

普通高等教育“十三五”规划教材

运筹学基础

YUNCHOUXUE JICHU

顾天鸿 王 茁 主 编
张晓娟 吴世迪 副主编



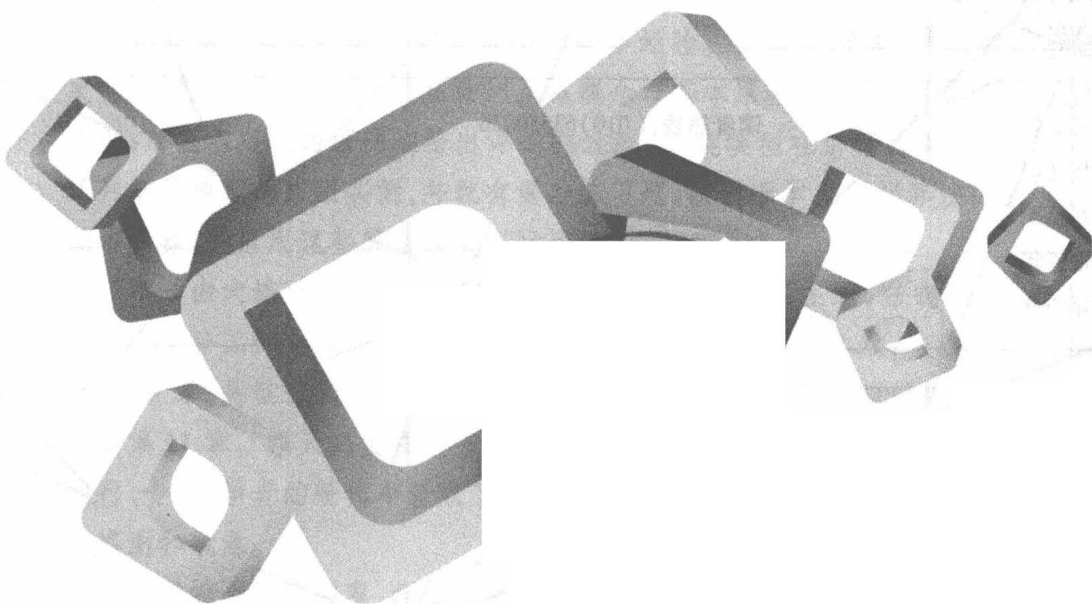
中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等教育“十三五”规划教材

运筹学基础

YUNCHOUXUE JICHU

顾天鸿 王 茁 主 编
张晓娟 吴世迪 副主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书分为十一章,阐述了线性规划基本原理、线性规划的单纯形法、对偶理论、灵敏度分析、运输问题、整数线性规划、动态规划、图与网络分析、目标规划、排队论等运筹学主要分支的基本理论、基本概念和基本计算方法。本书内容深入浅出,通过大量的例题讲解,使运筹学中某些复杂的计算问题变得通俗易懂。

本书适合作为高校经济管理类、交通运输类本科生运筹学的教材或参考书,也可以作为数学建模课程的参考书或辅导教材,还可以作为管理人员和企业决策人员的学习参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础/顾天鸿,王茁主编. —北京:中国铁道出版社,
2019.3

ISBN 978-7-113-25484-1

I. ①运… II. ①顾… ②王… III. ①运筹学 IV. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 021250 号

书 名: 运筹学基础

作 者: 顾天鸿 王 茁 主编

策 划: 张文静

读者热线:(010)63550836

责任编辑: 张文静

封面设计: 刘 颖

责任校对: 张玉华

责任印制: 郭向伟

出版发行: 中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)

网 址: <http://www.tdpress.com/51eds/>

印 刷: 北京虎彩文化传播有限公司

版 次: 2019年3月第1版 2019年3月第1次印刷

开 本: 787 mm × 1 092 mm 1/16 印张: 14.75 字数: 339 千

书 号: ISBN 978-7-113-25484-1

定 价: 39.80 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书,如有印制质量问题,请与本社教材图书营销部联系调换。电话:(010)63550836

打击盗版举报电话:(010)51873659

前言

PREFACE

运筹学是一门研究系统整体最优化的理论学科,在工业、农业、军事国防、交通运输、政府机关、网络通信、工程建设以及商业营销等各个领域都有广泛的应用。它主要根据实际问题的特征,借助数学工具,通过科学的抽象,建立不同类型的优化模型,再进行分析求解,以寻求系统最优的运行方式。

运筹学是理论和实践相结合的学科,具有很强的可操作性,其优化理论也在实践中不断地得以丰富和扩展,但其经典的核心理论与建模方法仍然是各个领域应用最为广泛的部分,也是运筹学这一学科最为重要的基础内容。因此,本书从本科教学的实际需要出发,编排了运筹学最为基础、核心的内容,主要介绍了线性规划的基本原理、线性规划的单纯形解法、线性规划的对偶理论与灵敏度分析等理论部分,以及运输模型、整数线性规划、动态规划、图与网络分析、目标规划、排队论等应用部分,内容完备,实用性强。其中,交替单纯形法为选修内容,已在书中用“*”标识。

参与本书编写的教师均有多年的教学经验。在编写过程中,从实际教学的角度出发,采用易教、易懂的方式,在阐述基本概念与基本原理时,力求语言通俗易懂、叙述清晰透彻;对基本定理的证明均给出详细的过程,每类模型在讲清思路、推导算法的基础上,还列举了典型的应用实例,并配有课后练习题,以利于学生理解算法的原理,掌握算法的基本步骤,并应用这些算法解决实际问题。

本书由大连科技学院的老师编写,顾天鸿、王苗任主编,张晓娟、吴世迪任副主编。具体编写分工如下:王苗编写第1章、第4章、第5章、第8章;张晓娟编写第2章、第3章、第9章;吴世迪编写第6章;顾天鸿编写第7章;孙海云、陈梦璐编写第10章;赵晓宇编写第11章。顾天鸿负责全书的统稿工作。在本书的编写过程中,编者从许多国内外同行、专家、学者的著作中汲取了丰富的营养,获益匪浅,在此对这些专家、学者表示诚挚的感谢和敬意。

由于编者水平有限,加之成书时间仓促,本书难免存在疏漏和不妥之处,敬请专家、学者及读者不吝指教。

编者

2018年9月

目录

CONTENTS

第1章 绪论	1	4.4 影子价格	64
1.1 运筹学的简史	2	4.5 对偶单纯形法	66
1.2 运筹学的概念与性质	3	4.6 交替单纯形法*	69
1.3 运筹学的研究内容	3	本章小结	71
1.4 运筹学的模型	5	练习题	71
1.5 运筹学的应用	6	第5章 灵敏度分析	75
本章小结	7	5.1 资源系数 b_i 影响范围的	
练习题	7	确定	76
第2章 线性规划的基础知识	8	5.2 价值系数 c_j 影响范围的	
2.1 线性规划问题	9	确定	78
2.2 图解法	16	5.3 技术系数 a_{ij} 影响范围的	
2.3 线性规划的解	18	确定	79
2.4 线性规划问题解的基本性质	23	5.4 改变资源系数对解的影响	83
2.5 线性规划典型例题介绍	24	5.5 增加新变量对解的影响	84
本章小结	26	5.6 增加新约束对解的影响	86
练习题	26	本章小结	87
第3章 单纯形法	29	练习题	88
3.1 单纯形法的基本思路	30	第6章 运输问题	92
3.2 表格形式的单纯形法	38	6.1 运输问题的数学模型	93
3.3 人工变量法	44	6.2 运输问题的解法——表上	
3.4 单纯形法解的几种情况介绍	49	作业法	94
本章小结	52	6.3 产销不平衡的运输问题及其	
练习题	52	求解方法	104
第4章 对偶理论	55	6.4 运输问题在实际工程中的	
4.1 对偶问题的提出	56	应用	106
4.2 线性规划的对偶关系	57	本章小结	111
4.3 线性规划的对偶性质	60	练习题	111



第7章 整数线性规划	114	9.6 中国邮路问题	182
7.1 整数线性规划问题的提出	115	本章小结	184
7.2 分支定界解法	116	练习题	184
7.3 割平面解法	119	第10章 目标规划	188
7.4 0-1 型整数线性规划	123	10.1 目标规划问题及其数学模型	189
7.5 指派问题	128	10.2 目标规划的解法	192
本章小结	130	10.3 目标规划的应用	197
练习题	130	本章小结	205
第8章 动态规划	133	练习题	205
8.1 多阶段决策问题	134	第11章 排队论	208
8.2 动态规划的基本概念和基本方程	135	11.1 排队论的基本概念	209
8.3 动态规划的最优性定理	143	11.2 到达分布和服务时间分布	212
8.4 应用典例	144	11.3 常见的单服务台排队系统	214
本章小结	155	11.4 常见的多服务台排队系统	220
练习题	155	11.5 排队系统的最优设计	225
第9章 图与网络分析	157	本章小结	226
9.1 图的基本概念和模型	158	练习题	226
9.2 树和最小支撑树	162	参考文献	229
9.3 最短路问题——狄克斯屈标号法	166		
9.4 最大流问题	174		
9.5 网络中的最小费用最大流问题	180		

第 1 章 绪 论

运筹学是近几十年发展起来的一门新兴的应用型学科,是依靠定量方法进行决策的科学。运筹学是指通过运用科学方法研究某一系统的最优管理和控制,或者分析研究某一系统的运行状况,以及系统的管理问题和生产经营活动。主要研究方法是定量化和模型化,特别是运用各种数学模型。运筹学的目的是基于所研究的系统,力求获得一个合理运用人力、物力、财力和各种资源的最佳方案,以使系统获得最优目标。科学技术的发展,特别是计算机技术的高速发展,赋予了运筹学新的生命力,为应用运筹学实际问题提供了更新、更丰富的手段和方法。运筹学正在广泛地应用到经济管理、工农业生产、商业金融、系统工程、国防科技等领域中,并发挥着越来越重要的作用。

◎本章重点及学习目标

本章重点内容包括运筹学的发展概况、运筹学的性质和特点、运筹学的模型,以及运筹学的分支及应用。通过学习本章节知识点,能够了解运筹学的由来和发展,理解运筹学的性质与特点,能够运用其主要研究内容及其发展趋势,掌握运筹学的数学模型的一般表达形式,以及运筹学的主要领域的应用情况。



1.1

运筹学的简史

运筹学的思想最早出现在第二次世界大战期间,研究讨论在现有的技术、有限资源和装备条件下,如何最大限度地发挥效用以获得最优的效果,这种效果可能是目标的极大或极小。我国科学家把它翻译为“运筹学”(Operational Research 或 Operations Research),“运筹”一词出于《史记:汉高祖本纪》“夫运筹策帷幄之中,决胜于千里之外”。

我国古朴的运筹学思想起源更早,早在《孙子兵法》中对质的论断就伴随着对量的分析,美国军事运筹学会在 1981 年出版的书籍中提到“孙武是世界上第一个军事运筹学的实践者”,更为著名的还有“田忌赛马”“丁谓皇宫修复工程”等至今仍为人津津乐道的典故。

任何一门学科都需要经过萌芽、产生、发展到成熟的四个阶段,运筹学也不例外。运筹学起源于 20 世纪 30 年代,最初出现在军事领域。最早的运筹学工作出现在第一次世界大战期间,用于英国国防部防空试验小组研究高射炮系统。同时,英国人莫尔斯建立的美军横跨大西洋护航队损失模型,则是推动运筹学在第二次世界大战中深入应用的基础,军事运筹理论得到更为全面的发展。1939 年,英国为应对德国的空军突袭,成立了“Blackett 马戏团”工作小组,设计将英国东海岸的 Bawdsey 雷达站的雷达信息传送到指挥系统和武器系统的最佳方式,研究雷达与武器的最佳配置,以及对探测、信息传递、作战指挥、战斗机与武器的协调等问题做了系统的研究,并获得成功。随后,美国助英国大胜德国的大西洋反潜战,以及英国战斗机中队在对抗德军的援法决策等,都应用了运筹学的原理进行作战,因此也称“作战研究”。

运筹学的理论行程及发展则是在战争结束后,即 20 世纪 40 年代。1947 年,美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)发表关于线性规划的研究成果,并给出了求解线性规划问题的单纯形算法。其论述线性规划所解决的问题,其实是在美国空军军事规划时提出的。早在 1939 年苏联学者康托洛维奇在解决工业生产组织和计划问题时,已提出了类似线性规划的模型,并给出求解方法。直到 1960 年康托洛维奇再次发表了《最佳资源利用的经济计算》一书后,线性规划问题才受到国内外的一致重视,康托洛维奇也因此获得了诺贝尔经济学奖。

20 世纪 50 年代,运筹学进入高速发展时期。计算机的出现及技术发展更加拓宽了运筹学的应用领域。1948 年,美国麻省理工学院开设一门全新的学科,介绍运筹学。1952 年,由 Morse 和 Kimball 合著的《运筹学方法》出版问世,同年美国运筹学学会成立,并出版运筹学月刊。1957 年,世界第一次国际运筹会会议在英国牛津大学举办,之后每三年召开一次,并延续至今。1959 年,法国、美国、日本等十余个国家先后成立了本国的运筹学学会。同年,国际运筹学联合会(IFORS)成立。

20 世纪 60 年代至今,现代运筹学理论发展得非常迅速、成熟,已达 20 多个分支,并在全世界范围内普及。这与计算机技术的高速发展和推动密不可分。目前,运筹学广泛应用于工、农、商、物流、经济、人力、军事等各个领域。有人对世界上 500 家著名的企业集团或跨国公司进行过调查

统计,分析发现其中95%的企业使用过线性规划理论、75%的企业使用过运输模型、90%的企业使用过网络计划技术、43%的企业使用过动态规划,可见运筹学已成为企业运营管理的重要工具和手段。

运筹学在国内的发展是始于20世纪50年代中后期。早期学成回国的系统工程专家钱学森、数学家许国志、质量管理专家刘源张,以及经济学家周华章,他们将西方的运筹学理论、方法引入国内,并结合中国实际向全社会推广。1958年分别在中国科学院力学研究所、数学研究所成立了2个运筹学研究室,两者于1960年合并,1980年中国运筹学学会和中国系统工程学会成立。我国于1982年加入IFORS(国际运筹学联合会),并于1999年8月组织了第15届大会,越来越多的国内专家和学者加入到这一领域的研究队伍之中,使我国的运筹学发展迅速追上国际水平。

1.2

运筹学的概念与性质

截至目前,不同学者对运筹学的定义,仍未达到统一。英国运筹学学会对运筹学的定义是:运筹学是运用科学方法(特别是数学方法)解决工业、商业、政府部门及国防部门中有关的人员、机器、材料和资金等大型系统的指挥和管理方面出现的问题,其目的是帮助管理者科学地决定其策略和行动。美国运筹学学会对运筹学的定义为:运筹学是研究在资源不充足的情况下如何应用科学方法最好地设计人机系统,并使之最好运行的一门科学。德国科学辞典上定义为:运筹学是从事决策模型的数学开发的一门科学。我国《中国企业管理百科全书》中这样定义:运筹学是指应用分析、试验、量化的方法对经济管理系统中人力、物力、财力等资源进行统筹安排,为决策者提供有依据的最优方案,以实现最有效的管理。

概括地看以上对运筹学的定义,把握运筹学的核心,即应用数学为主要的技术手段,综合应用军事、经济、管理、心理、社会、物理、化学及工农业生产等理论及方法,对实际问题中的有限资源进行优化配置,以实现最优的解决方案的科学方法。

综上所述,运筹学的研究领域非常广泛,强调定量性、系统性、交叉性、应用性与实践性。运筹学就是在系统观念指导下,面对客观现实系统中的资源环境,充分利用自然科学和技术科学的各种科学工具,以数学模型为中心,坚持量化方法为主导,为实现某个目标而进行优化或决策的思想和技术方法体系,是一门综合性学科。运筹学处处体现着“又好又快又省”的朴素思想,是与人类改造自然、利用自然的主基调相符合的,是一门思想性、方法性学科。

1.3

运筹学的研究内容

运筹学理论发展至今,尽管只经历了70多年,但其涉及内容极其广泛、覆盖面广,应用领域较



为全面,已然形成了一个规模庞大的学科组织。其主要的研究内容包括:线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、目标规划、运输模型、网络分析、工程计划、库存论、排队论,等等。每项内容都可作为运筹学的一个独立分支,单独作为一门理论存在,自成一体。

线性规划主要指的是探讨在经营管理过程中如何将现有的人力、资源更好地配置,去完成更多的任务、获取更多的效益。对于此类问题,将系统的统筹用数学语言描述,并建立函数约束关系,将问题目标和限制条件用等式或不等式表达得到线性的数学模型,对于模型中的变量,若取值是连续的,则称这类模型为线性规划模型,它可以表示成求函数在满足约束条件下的极大值或极小值问题。若线性规划模型中变量取值不连续,亦或模型中的目标函数或约束条件为非线性关系,此时称之为非线性规划模型,非线性规划是线性规划理论的进一步发展和延续,这类模型更多地应用于设计、经济平衡、工程的优化设计。

线性规划、非线性规划与古典数学中极值求解的问题仍存在着本质上的差别,古典数学的计算方法大多只适用于表达式和约束条件相对简单的情况。而运筹学的线性规划及非线性规划中问题的目标函数和约束条件都相对复杂得多。对于这类问题,要求给出准确的数字解及方案,故需要研究一种特定的、针对这类问题的求解方法——单纯形法。

整数规划是当线性规划和非线性规划问题中的变量取值要求增加整数约束时的变化,当整数规划问题的变量取值只能取 0 或 1 时,这类问题被称为 0-1 整数规划;当整数规划问题的所有变量都要求为整数时,称之为纯整数规划;当整数规划问题中,仅对部分变量有整数要求时,则称为部分整数规划。因此,这类问题对于变量的取值是非连续的,方案需要做出取舍。

动态规划是研究多阶段复杂问题的最优策略的过程。某些工程项目、经营管理活动由若干个环节相互关联、相互影响串联而成,在每个阶段都需要做出相应决策,上个阶段的决定直接影响下个阶段的状态,各个阶段的决策之间相互关联,从而寻求全过程最优,构成一个多阶段的最优策略的过程。

网络分析主要是研究生产组织中的生产工序问题、计划管理中的管道铺设、电话线架设、仓库及工厂布局设计等最短路径问题、最小生成树问题、最大流问题、最小费用最大流问题等。通常把研究对象看成网络中的点,研究对象之间的关系用直线表示,将现实问题转化为点线之间的关系,便构成了网络中的图。图是构成网络的基本单元,根据具体研究对象的不同,赋予图中电线不同的含义。在计划和安排大型的复杂工程时,网络分析技术是重要的实现工具。

排队现象是日常生活中接触最多的,由此产生的排队理论是运筹学的又一个分支。排队研究的对象不仅仅是人,也可能是物或者某种现象,如打进广播台的电话热线、装车卸车、机器等待被修理等。此类问题的研究目的是要回答如何通过改进排队系统中的服务机构或组织被服务的对象,使得某种指标达到最优的问题。

运筹学本身具有多分支、多学科交叉的特点,因此具有非常宽阔的应用领域,目前已逐渐渗透到诸如服务、库存、搜索、人口、对抗、控制、时间表、资源分配、厂址定位、能源、设计、生产、可靠性等各个方面。

1.4 运筹学的模型

运筹学是专门用来解决实际问题的学科,在处理各类复杂问题时,一般按照确定目标、制定方案、建立模型、制定解法的步骤实施。运筹学被用于处理社会、经济、生活中各类常见的问题,但是在其理论的发展过程中为了方便解决同类型问题,仍旧是形成了某些抽象模型,并能用以解决更为广泛的实际问题。

运筹学研究 and 解决问题的核心是正确建立和使用模型。通常,模型可以认为是客观世界或显示系统的代表或抽象的描述,是帮助人们认识、分析和解决实际问题的有力工具。人们在管理工作或其他工作中,为了研究某些问题的共性,有助于解决实际问题,经常使用一些文字、数字、符号、公式、图表以及实物,描述客观事物的某些特征和内在联系,从而表示或解释某一系统的过程,这就是模型。

模型有三种基本形式:形象模型、模拟模型及符号或数学模型,目前用得最多的是符号或数学模型。数学模型是将现实系统或问题中有关参数和因素及其相互关系归纳成一个或一组目标,运筹学中所使用的数学模型,一般是由决策变量、约束或限制条件以及目标函数所构成,其实质表现为在约束条件允许的范围内,寻求目标函数的最优解。其中决策变量又称为可控制变量,是模型所代表的系统中受到控制或能够控制的变量,在模型中表现为未知参数,对模型进行分析研究,最后就是通过选择确定决策变量来实现其最优解;约束条件即决策变量客观上必须满足的限制条件,它反映出实际问题中不受控制的系统变量或环境变量对受控制的决策变量的限制关系;目标函数是模型所代表的性能指标或有效性的宏观度量,在模型中表现为决策变量的函数,反映了实际问题所要达到的理想目标。

数学模型的一般形式可表述为

$$\begin{aligned} & \text{opt}(\max \text{ 或 } \min) z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s. t. } & \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\text{或 } =, \geq) 0, i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\text{或 } =, \geq) 0, j = 1, 2, \dots, l \\ x_j \leq (\text{或 } =, \geq) 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为决策变量; z 为目标函数; $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\text{或 } =, \geq) 0$ 和 $h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\text{或 } =, \geq) 0$ 为约束条件。

针对实际问题建立的运筹学模型,一般应满足两个基本要求:一是要能完整地描述研究的系统,以便能代替现实供人们分析研究;二是要在适合所研究问题的前提下,模型应尽量简单。要实现这些要求,在开始建模时,往往不容易做到。在开始阶段,很难判断选择什么样的模型和确定建立模型的范围,需要有丰富的实践经验和熟练的技巧,有时需要多次反复修改,最后确定下来。所以建立模型是一种创造性的劳动。一般来说,这项工作应由运筹学工作者与专业实际工作者共同协作进行最为适宜。



随着运筹学应用逐渐向更复杂的经济系统和社会系统渗透,而这些系统又往往存在着大量的不确定因素。因此,运筹学仅仅依靠数学模型做定量分析已很难处理好系统的优化问题。所以其研究方法已开始出现将定量分析、定性分析及计算机模拟等相结合的综合优化分析方法发展的趋势。

1.5

运筹学的应用

由运筹学的发展简史可以看出,运筹学的出现和应用最早是在军事范畴。直到第二次世界大战结束后,其应用领域转向民用,在社会经济、工农业生产等方面得到了长足的发展。

(1) 生产计划。使用运筹学方法从总体上确定最优的生产、存储和劳动力安排计划,以谋求最大的利润或最小的成本,主要用线性规划、整数规划方法来解决此类问题。此外,运筹学还可以应用在生产作业计划、日程表的编排、合理下料、配料问题及物资管理等方面。

(2) 运输计划。应用运筹学中有关运输计划问题的方法,确定所用成本最小的运输方案、调拨物资的分配、运输工具的调度及建厂选址的方案选择等。

(3) 设备的更新、维修,以及系统的可靠性分析等。

(4) 仓储管理。存储论应用于多种物资库存的管理,确定某些设备的合理能力或容量及适当的库存方式和库存量。

(5) 人力资源管理。可以应用运筹学方法对人员的需求和获得情况进行预测,确定合适的人员编制;可以应用指派问题对人员合理分配;可以应用层次分析法来确定人才评价体系等。

(6) 财政预算。使用统计分析、数学规划与控制决策分析方法,应用于财务的预测、贷款、成本分析、定价、证券分析与管理、现金管理。

(7) 市场营销。运筹学方法可用于广告预算和媒介的选择、竞争性的定价、新产品的开发、销售计划的制定等方面。

(8) 网络流量控制。运用图与网络分析的原理,解决现实问题的网络系统中流量分配、流量管控,以及网络最佳设计和优化控制。

(9) 项目的选择和评价。

(10) 项目工程优化。在建筑、电子、光学、机械和化工等领域的工程项目中应用较广。

(11) 计算机和信息系统。用于计算机的内存分配,研究不同排队规则对计算机工作性能的影响;亦或在寻找满足一定需求文件的查询次序时应用整数规划的原理,在研究计算机信息系统的自动设计时应用网络分析和线性规划的方法等。



本章小结

运筹学是一个源于实际、服务于实际,并一直持续不间断发展的学科,与数学、管理等学科的交互性和关联性密切。学生学习运筹学的发展简史,并从中理解运筹学的内涵及性质,了解运筹学的主要研究内容、模型及其应用领域与前景。



练习题

1. 什么是运筹学? 特点有哪些?
2. 请列出应用运筹方法进行决策的步骤。
3. 简述定性决策和定量决策之异同。
4. 简述运筹学的数学模型及其三要素。

第 2 章

线性规划的基础知识

线性规划是运筹学中研究较早、理论较为成熟、应用比较广泛的一个分支,是进行科学管理和生产决策的数学方法。主要研究在一定条件下,如何解决有限资源的最佳分配,使经济效果达到最好。研究的问题分为两个方面:一是如何充分利用资料获得最大的收益;二是在既定目标下,如何合理分配资源,使得成本最小。线性规划的英文为 Linear Programming,简称 LP。

◎本章重点及学习目标

本章的重点内容包括线性规划的模型和解的基本概念。通过本章节知识点的学习,要求掌握线性规划模型特点、线性规划问题的建模步骤、解的概念和基本理论,了解线性规划问题特点、图解法求解思路,能够运用线性规划基础知识对线形规划问题建立线性规划模型。

2.1

线性规划问题

2.1.1 什么是线性规划问题

在实践中,哪些问题可以根据实际要求以线性规划问题进行解决? 本小节将举两个简单的例子说明。

【例 2.1】 生产计划问题。

某工厂打算生产甲、乙两种产品,甲、乙产品的零件需要在 A、B、C 三个车间加工,每件甲产品的零件需要消耗 A、B、C 车间的时间分别为 3、2、0 工时,每件乙产品消耗 A、B、C 车间的时间分别为 6、0、2 工时。A、B、C 三车间每天用来生产甲、乙的总工时分别为 24、12、6 工时。生产一件甲、乙产品可获得利润分别为 2 元和 3 元。工厂应如何安排生产计划获得利润最多?

分析

这是一个典型的生产计划问题,生产甲、乙两种产品都要使用 A、B、C 车间的工时,而 A、B、C 车间的总工时是一定的。通过问题我们可以知道,获得更多利润是企业的追求目标,而与利润有关的是产品的产量。产品的产量越大企业得到的利润越多,但是在生产产品时要受到一定的制约,本题中的制约条件就是生产产品的三个车间的最大工作能力。在此制约下如何求解产品产量就是本问题的核心。

为了更好地分析问题,建立该问题的数据表,如表 2.1 所示。

表 2.1

分 类	产品甲	产品乙	生产能力/工时
A	3	6	24
B	2	0	12
C	0	2	6
利润/元	2	3	

通过以上的分析,结合表 2.1 建立此问题的数学模型。

【解】

设该企业生产甲、乙产品分别为 x_1 、 x_2 件,每天获得总利润为 z 。

根据题意我们知道每天获得的总利润计算公式为:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \quad (2.1)$$

式(2.1)被称为目标函数。对于一个企业来说,产品的产量需要领导进行决策来确定,是未知量,所以称 x_1 和 x_2 为决策变量。生产甲、乙产品要受到生产车间 A、B、C 最大生产能力的制约,

所以建立其车间对产品产量的约束,其消耗车间的工时不能大于车间的最大工时,如下所示:

A 车间的约束:

$3x_1 + 6x_2 \leq 24$

(2.2)

B 车间的约束:

$2x_1 \leq 12$

(2.3)

C 车间的约束:

$2x_2 \leq 6$

(2.4)

称式(2.2)、(2.3)、(2.4)为约束函数。

结合实际问题考虑决策变量 x_1 和 x_2 是产品的数量,所以是非负的,必须满足以下限制条件:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(2.5)

把式(2.5)称为非负性约束。

约束函数和决策变量的非负性约束均是对决策变量产生的限制,所以统称为约束条件。

这样例 2.1 可以表述为在约束条件的限制下寻找目标函数 z 达到最大值时的 x_1 和 x_2 的值。

把目标函数和约束条件放在一起,可以建立此问题的数学模型为:

$\max z = 2x_1 + 3x_2$

s. t. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ 2x_1 \leq 12 \\ 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

其中, $\max$ 是英文单词“maximize”的缩写,意思是最大化; $s. t.$ 是英文“subject to”的缩写,表示受约束于的意思。

【例 2.2】 配料问题。

某厂家要为用户生产一种使用甲、乙两种原料配置而成的特殊产品丙。丙产品根据合同规定含有 A、B、C 三种成分的含量分别不低于 4%、2%、5%。甲含三种成分的含量分别为 12%、2%、3%;乙含三种成分的含量分别为 3%、3%、15%。甲、乙原料的成本分别为 8 元/kg、5 元/kg。现在厂家要为用户生产 5 kg 丙产品,应如何配置才使得总成本最小?

分析

此问题想达到的目标为在配置 5 kg 丙产品时,使得成本最小。其决策变量为配置 5 kg 丙产品时所使用的甲、乙原材料的数量。甲、乙原材料的成本不相同,在配置过程中要受约束于合同中对丙产品 A、B、C 最低成分的限制。建立此问题的数据表如表 2.2 所示。

表 2.2

分 类	原料甲	原料乙	最低含量/%
A	12	3	4
B	2	3	2
C	3	15	5
成本/元	8	5	

【解】 设配置丙产品 5 kg 需要甲、乙原材料的数量分别为 x_1, x_2 , 所花费的总成本为 z 。
根据表 2.2 和题意可以列出此问题的数学模型为：

$$\begin{aligned} \min z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 15x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 min 是英文单词“minimize”的缩写,其意思为最小化。

在本例题中,约束条件为每一种化学成分的最低含量的要求,除此之外还要考虑到用甲、乙原材料所配置的丙产品重量的约束,即: $x_1 + x_2 = 5$,此约束称之为等式约束。

2.1.2 线性规划问题的一般模型

观察【例 2.1】和【例 2.2】的模型可以发现,目标函数和约束条件均为决策变量的一次函数,所以称之为线性规划问题,对应的模型均为线性规划模型。在线性规划模型中含有三要素分别为:决策变量、目标函数和约束条件,建立线性规划模型的关键即建立其三要素的正确关系。下面探讨线性规划问题一般模型形式。

【例 2.3】 某企业准备在 $m(i=1,2,3,\cdots,m)$ 个车间加工生产 $n(j=1,2,3,\cdots,n)$ 种产品。第 i 个车间每天最大工作时间为 b_i 工时,第 j 种产品在第 i 个车间的加工时间为 a_{ij} ,生产一件第 j 种产品可以获得的利润为 c_j 。企业如何安排生产才能获最大利润? 试建立此问题的线性规划模型。

分析

本题用变量 m 和 n 替代了具体问题中的车间数和产品数。结合例 2.1 就可以看出此问题为生产计划问题。目标为得到最大利润,决策变量为每一种产品的产量,约束条件为每一个车间最大加工能力的限制。建立此问题的数据表如表 2.3 所示。

表 2.3

产品 \ 车间	1	2	...	n	最大工时
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
单件利润	c_1	c_2	...	c_n	

【解】 设第 j 种产品生产 x_j 件,获得总利润为 z 。

本问题的线性规划模型如下：