数学模型

张景祥　胡满峰　唐旭清　杨永清　主编

科学出版社

数学模型

张景祥　胡满峰　唐旭清　杨永清　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是在江南大学数学建模教练组的教学讲义基础上修订而成。主要内容包括引论，MATLAB 简介，数学规划模型，多元统计分析，微分方程模型，树、网络和网络流模型，插值和数据拟合，综合评价和决策方法，论文写作。同时还收录了部分江南大学学生参加数学建模竞赛的案例，供读者批评指正。

本书以介绍数学建模的一般方法为主线，以江南大学学生参加数学建模竞赛的论文为案例，方法与案例相辅相成，简单与复杂相互搭配，取材广泛，可读性强，有助于学生自学和建模实践。本书实战性较强，针对大学生建模竞赛的各个环节。读者可选读任何感兴趣的章节而不会影响对问题的理解。

本书适合用作高等学校数学建模课程或数学建模竞赛培训教材，也可供科技人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型/张景祥等主编. —北京：科学出版社，2018.12

ISBN 978-7-03-059140-1

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①数学模型　Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 242434 号

责任编辑：胡　凯　许　蕾/责任校对：杨聪敏

责任印制：师艳茹/封面设计：许　瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 12 月第　一　版　开本：787×1092　1/16

2018 年 12 月第一次印刷　印张：18 1/2

字数：439 000

定价：79.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

近年来，随着科技的发展和社会的进步，数学方法越来越广泛地应用到各个领域。随着计算机技术的飞速发展，科学计算的作用越来越引起人们的广泛重视，它已经与科学理论和科学实验并列成为人们探索和研究自然界、人类社会的三大基本方法。为了适应这种社会的变革，培养和造就出一批又一批适应高度信息化社会、具有创新能力的高素质的工程技术和管理人才，各高校开设“数学建模”课程，培养学生的科学计算能力和创新能力，就成为这种新形势下的历史必然。

数学本身是一门理性思维科学，数学教学正是通过各个教学环节对学生进行严格的科学思维方法的训练，从而引发人的灵感思维，培养学生的创造性思维的能力。同时数学又是一门实用科学，它能直接用于生产和实践，解决工程实际中提出的问题，推动生产力的发展和科学技术的进步。

数学模型是对现实世界的特定对象，为了特定的目的，根据特有的内在规律，对其进行必要的抽象、归纳、假设和简化，运用适当的数学工具建立的一个数学结构。数学建模就是运用数学的思想方法、数学的语言去近似地刻画一个实际研究对象，构建一座沟通现实世界与数学世界的桥梁，并以计算机为工具，应用现代计算技术达到解决各种实际问题的目的。建立一个数学模型的全过程称为数学建模。因此“数学建模”(或数学实验)课程教学对于开发学生的创新意识，提升学生的数学素养，培养学生创造性地应用数学工具解决实际问题的能力，有着独特的功能。数学建模的应用越来越完善，在高新技术等前沿领域，数学建模扮演着不可或缺的角色。同时数学建模在许多新兴领域迅速地开拓了一批处女地。

数学建模在中国自古即有。据《太平御览》记载：“伏羲坐于方坛之上，听八风之气，乃画八卦”，伏羲为大自然建模的过程：他上观天文，下察地理，研究生物的习性和与之适宜的环境，收集远近各种物证，从而创造了八卦，以宣扬神明之功德，以解释自然之规律。

现代社会竞争日趋激烈，具备良好的团队协作和沟通能力的优秀人才越来越受到社会的青睐。参加数学建模竞赛的学生团队，需要在规定的时间内完成确定选题、分析问题、建立模型、求解模型、结果分析，团队成员间只有相互尊重、相互信任、互补互助，发挥团队协作精神，才能形成默契、紧密的关系。

全书共九章，各章有一定的独立性，这样便于教师和学生按自身需要选择阅读。本书第一章、第二章和第三章由杨永清编写，第四章和第八章由张景祥编写，第五章和第九章由胡满峰编写，第六章和第七章由唐旭清编写，全书由张景祥统稿，徐振源教授、

吴有炜教授担任本书主审，提出了许多宝贵意见。我们经常讨论，切磋写法、选择例题、相互补充，终于完成此书。本书的编写得到编者所在单位江南大学有关部门和理学院领导的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，不当之处在所难免，恳请广大专家、同仁和读者提出宝贵意见，我们将进一步改进。

编　者

2018 年 9 月

目　　录

前言
第一章　引论……1
第一节　建立数学模型的方法与步骤……1
第二节　数学建模的逻辑思维方法……2
第二章　MATLAB 简介……6
第一节　MATLAB 概述……6
一、MATLAB 变量的命名规则……6
二、矩阵和数组的概念……7
三、矩阵的算术运算……8
第二节　MATLAB 计算的可视化……9
一、二维曲线的绘制……9
二、MATLAB 的三维图形绘制……13
三、MATLAB 的特殊图形绘制……15
第三节　利用 MATLAB 函数命令进行数值计算……19
一、求代数方程零点……19
二、数值积分……20
三、微分方程的数值解……21
第四节　随机数据的统计分析函数……22
第五节　拟合和插值……24
第六节　MATLAB 程序设计……27
一、M 文件……27
二、MATLAB 程序设计……28
第七节　MATLAB 优化工具箱……31
习题 2……34
第三章　数学规划模型……35
第一节　线性规划模型……35
一、问题的引入……35
二、线性规划模型的特点……38
三、线性规划问题解的概念……38
第二节　整数线性规划……39
一、整数线性规划问题……39
二、分支定界算法……40
第三节　非线性规划模型……41

一、非线性规划问题基本概念与理论 …… 41
二、非线性规划问题的最优性条件 …… 42
三、非线性规划问题的求解方法 …… 44
第四节 目标规划模型 …… 47
一、决策变量与偏差变量 …… 48
二、绝对约束和目标约束 …… 48
三、优先因子与权系数 …… 49
四、目标函数 …… 49
第五节 动态规划模型 …… 50
一、基本概念与基本方程 …… 52
二、应用举例 …… 54
第六节 应用实例 …… 56
一、出版社的资源配置 …… 56
二、钢管的订购与运输 …… 72
习题 3 …… 77
第四章 多元统计分析 …… 79
第一节 方差分析 …… 79
一、单因素试验的方差分析 …… 79
二、双因素方差分析 …… 83
第二节 回归分析 …… 87
一、回归分析概念 …… 87
二、多元线性回归的最小乘法估计 …… 88
三、回归模型的检验 …… 89
四、逐步回归 …… 90
第三节 主成分分析法和因子分析法 …… 94
一、主成分分析的实施步骤 …… 95
二、因子分析 …… 100
第四节 聚类分析与判别分析 …… 103
一、聚类分析 …… 103
二、动态聚类 …… 111
三、判别分析基本知识介绍 …… 113
四、MATLAB 程序 …… 114
习题 4 …… 117
第五章 微分方程模型 …… 123
第一节 单个微分方程模型 …… 123
一、指数增长模型 …… 123
二、依赖于密度的增长模型(logistic 模型) …… 125
三、具有收获的限制增长模型 …… 126

四、时间延时调控…… 127
第二节 两个微分方程(组)模型 …… 128
一、食饵-捕食者模型 …… 128
二、平衡点…… 130
三、模型解释…… 130
四、Volterra 模型的局限性 …… 131
第三节 多个微分方程(组)模型 …… 132
第四节 微分方程模型的进一步推广 …… 137
一、脉冲微分方程模型…… 138
二、偏微分方程模型…… 138
三、随机微分方程模型…… 138
习题 5 …… 139
第六章 树、网络和网络流模型…… 140
第一节 图的基本概念与数据结构 …… 140
一、图的基本概念与性质 …… 140
二、图与网络的数据结构 …… 145
三、算法及其复杂性…… 148
第二节 网络中的基本模型与算法 …… 149
一、最小生成树问题…… 149
二、最短路问题…… 152
三、网络最大流问题…… 157
四、旅行商(TSP)问题 …… 166
五、匹配模型…… 168
第三节 案例分析…… 173
一、奥运会临时超市网点设计 …… 173
二、碎纸片的拼接复原…… 179
习题 6 …… 185
第七章 插值和数据拟合…… 186
第一节 插值的一般方法…… 186
一、几种常用插值多项式求法 …… 188
二、分段低次插值…… 197
第二节 数据拟合的一般方法 …… 208
一、多项式数据拟合…… 209
二、线性最小二乘法的一般形式 …… 213
第三节 插值和数据拟合的 MATLAB 实现…… 216
一、插值的 MATLAB 实现…… 216
二、数据拟合的 MATLAB 实现…… 221
第四节 案例分析…… 224

一、储油罐的变位识别模型 …… 224
二、CT 系统参数标定 …… 232
习题 7 …… 239
第八章　综合评价和决策方法 …… 243
第一节　综合评价基本知识 …… 243
一、综合评价特点 …… 243
二、指标体系中指标的选择原则 …… 244
三、综合评价法的比较 …… 244
第二节　模糊综合评价法 …… 244
一、模糊综合评价法的原理与数学模型 …… 244
二、模糊综合评价法的应用案例 …… 245
第三节　层次分析法 …… 248
一、层次分析法 …… 248
二、层次分析法的基本原理、步骤、计算方法及其应用 …… 248
第四节　TOPSIS 法 …… 258
第五节　秩和比法 …… 263
习题 8 …… 268
第九章　论文写作 …… 270
第一节　引言 …… 270
第二节　科技论文写作规范 …… 270
一、题目 …… 271
二、署名 …… 271
三、摘要 …… 271
四、关键词 …… 271
五、引言 …… 272
六、正文 …… 272
七、结论 …… 273
八、参考文献 …… 273
第三节　数学建模竞赛论文的特点和建议 …… 275
第四节　美国大学生数学建模竞赛的特点和建议 …… 277
主要参考文献 …… 284

第一章 引 论

近几十年来，随着计算机技术的迅速发展，数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用，而且以空前的广度和深度向经济、管理、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等新的领域渗透，数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分。不论是用数学方法在科技和生产领域解决实际问题，还是与其他学科相结合形成交叉学科，首要的和关键的一步是建立研究对象的数学模型，并加以计算求解。

数学模型(mathematical model)是指通过抽象与简化，使用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际现象的一个近似刻画，是应用数学知识和计算机解决实际问题的一种有效的重要工具。数学模型一般并非现实问题的直接翻版，它的建立需要人们对现实问题深入细致的观察和分析并灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用知识从实际问题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模(mathematical modeling)。

第一节 建立数学模型的方法与步骤

建立数学模型一般采用机理分析方法和统计分析方法两种。机理分析方法是指人们根据客观事物的特性，分析其内部的机理，弄清因果关系，再在适当的简化假设下，利用合适的数学工具得到描述事物特征的数学模型。统计分析方法是指人们一时得不到事物的机理特征，便通过测试得到数据，再利用数理统计知识对这些数据进行处理，从而得到最终的数学模型。建立数学模型需要哪些步骤并没有固定的模式，下面只是按照一般情况，提出一个建立模型的大体过程。

模型准备：了解问题的实际背景，明确建立模型的目的，掌握所研究问题的各种信息(如统计数据等)，弄清实际问题的特征。这一步往往要查阅资料，请教专家，以便对问题有透彻的了解。

模型假设：根据实际问题的特征和建模的目的，抓住主要因素，抛弃次要因素，对问题做必要的假设，尽量将问题简化。

模型建立：基于所做的假设，选用合适的数学方法，建立各个量之间的相互关系，确定其数学结构。建立模型常需要比较广阔的数学知识，除了微积分、微分方程、线性代数、概率统计等基础知识外，还会用到诸如运筹学、模糊数学、图论与网络等知识，推而广之，可以说任何一个数学分支都可以用到数学建模过程中。当然，数学建模时有一个原则，即尽量采用简单的数学工具，以便使更多的人了解和使用。

模型求解：对建立的模型进行求解，包括解方程、画图形、证明定理、逻辑运算及数值计算等，这些计算会用到传统和现代的数学方法，特别是计算机技术。

模型分析：对求得的模型结果进行数学分析。有时根据问题性质，分析各变量之间的依赖关系、稳定状态；有时根据所得结果给出数学预测；有时则给出数学上的最优决

策与控制。

模型检验：这一步是把模型分析的结果“翻译”回到实际对象中去，用实际数据对模型进行检验，验证其合理性与适用性。如果检验结果不符合或部分不符合实际情况，那么必须回到建模之初，修改、补充假设，重新建模，如此类推。如果检验结果与实际情况相符，则可进行模型推广应用。

第二节　数学建模的逻辑思维方法

我们面临的需要建立数学模型的实际问题是丰富多彩的，所以不能指望用一种统一的方法来建立它们的数学模型。从认识论角度看，数学建模的过程是一种积极的思维活动，基本上都要经过分析与综合、抽象与概括、比较与类比、系统化与具体化的阶段，其中分析与综合是基础，抽象与概括是关键，归纳与演绎是必不可少的。下面举两个例子予以说明。

例 1.1 人们在日常生活中，经常会遇到这样一个问题：四条腿的家具，如椅子、桌子等，往往不能一次放稳，只有三只脚能着地，需要旋转调整几次，方可以使四只脚着地放稳。这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言表达，并用数学工具证实吗？

解　一、模型假设

① 椅子四条腿一样长(这样椅子在绕中心旋转时，仅与θ角有关，而且不会因为四条腿不一样长而与椅子腿有关)。椅子脚与地面接触处可视为一个点(只考虑几何位置)，四只脚的连线呈正方形(图1.1)。

② 地面高度是连续变化的，即为连续曲面，在沿任何方向都不会出现间断(保证了f、g的连续性)。

③ 对于椅子脚的间距和椅子腿的长度而言，地面是相对平坦的，椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

二、模型的构成

将用自然语言描述的对象，翻译成形式化的数学语言。

设 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 分别为AC、BD与地面距离之和。由假设②③可知，$f(\theta)$、$g(\theta)$ 为θ的连续函数且 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 中至少有一个为零(即 $f(\theta)g(\theta)=0$)。当 $\theta=0$时，如果椅子处于没放稳的位置，即 $g(0)=0$、$f(0)>0$，若四只脚一样长，则旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后，有 $f(\frac{\pi}{2})=g(0)=0$、$g(\frac{\pi}{2})=f(0)>0$，则椅子在不平的地面上是否放稳的问题可抽象成如下的数学问题：设 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 为$[0,\frac{\pi}{2}]$上的连续函数，满足 $f(\theta)g(\theta)=0$，如果 $g(0)=0$、$f(0)>0$、$f(\frac{\pi}{2})=0$、$g(\frac{\pi}{2})>0$，则 $\exists\theta_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

三、模型求解

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(0)=f(0)-g(0)>0$、$h(\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})-g(\frac{\pi}{2})<0$。

根据连续函数的介值定理，必存在 $\theta_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $h(\theta_0)=f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$。 □

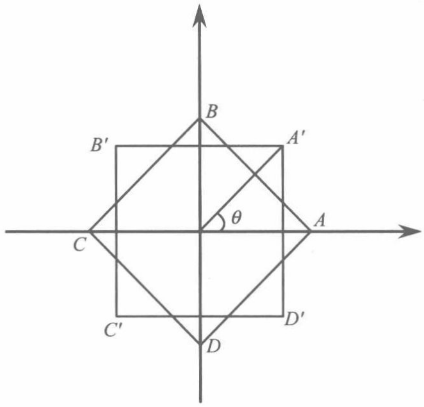

图 1.1 椅子位置图

例 1.2 15 世纪下半叶，欧洲商品经济的繁荣与航海业的发展，推动了天文观测精确程度的提高，动摇了“地心说”，哥白尼在天文观测的基础上，提出了“日心说”，伽利略利用观察方法证实了哥白尼的学说，开普勒经过长期分析前人对行星运动的观测数据，归纳出行星运动的三大规律，即

(1) 行星绕太阳的轨道是一个椭圆，太阳位于其中的一个焦点上；

(2) 在每颗行星的运动过程中，行星与太阳的连线在单位时间内扫过的面积是常数；

(3) 各行星运动周期的平方与其椭圆轨道长半轴的 3 次方成正比。

上述定律只是说明行星的运动情况，并没有说明行星为什么如此运动。那么是什么力量使得行星按上述定律运动呢？

解 一、模型分析

开普勒三定律与牛顿第二定律是万有引力定律的基础，将它们作为模型假设条件。

二、模型假设

① 轨道方程设为 $r=\dfrac{\rho}{1+e\cos\theta}$，其中 $\rho=\dfrac{b^2}{a}$、$b^2=a^2(1-e^2)$，a、b 分别表示长、短半轴，e 为离心率；

② 设单位时间内向径 $\boldsymbol{r}$ 扫过的面积为常数 A，且 $A=\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}$；

③ 设 T 为行星运动的周期，λ 为绝对常数，$T^2=\lambda a^3$；

④ 设行星所受的力为 $\boldsymbol{f}$，加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$，质量为 m，则 $\boldsymbol{f}=m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$；

三、模型建立与求解

取单位向量$\begin{cases} \boldsymbol{u}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{u}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j} \end{cases}$，则$\boldsymbol{r} = r\cdot\boldsymbol{u}_r$。又

$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{j} = \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{dt} = -\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{i} - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{j} = -\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_r$$

所以，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (r\cdot\boldsymbol{u}_r)' = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r + r\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} + r\frac{d^2\boldsymbol{u}_r}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{u}_r + 2\frac{dr}{dt}(\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta) + r(\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta)' \\ &= [\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2]\boldsymbol{u}_r + (2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2})\boldsymbol{u}_\theta\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

由假设②得$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2A}{r^2}$，所以$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-4A\frac{dr}{dt}}{r^3}$，故$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2\frac{dr}{dt}\frac{2A}{r^2} + r\frac{-4A}{r^3}\frac{dr}{dt} = 0$，代入式(1.2.1)可得

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = [\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2]\boldsymbol{u}_r \tag{1.2.2}$$

由假设①②有$r = \frac{\rho}{1+e\cos\theta}$、$A = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$，

$$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\rho^2}{(1+e\cos\theta)^2}\cdot\frac{e}{\rho}\cdot\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt}\frac{e}{\rho}\cdot\sin\theta = \frac{2Ae}{\rho}\cdot\sin\theta$$

$$\therefore \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2Ae}{\rho}\cdot\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{4A^2e}{\rho r^2}\cdot\cos\theta = \frac{4A(\rho-r)}{\rho r^3}$$

代入式(1.2.2)并化简可得

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = [\frac{4A^2(\rho-r)}{\rho r^3} - r\frac{4A^2}{r^4}]\boldsymbol{u}_r = \frac{-4A^2}{\rho r^2}\boldsymbol{u}_r$$

由假设④有

$$\boldsymbol{f} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{4mA^2}{\rho r^2}\boldsymbol{u}_r = -\frac{4mA^2}{\rho r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\frac{4mA^2}{\rho r^2}\boldsymbol{r}_0 \tag{1.2.3}$$

其中，$\boldsymbol{r}_0$表示单位向径(方向为向径$\boldsymbol{r}$的方向)。

式(1.2.3)的物理意义：太阳对行星的作用力$\boldsymbol{f}$的方向与向径$\boldsymbol{r}$的方向相反，$\boldsymbol{f}$的大小与太阳至行星距离的平方成反比。式中ρ、A均不是绝对常数，它们的数值取决于所讨论的是哪一颗行星。

因为A是单位时间扫过的面积，行星在一个周期T内扫过的面积为椭圆的面积，所

以$TA=\pi ab$，而$\rho=\dfrac{b^2}{a}$，则$\dfrac{A^2}{\rho}=\dfrac{a}{b^2}\cdot(\dfrac{\pi ab}{T})^2=\dfrac{\pi^2a^3}{T^2}=\dfrac{\pi^2}{\lambda}$，因此$\boldsymbol{f}=-\dfrac{4\pi^2m}{\lambda r^2}\boldsymbol{r}_0$。

与万有引力$\boldsymbol{f}=-k\dfrac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}_0$相比较可知，$\dfrac{4\pi^2}{\lambda}=kM$（$k$为万有引力常数，$M$为太阳的质量）为一个与太阳质量有关的量。这一点很好理解，因为我们选定的坐标系以太阳为焦点。

四、模型推广

利用开普勒三定律与牛顿第二定律$\boldsymbol{f}=m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$得出引力大小表达式$f=\dfrac{4\pi^2m}{\lambda r^2}=\dfrac{4A^2m}{\rho r^2}$，常数$\dfrac{4A^2}{\rho}$取决于太阳的性质，$m$为行星的质量。

牛顿设想这种引力对地球与月球也适用，由此引出的问题是：物体的什么性质决定了它对其他物体的吸引呢？若记地球与太阳的引力常数分别为$(\dfrac{4A^2}{\rho})_{地}$、$(\dfrac{4A^2}{\rho})_{太}$，那么有理由假设物体的引力常数$\dfrac{4A^2}{\rho}$取决于该物体的质量，最简单的假设是这一引力常数与物体的质量成正比，即$(\dfrac{4A^2}{\rho})_{地}=G\cdot m_{地}$、$(\dfrac{4A^2}{\rho})_{太}=G\cdot m_{太}$，这样便有$f=G\dfrac{m_1\cdot m_2}{\lambda r^2}$。

后经测定G=6.67×10^{11}N·m^2/kg^2，且与产生引力的物体无关，与物体间的距离也无关，故G称为万有引力常数。 □

第二章　MATLAB 简介

MATLAB(Matrix Laborator)是 MathWorks 公司开发的科学与工程计算软件，该软件以矩阵运算为基础，可以实现工程计算、数据分析与处理、科学与工程绘图、应用软件开发、图形、图像处理等。

MATLAB 由基本部分和功能各异的工具箱组成。基本部分是 MATLAB 的核心；工具箱是其扩展部分，用于解决某一方面的专门问题。数学建模常用的工具箱如下：

优化工具箱(Optimization Toolbox)
偏微分方程工具箱(Partial Differential Equation Toolbox)
统计工具箱(Statistics Toolbox)
控制系统工具箱(Control System Toolbox)
信号处理工具箱(Signal Processing Toolbox)
神经网络工具箱(Neural Network Toolbox)

第一节　MATLAB 概述

一、MATLAB 变量的命名规则

变量名必须以字母开头，其组成可以是字母、数字、下划线，但不能含有空格和标点符号(如,. %等)，变量名不能超过 63 个字符，区分字母的大小写。MATLAB 有一些自己的特殊变量(表 2.1)，当 MATLAB 启动时驻留在内存。

表 2.1　特殊变量表

特殊变量	取值
ans	运算结果的默认变量名
pi	圆周率 π
eps	计算机的最小数
flops	浮点运算数
inf	无穷大，如 1/0
NaN 或 nan	非数，如 0/0、∞/∞、$0\times\infty$
i 或 j	$i=j=\sqrt{-1}$
nargin	函数的输入变量数目
nargout	函数的输出变量数目
realmin	最小的可用正实数
realmax	最大的可用正实数

二、矩阵和数组的概念

在 MATLAB 的运算中，经常要使用矩阵、标量、向量，定义如下：

矩阵：是指 m 行 n 列的二维数组。

标量：是指 1×1 的矩阵，即为只含一个数的矩阵。

向量：是指 $1\times n$ 或 $n\times 1$ 的矩阵，即只有一行或者一列的矩阵。

注：0×0 矩阵为空矩阵([ ])。

(一)通过显式元素列表输入矩阵

`A=[1 2;3 4;5 3*2]  % [ ]`表示构成矩阵，分号分隔行，空格(或逗号)分隔元素

(二)通过语句生成矩阵

使用 `from:step:to` 或(`from:to`)方式生成向量。

注：from、step 和 to 分别表示开始值、步长和结束值。当 step 省略时，则默认为 step=1。

(三)由矩阵生成函数产生特殊矩阵

MATLAB 提供了许多能够产生特殊矩阵的函数和矩阵运算函数，各函数的功能如表 2.2 和表 2.3 所示。

表 2.2　矩阵生成函数

函数名	zeros(m,n)	ones(m,n)	eye(m,n)	rand(m,n)	randn(m,n)	magic(N)
功能	产生 $m\times n$ 的全 0 矩阵	产生 $m\times n$ 的全 1 矩阵	产生 $m\times n$ 的单位矩阵	产生[0,1]区间内均匀分布的随机矩阵	产生标准正态分布的随机矩阵	产生 N 阶魔方矩阵

注：zeros、ones、rand、randn 和 eye 函数当只有一个参数 n 时，则为 $n\times n$ 的方阵；当 eye(m,n) 函数的参数 m 和 n 不相等时则单位矩阵会出现全 0 行或列。

表 2.3　常用矩阵运算函数

函数名	det(X)	rank(X)	inv(X)	[v,d]=eig(X)	diag(X)	[l,u]=lu(X)	[q,r]=qr(X)	[u,s,v]=svd(X)
功能	计算方阵行列式	求矩阵的秩	求矩阵的逆阵	计算矩阵特征值和特征向量	$\boldsymbol{X}$ 为矩阵，以对角元素产生向量；$\boldsymbol{X}$ 为向量，产生对角阵	方阵分解为一个准下三角方阵和一个上三角方阵的乘积	$m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{X}$ 分解为一个正交方阵 $\boldsymbol{q}$ 和一个与 $\boldsymbol{X}$ 同阶的上三角矩阵 $\boldsymbol{r}$ 的乘积	$m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{X}$ 分解为三个矩阵的乘积

三、 矩阵的算术运算

（一） 矩阵的加“＋”、减“－”运算

A 和 ***B*** 矩阵必须是同形矩阵才可以进行加减运算。如果 ***A***、***B*** 中有一个是标量，则该标量与矩阵的每个元素进行运算。

（二） 矩阵的乘法“*”运算

矩阵 ***A*** 的列数必须等于矩阵 ***B*** 的行数，除非其中有一个是标量。

（三） 矩阵的左除“\”和右除“/”运算

当矩阵 ***A*** 与 ***B*** 可逆时，`A\B=inv(A)*B`，`A/B= A*inv(B)`。

当矩阵 ***A*** 与 ***B*** 不可逆或不是方阵时，如在求解线性方程组 `A*X=B` 中，`X=A\B` 为方程的最小二乘解。

（四） 矩阵的乘方

矩阵乘方的运算表达式为“`A^B`”，其中 ***A*** 可以是矩阵或标量。

(1) 当 ***A*** 为矩阵，必须为方阵：

B 为正整数时，表示 ***A*** 矩阵自乘 *B* 次；

B 为负整数时，表示先将矩阵 ***A*** 求逆，再自乘|*B*|次，仅对非奇异阵成立；

B 为矩阵时不能运算，会出错；

B 为非整数时，将 ***A*** 分解成 `A=W*D/W`，***D*** 为对角阵，则有 `A^B=W*D^B/W`。

(2) 当 ***A*** 为标量：

B 为矩阵时，将 ***A*** 分解成 `A=W*D/W`，***D*** 为对角阵，则有 `A^B=W*diag(D.^B)/W`。

注：在 MATLAB 中，还定义了一类数组运算如下：

`A.*B`，矩阵元素乘法运算，表示矩阵 ***A*** 和矩阵 ***B*** 中的对应元素相乘，***A*** 和 ***B*** 必须是同形矩阵，除非其中有一个是标量。

`A.\B` 和 `A./B`，分别表示矩阵相应元素的左除和右除，***A*** 和 ***B*** 必须是同形矩阵，除非其中有一个是标量。

`A.^B` 表示表示矩阵相应元素的乘方：

当 ***A*** 为矩阵，*B* 为标量时，则将 ***A***(i,j) 自乘 *B* 次；

当 ***A*** 为矩阵，***B*** 为矩阵时，***A*** 和 ***B*** 数组必须大小相同，则将 ***A***(i,j) 自乘 ***B***(i,j) 次；

当 *A* 为标量，***B*** 为矩阵时，将 *A*^ ***B***(i,j) 构成新矩阵的第 i 行第 j 列元素。