可以调节的分段组合曲线曲面,构造集逼近插值于一体的曲线曲面,定义保形逼近曲线和保形插值曲线等。第8章对前文进行总结与展望。

本书可供计算机辅助几何设计、计算机图形学等专业的科学研究人员、工程技术人员以及高等学校的教师和本科生、研究生参考。

本书的研究工作与出版得到了东华理工大学科学计算与最优化科技创新团队的大力支持与资助,同时还得到了国家自然科学基金项目(11761008)、江

西省自然科学基金项目(No. 20161BAB211028)、江西省教育厅科技项目(No. GJJ160558)的资助。

在本书的撰写过程中，作者的老师、同事给予了极大的支持与帮助，作者的家人、朋友给予了无私的关怀、热情的鼓励，作者对此表示深深的敬意与诚挚的感谢！

由于作者水平有限，书中可能有很多不足甚至错误之处，恳请读者不吝指教，作者将不胜感激。

严兰兰

2018年3月

目 录

1 绪　论

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design,通常缩写为CAGD)发展为独立新兴学科是在20世纪70年代。1974年,Barnhill与Riesenfeld[1]在美国犹他大学(The University of Utah)的一次国际会议上,首次提出CAGD这一名称。该名称是在计算机辅助设计(Computer Aided Design,通常缩写为CAD)的名称中加入了修饰词“几何”,用来表达在CAD中更多数学方面的内容。

1.1 CAGD的起源与研究对象

CAGD学科是应船舶、汽车、航空等现代工业发展的需求而产生的,CAGD学科的发展则归功于计算机的出现。工业产品的几何形状是CAGD的主要研究对象,这些形状主要包括两大类。第一类是由一些初等的解析曲面构成的外形,如平面、球面、柱面、锥面等;另一类是由自由型曲线曲面构成的外形,即由复杂形式自由变化的曲线曲面所形成的形状。大多数机械零部件产品的外形属于第一类,它们可以直接用画法几何或者机械制图的方式来表达。但是诸如轮船、汽车、飞机等大型机械产品的外形,则属于第二类,它们难以单纯依靠画法几何或者机械制图的方式来清楚表达。

对于自由型曲线曲面的形状,传统上采用模线样板法来表示和传递,这种方式不但要求设计人员付出繁重的体力劳动,而且表达出来的形状因人而异,这些情况导致产品设计制造的周期漫长,制造的精度不高,互换的协调性较差等一系列问题,从而无法适应现代机械制造产业的发展与需求。正因为如此,人们一直努力探寻能够将形状信息从近似的模拟量转变为精确的数值量,从而可以唯一地定义自由型曲线曲面形状的数学方法。这种转变带来了大量的计算工作,无法用手工完成,只能依靠计算机来解决。因此计算机的出现,成就了用数学方法定义自由型曲线曲面的实际应用,也促成了CAGD这一学科的产生与发展。

根据确定形状的几何信息,并采用CAGD学科提供的数学方法,便可以得

到曲线曲面的方程，也就是建立数学模型。通过在计算机上运行、处理、计算，就可以求出曲线曲面上的点和其他一些重要信息。在这个过程中，通过分析、综合即可了解定义形状的整体以及局部几何特征，这使得实时的显示工作与交互的修改工作几乎可以同步完成。对形状的几何定义为后续的一些诸如数控加工、物性计算、有限元分析等处理工作提供了必备的先决条件。

在对形状信息进行计算机表示、分析、综合的过程中，最关键的步骤是解决计算机表示的问题，也就是要寻找这样的形状数学描述方法，它既可以满足对于形状几何表示的诸多设计要求，又方便计算机处理，同时还可以有效地进行形状信息的传递，以及产品的数据交换等工作。

1.2 形状数学描述的发展历程

由于采用画法几何与机械制图的方式无法将自由型曲线曲面的形状表达清楚，因此工程师们首先需要解决的问题就是自由型曲线曲面的表示问题。

美国 Boeing(波音)飞机公司的工程师 Ferguson[2] 于 1963 年率先给出用参数矢函数表示曲线曲面的思想。Ferguson 定义了参数三次曲线，在单段曲线的基础上构造了组合曲线，同时定义了由角点位置连同角点处沿不同参数方向的切向量这些信息共同确定的 Ferguson 双三次曲面片。在此之前，曲线曲面一直采用显式的标量函数[曲线 $y=y(x)$ 与曲面 $z=z(x,y)$]或者隐式方程[曲线 $F(x,y)=0$ 与曲面 $F(x,y,z)=0$]的形式来表示。Ferguson 提出的曲线曲面的参数形式已成为形状数学描述的标准形式。

美国 Massachusetts Institute of Technology (MIT，麻省理工学院)的 Coons[3] 于 1965 年提出描述曲面较具一般性的思想，给定确定曲面的边界曲线，即可定义一张曲面。1967 年，Coons[4] 再次扩展了他自己的思想。在 CAGD 的工程实际中，应用较多的是 Coons 曲面的特殊形式——Coons 双三次曲面。Ferguson 双三次曲面片在角点处的扭矢为零矢量，而 Coons 双三次曲面则将角点扭矢改为非零矢量，这就是二者的唯一差别所在。由于是单一的曲面片，因此 Coons 双三次曲面和 Ferguson 双三次曲面都存在连接问题。由于不存在形状表示的自由度，因此二者还都存在形状控制问题。

在 1967 年，Schoenberg[5] 给出了解决连接问题的实用方法，他提出了样条函数。目前在 CAGD 中普遍使用的 B 样条方法，属于样条函数的参数形式，被广泛用于形状描述和形状设计。虽然样条方法成功解决了复杂形状描述时的拼接问题，但样条曲线曲面缺少局部形状调整的能力，难以预测最终曲线曲面的形状。

在 1972 年，法国 Renault（雷诺）汽车公司的 Bézier[6] 提出了定义曲线的直观方法，该方法中的曲线形状较大程度上取决于其控制多边形的形状。Bézier 方法比较简单，容易使用，同时非常有效。当对设计效果不满意需要修改时，设计人员只需简单地调整控制顶点的位置就可以改变曲线的形状。更值得一提的是，这种方式引起的曲线形状的变化趋势是可以直观预测的，从而易于控制。Bézier 方法较为成功地解决了曲线曲面的整体形状控制问题，该方法成为 Renault 汽车公司 UNISURF CAD 造型设计系统中的基础数学知识。在 CAGD 中，Bézier 方法始终占据着举足轻重的位置，成为工业界普遍使用的形状数学描述方法，Bézier 方法的提出是 CAGD 发展历程中一个重要的里程碑，它为 CAGD 进一步的发展打下了坚实的基础。但 Bézier 方法也存在不足，连接问题和局部修改问题都是 Bézier 方法未能解决的问题。早在 Bézier 给出 Bézier 方法之前，法国 Citroen（雪铁龙）汽车公司的 de Casteljau 就曾独立研究了与 Bézier 方法相同的曲线曲面表示思想，但 de Casteljau 并没有将他的研究成果对外发表。

1972 年，德国数学家 Boor[7] 深入研究了 B 样条的相关理论与算法。在这之后的第二年，美国 General Motors（通用）汽车公司的 Gordon 和 Riesenfeld[8] 定义了 B 样条曲线曲面，成功地将 B 样条的理论与算法引入形状描述与设计的实践中。与 Bézier 方法相比，B 样条方法一方面继承了其所有的优点，另一方面又完美解决了困扰 Bézier 方法的连接问题和局部控制问题。1980 年，Boehm[9] 给出了 B 样条的节点插入技术，该技术与控制多边形和节点相联系，是 B 样条方法最重要的配套技术之一。Prautzsch[10] 于 1984 年，以及 Cohen 等[11] 于 1985 年给出的升阶技术，则是 B 样条方法的另一项占支配地位的重要技术。

从上面的叙述可以看出，在自由型曲线曲面的形状数学描述问题上，B 样条方法提供了较好的解决方案。工业产品的几何外形除了自由型曲线曲面以外，还有大量规则的初等解析形状，遗憾的是在面对这些形状时，B 样条方法却只能给出近似表达，而无法精确表示，这致使 B 样条方法无法满足大多数机械产品的设计要求。为了解决这一问题，Forrest[12] 于 1968 年首次给出了圆锥截线的有理 Bézier 曲线表示。Ball[13-15] 在 1974－1977 年给出了有理曲线曲面表示方法，并在飞机公司投入使用。虽然有理 Bézier 方法解决了初等解析曲线曲面的表示问题，但有理方法与几何设计系统中原有的曲线曲面描述方法并不兼容。唐荣锡[16] 在 1990 年指出，最让工业界感到不满意的就是系统中需要同时存在两种模型，这不但使系统变得庞杂，易于导致生产管理混乱，而且与产品几何定义的唯一性标准相悖。正因为这个原因，在很长一段时间内，有理方法都

没有被大家广泛接受。于是人们致力于寻找一种统一的数学方法。

1975 年,美国 Syracuse University(锡拉丘兹大学)的博士研究生 Versprille[17] 在他的毕业论文中进一步推广了有理 Bézier 方法,给出了有理 B 样条方法。在这之后,主要归功于 Piegl[18-21] 与 Tiller[22-24],以及 Farin[25-28] 等学者的努力,在 20 世纪 80 年代后期,非均匀有理 B 样条方法(Non Uniform Rational B-spline,通常缩写为 NURBS)成为描述曲线曲面最流行的方法。NURBS 方法将 Bézier 方法、有理 Bézier 方法、B 样条方法这三者进行了统一,因此可以使用统一的数据库。在 1991 年国际标准化组织发布的工业产品数据交换标准中,NURBS 方法被列为唯一一种用于表达工业产品几何外形的数学方法[29-30],从而发展成为行业界的国际通用标准。

与非有理方法相比,NURBS 方法的主要优点在于能够精确表达二次曲线曲面,从而可以用统一的数学方法来表示自由型曲线曲面和初等解析曲线曲面。另外,归功于权因子的引入,NURBS 曲线曲面拥有了调整形状的自由度。无须修改控制顶点,也无须调整节点向量,只要改变权因子,NURBS 曲线曲面的形状就会发生改变。NURBS 方法可以看作是非有理 B 样条方法在四维空间中的推广,因此 NURBS 曲线曲面拥有很多与非有理 B 样条曲线曲面类似的性质,而且非有理 B 样条方法的大多数算法也对 NURBS 曲线曲面适用,这使得 NURBS 方法很容易在已有的造型系统中得到继承和发展[31]。虽然具有如此多的优点,但这并不意味着 NURBS 方法没有缺点。Farin[27] 和 Piegl[18] 指出,与非有理方法相比,NURBS 方法因为将基函数中的多项式换成了有理函数,致使求导数和求积分等常用的基本运算变得复杂。例如一条 n 次有理曲线求导后变成 $2n$ 次有理曲线,次数越高,数值计算越不稳定。另外,虽然 NURBS 方法可以精确表示圆锥曲线曲面,但是对于工程中常用的一些超越曲线,如螺旋线、悬链线、摆线等的精确表示,NURBS 方法仍然无能为力。

1.3 形状可调曲线曲面的概况

纵观 CAGD 中所采用的形状数学描述方法,可以发现大多数的曲线曲面都使用一种特殊的矢量函数形式来表达,即曲线表示为

$$\boldsymbol{p}(u) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a}_i \varphi_i(u) \tag{1-1}$$

曲面表示为

$$\boldsymbol{p}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} \varphi_i(u) \psi_i(v) \tag{1-2}$$

式(1-1)和式(1-2)的表达方式称为基表示形式,式(1-1)中的 $\boldsymbol{a}_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$

以及式(1-2)中的 $\boldsymbol{a}_{ij}(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n)$表示控制顶点,式(1-1)中的 $\varphi_i(u)(i=0,1,\cdots,n)$,以及式(1-2)中的 $\varphi_i(u)(i=0,1,\cdots,m)$和 $\psi_j(v)(j=0,1,\cdots,n)$称为基函数[32]。

基表示形式实际上就是控制顶点与基函数的线性组合,由基表示形式可以看出,当控制顶点给定以后,曲线曲面的性质主要取决于基函数的性质,因此构造性质优良的基函数始终具有重要的理论价值。

Bézier 方法采用的基函数是 Bernstein 基函数。Bernstein 基函数的规范性决定了 Bézier 曲线曲面的几何不变性;Bernstein 基函数的非负性与规范性决定了 Bézier 曲线曲面的凸包性;Bernstein 基函数的对称性决定了 Bézier 曲线曲面的对称性;Bernstein 基函数在端点处的性质决定了 Bézier 曲线的端点插值性、端边相切性,以及曲面的角点插值性、角点切平面构成;Bernstein 基函数的全正性决定了 Bézier 曲线的变差缩减性和保凸性。

B 样条方法采用的基函数是 B 样条基函数。B 样条基函数具有与 Bernstein 基函数相同的规范性、非负性、对称性、全正性,因此 B 样条曲线曲面继承了 Bézier 曲线曲面的几何不变性、凸包性、对称性,B 样条曲线继承了 Bézier 曲线的变差缩减性和凸包性。此外,B 样条基函数具有 Bernstein 基函数不具备的局部支承性质,这使得 B 样条曲线曲面具有 Bézier 曲线曲面不具备的局部控制性质。

虽然 Bézier 方法和 B 样条方法都具备很多适合于形状设计的优点,但在实际工程应用中,它们仍然体现出一些不足和不便之处。下面以曲线为例进行阐述,对于曲面也有类似的结论。对于 Bézier 曲线而言,控制顶点的数量与基函数组中函数的数量相等,所以一旦给定控制顶点,基函数的次数便随之确定,基函数的表达式也就固定下来,整条曲线的形状便唯一确定了。这样一来,当曲线形状不满意而需要修改时,只能改动最初的控制顶点,重新计算曲线信息。这种方式在实际使用时会有一些不便,而且当控制顶点是取自实际测量的精确点时,改变其位置其实是不太适宜的。正因为如此,学者们纷纷找寻可以在不改变控制顶点的情况下,通过其他方式来改变 Bézier 曲线形状的方法。对于 B 样条曲线而言,基函数的次数与控制顶点的数量无关。在选定节点向量的同时,基函数的次数以及具体表达式都相应确定,所以可以说 B 样条曲线的形状由控制顶点和节点向量共同确定,这两个因素也是调整 B 样条曲线形状时可以利用的两个自由度。但是通过改变控制顶点或者节点向量的方式来修改 B 样条曲线的形状,终归是不方便的。因此人们同样希望找到可以在不改变控制顶点和节点向量的情况下,通过其他方式修改 B 样条曲线形状的方法。这种背景催生了一大批的研究成果。

1.3.1 带形状参数的类 Bernstein 基

1.3.1.1 多项式空间

为了保留 Bézier 方法的优点，同时克服它在控制顶点给定以后便不再具备形状调整能力的不足，很多学者尝试在基函数中引入形状参数来增强 Bézier 曲线曲面形状调整的灵活度。

1996 年，齐从谦等[33]给出了含一个参数 l 的 $l(n-1)+1$ 次多项式曲线，当参数 $l=1$ 时，该扩展曲线即为经典的 $n(n\geqslant 2)$ 次 Bézier 曲线，当参数 $l\to\infty$ 时，扩展曲线整体一致逼近于其控制多边形。作者讨论了扩展曲线的保形性，给出了扩展曲线的递推公式与几何作图法。这篇文献中给出的扩展曲线具有比较特殊的端点性质，使得它们的光滑拼接条件比普通 Bézier 曲线要简单。

2003 年，韩旭里等[34]给出了一组由 3 个带参数 λ 的 3 次多项式函数形成的调配函数，当参数 $\lambda=0$ 时，该组调配函数即为 2 次 Bernstein 基函数。由这组含参数的调配函数与控制顶点做线性组合生成的曲线具有与 2 次 Bézier 曲线相同的结构和相似的性质，例如几何不变性、凸包性、对称性、端点插值性、端边相切性。

2005 年，吴晓勤等[35]给出了一组由 4 个带参数 λ 的 4 次多项式函数形成的调配函数，当 $\lambda=0$ 时，该组调配函数即为 3 次 Bernstein 基函数。由其定义的曲线具有与 3 次 Bézier 曲线相同的结构，该曲线继承了 Bézier 曲线的几何不变性、凸包性、对称性、端点插值性、端边相切性。

2006 年，吴晓勤等[36]给出了两组由 5 个带参数 λ 的 5 次多项式函数形成的调配函数，当 $\lambda=0$ 时，这两组调配函数均成为 4 次 Bernstein 基函数。由它们定义的曲线具有与 4 次 Bézier 曲线相同的结构，它们都继承了 Bézier 曲线的几何不变性、凸包性、对称性、端点插值性、端边相切性。

文献[34-36]分别给出了 2 次、3 次、4 次 Bézier 曲线的含参数扩展，这些扩展曲线在继承 Bézier 曲线基本性质的同时，还拥有了不依赖于控制顶点的形状调整能力，而这一点是 Bézier 曲线所缺少的。只要变更曲线中的形状参数，无须调整控制顶点，曲线形状以及曲线对控制多边形的逼近程度就会发生改变。

2006 年，吴晓勤[37]进一步给出了由 $n+1$ 个含参数 λ 的 $n+1$ 次多项式函数构成的调配函数组，这里 $n\geqslant 2$，当参数 $\lambda=0$ 时，它们即为 n 次 Bernstein 基函数。由这些调配函数定义的曲线给出了任意 $n(n\geqslant 2)$ 次 Bézier 曲线的含参数扩展。与文献[34-36]相比，这篇文献对形状可调 Bézier 曲线的理论做了进一步的补充与完善。

除文献[33-37]以外，以含参数的 Bézier 曲线为主题展开研究的文献还有很多。例如：刘植[38]在 2004 年，程黄和等[39]在 2005 年，以及王文涛等[40]在 2005 年均研究过任意 $n(n\geqslant 2)$ 次 Bézier 曲线的单参数扩展。文献[33-40]中所给扩展曲线的共同特点在于都只含一个形状参数。

2008 年，严兰兰等[41]给出了含两个形状参数的 3 次多项式曲线，它以 2 次 Bézier 曲线以及文献[33，34，37-39]中的 2 次 Bézier 扩展曲线为特例。同一年，严兰兰等[42]又进一步地给出了任意 $n(n\geqslant 2)$ 次 Bézier 曲线的双参数扩展，这种扩展曲线不但包含了普通的 $n(n\geqslant 2)$ 次 Bézier 曲线，而且包含了文献[37]中 Bézier 曲线的单参数扩展。

2009 年，严兰兰等[43]给出了不同于文献[41]的含两个形状参数的 3 次多项式曲线，该曲线不仅包含 2 次 Bézier 曲线，还包含 2 次均匀 B 样条曲线，从而用一种形式统一了工程实际中两种较常用的低次曲线。之所以能够实现这种统一，是因为这篇文献中构造的可调曲线的端点位置并不是固定的，而是可以在控制多边形的首末边上自由移动的。

2005 年，夏成林[44]在她的硕士论文中给出了含多个形状参数的 Bézier 扩展曲线。2010 年，张贵仓等[45]、刘植等[46]也给出了 Bézier 曲线的多参数扩展。文献[34-44]中所给扩展曲线的共同特点在于，它们都将对应 Bézier 曲线基函数的次数提升了一次。

通过将 Bézier 曲线基函数的次数提升两次，严兰兰等[47]于 2009 年给出了含两个形状参数的 4 次多项式调配函数，并在其基础上用递推的方式定义了含两个形状参数的任意 $n+2(n\geqslant 2)$ 次多项式调配函数，进而定义了由 $n+1$ 个控制顶点和 $n+2$ 次多项式调配函数做线性组合生成的多项式曲线，该曲线不仅包含普通 $n(n\geqslant 2)$ 次 Bézier 曲线，还包含了文献[34，35，37]中的扩展曲线。

在 2011 年，严兰兰等[48]又给出了一种新的任意 $n(n\geqslant 2)$ 次 Bézier 曲线的单参数扩展，这篇文献同样是将调配函数的次数提升了两次，所给扩展曲线包含 $n(n\geqslant 2)$ 次 Bézier 曲线为特例。在这篇文章中，作者给出了任意次调配函数的显式表示，以及 Bernstein 基函数表示，不仅讨论了含形状参数的张量积 Bézier 曲面，还构造了三角域上含形状参数的 Bernstein-Bézier 曲面。

除了上面介绍的这些文献以外，文献[49-69]同样讨论了 Bézier 曲线的含参数扩展。归功于形状参数的引入，这些文献在保留 Bézier 曲线基本性质的同时，又赋予了曲线形状调整的灵活性，所以在形状修改方面具有一定的优越性。

1.3.1.2 非多项式空间

文献[33-69]中给出的扩展曲线较好地解决了 Bézier 曲线在形状调整灵活

度上的不足。可以注意到，因为 Bernstein 基函数属于多项式函数，所以导致 Bézier 曲线还有另外一个不足，就是无法精确表示工程上常用的一些圆锥曲线和超越曲线，例如圆、椭圆、双曲线、摆线、悬链线、螺旋线等。虽然有理 Bézier 方法可以给出二次曲线的精确表示，但从计算的稳定性以及复杂度这个角度来衡量，有理 Bézier 方法不及 Bézier 方法简单，因此不少学者希望找到既能避免有理形式，又能精确描述一些二次曲线、超越曲线，同时还具有独立于控制顶点的形状调整能力的模型。由于二次曲线、超越曲线的参数方程可以用非多项式函数来表示，因此学者们展开了在非多项式空间上构造性质类似于 Bernstein 基函数的调配函数的研究工作。这里所说的非多项式空间，主要有三角函数空间、双曲函数空间、指数函数空间，以及三者与代数多项式的混合函数空间。

Pottmann[70] 于 1993 年在代数双曲函数空间 span$\{1,t,\sinh t,\cosh t\}$ 中定义了一组称为 H-Bézier 基的调配函数，由之定义的曲线可以精确表达双曲线、悬链线。张纪文[71] 于 1996 年在代数三角函数空间 span$\{1,t,\sin t,\cos t\}$ 中定义了一组称为 C-Bézier 基的调配函数，由之定义的曲线可以精确表达正弦曲线、圆、椭圆。H-Bézier 曲线和 C-Bézier 曲线中均包含一个形状参数，该形状参数为曲线参变量 t 的定义区间长度。当参数趋于 0 时，H-Bézier 曲线和 C-Bézier 曲线的极限位置为传统的 3 次 Bézier 曲线；随着参数的增加，H-Bézier 曲线与控制多边形愈来愈接近，而 C-Bézier 曲线则与控制多边形愈来愈远离。因此 H-Bézier曲线和 C-Bézier 曲线分别位于 Bézier 曲线的两侧。张纪文[72] 于 2005 年在复数域中提出了 H-Bézier 曲线和 C-Bézier 曲线的统一表示。陈秦玉和汪国昭[73] 于 2003 年在代数三角函数空间 span$\{1,t,t^2,\cdots,t^{n-2},\sin t,\cos t\}$ 中定义了一组类 Bernstein 基函数，这组基函数是在初始函数组的基础上，利用积分递推的方式得到的。2004 年，Carnicer 和 Mainar 等[74] 对文献[73]中的模型展开了深入研究，给出了当 $n\geqslant 5$ 时该模型适用于保形几何设计的条件，要求定义区间的长度不小于 2π。

2011 年，程仲美[75] 在她的硕士论文中对 H-Bézier 曲线进行了一系列研究，给出了 3 次 H-Bézier 曲线的中点分割算法和任意点分割算法，给出了 3 次 H-Bézier 曲线之间以及与普通 3 次 Bézier 曲线之间的几何拼接条件，给出了用 4 次 H-Bézier 曲线构造与给定多边形相切的分段组合曲线的方法，给出了 4 次 H-Bézier 曲线的中点细分公式，并证明了曲线的变差缩减性和保凸性，给出了相应曲面的造型实例，展示了形状参数的调节作用。

韩旭里[76] 于 2004 年给出了一组含一个形状参数的 3 次三角类 Bernstein 基函数，由之定义的曲线具有和 3 次 Bézier 曲线相同的结构和基本性质，不同的是，新曲线可以给出圆和椭圆的精确表示，而且只需改变形状参数的取值，就