普通高等教育“三海一核”系列规划教材

线性系统理论

陆 军 王晓陵 编著

科学出版社

普通高等教育“三海一核”系列规划教材

线性系统理论

陆　军　王晓陵　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

线性系统理论是控制科学领域的一门重要的基础课程。本书以线性系统为研究对象，对线性系统的时域理论进行了全面的论述。主要内容包括系统的数学描述、线性系统的运动分析、线性系统的能控性和能观测性、传递函数矩阵的状态空间实现、系统运动的稳定性、线性系统的状态反馈与状态观测器等。本书是为本科生“现代控制理论”课程编写的教材，内容丰富，理论严谨，深入浅出地阐述了线性系统的基础理论、基本方法，并配有丰富的例题和习题，帮助读者理解书中所阐述的内容。

本书可作为控制类专业、系统工程专业和电子类专业的高年级本科生与研究生的教材，也可供系统和控制领域科学工作者及工程技术人员学习与参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论 / 陆军，王晓陵编著. —北京：科学出版社，2019.1
普通高等教育“三海一核”系列规划教材

ISBN 978-7-03-060139-1

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①陆…　②王…　Ⅲ. ①线性系统理论　Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 288498 号

责任编辑：余　江　张丽花　陈　琼 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：张　伟 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 1 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2019 年 1 月第一次印刷　印张：17 1/2
字数：423 000

定价：59.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

线性系统是系统和控制领域研究中的最基本对象，它伴随着航空航天、过程控制、最优控制、通信、电路和系统等众多学科的发展而日益成熟，已形成十分完整和成熟的线性系统理论。线性系统理论的概念、方法、原理和结论，对于系统和控制理论的许多分支，如最优控制、非线性控制、系统辨识、随机控制、智能控制、信号检测与估计等都具有重要的作用。国内外许多大学将“线性系统理论”列为系统和控制科学的一门基础课程。

线性系统理论方面的教材和专著已有很多，各有其特点。比较著名的有陈啟宗教授著的《线性系统理论与设计》和清华大学郑大钟教授编著的《线性系统理论》。

本书是作者在《线性系统理论》(哈尔滨工程大学出版社，2006 年出版) 一书的基础上，总结十余年“现代控制理论”课程教学经验而编写的。增加了新的知识点，使全书内容更为丰富和易于理解；对论述不准确的内容和编辑错误进行了更正；增加了船舶运动建模和分析设计等实例，理论联系实际，提高读者将所学理论知识运用到工程实践的能力；适当加入了系统分析和设计的 MATLAB 实现，使读者能够运用 MATLAB 工具完成系统的建模、分析和设计；适当增加了习题，便于读者对知识点的掌握。

本书系统阐述了分析和综合线性多变量系统的时域理论与方法。主要内容包括：系统的数学描述，重点介绍状态空间模型，并论述了系统状态空间描述和输入-输出描述在建模能力上的异同；线性连续时间系统和线性离散时间系统的运动分析；线性系统的能控性和能观测性，通过结构分解原理，阐述了状态空间描述在系统建模方面比输入-输出描述更为全面；传递函数矩阵的状态空间实现；系统运动的稳定性；线性系统的状态反馈和状态观测器，阐述了状态反馈的基本方法和一些应用，包括状态反馈解耦、镇定问题、线性二次型最优控制、全维和降维状态观测器等，最后给出了状态反馈倒立摆控制系统设计实例。

本书可供高年级本科生和研究生使用，也可供系统和控制领域科学工作者及工程技术人员学习与参考。本书读者需了解“线性代数”和“自动控制原理”的相关内容。

限于作者的时间和精力，书中内容难免存在疏漏和不妥，恳请读者批评指正。

作　者

2018 年 9 月于哈尔滨工程大学

目　　录

第 1 章　系统的数学描述

在系统的分析和综合过程中，首要的一步是建立系统的数学描述，即建立系统中各变量之间的数学关系。系统的数学描述分为系统的输入-输出描述和状态空间描述。系统的输入-输出描述又称为系统的外部描述，它通过建立系统的输入和输出之间的数学关系，从而描述系统的特性。在经典线性系统控制理论中的传递函数和微分方程都属于系统的外部描述。系统的状态空间描述选用能够完善描述系统行为的称为状态的内部变量，通过建立状态和系统的输入以及输出之间的数学关系，来描述系统的行为。系统的外部描述不是对系统全部特性的描述，而状态空间描述是对系统行为的完善描述。

只有一个输入和一个输出的系统(single input-single output system)称为单变量系统，用符号 SISO 表示；而具有多个输入和多个输出的系统(multiple input-multiple output system)称为多变量系统，用符号 MIMO 表示。本书的研究对象从经典线性控制理论的单输入-单输出线性定常系统拓展到多输入-多输出线性时变系统。本章首先从系统的外部描述出发，继而着重讨论系统的内部描述。

1.1　系统的输入-输出描述

系统的输入-输出描述揭示了系统的输入和输出之间的某种数学关系。在推导这一描述时，假定系统的内部结构是完全未知的，把系统看作一个“黑箱”，向该“黑箱”施加各种类型的输入并测量出与之相应的输出。从这些输入-输出对中可以确定系统的输入和输出之间的数学关系。可见，系统的输入-输出描述是从系统的外在表现来反映或确定系统内在的本质特性，因此又称系统的输入-输出描述为系统的外部描述。常见的单输入-单输出系统的传递函数和微分方程都是系统的输入-输出描述形式。下面，对系统的输入-输出进行更一般和全面的描述。

1.1.1　线性系统

线性系统理论主要研究多输入-多输出线性系统的相关理论，因此，首先引入以下一些概念。

1. 数域 $\mathscr{F}$

定义 1.1.1　数域 $\mathscr{F}$ 是由称为标量的元素的集合以及称为加“+”和乘“·”的两种运算所构成的，这两种运算定义在 $\mathscr{F}$ 上，并满足下列条件：

(1) $\forall \alpha,\beta \in \mathscr{F}$，有

$$\alpha+\beta \in \mathscr{F} \quad 和 \quad \alpha\cdot\beta \in \mathscr{F} \tag{1.1.1}$$

(2)加法和乘法都是可交换的。

$\forall \alpha,\beta \in \mathscr{F}$ ，有

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \quad 和 \quad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \tag{1.1.2}$$

(3) 加法和乘法都是可结合的。

$\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathscr{F}$ ，有

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma \quad 和 \quad (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \tag{1.1.3}$$

(4) 乘法关于加法是可分配的。

$\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathscr{F}$ ，有

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \tag{1.1.4}$$

(5) $\mathscr{F}$中含有元素 0 和元素 1，使对于 $\mathscr{F}$中每一元素α均有

$$\alpha+0=\alpha \quad 和 \quad 1\cdot\alpha=\alpha \tag{1.1.5}$$

(6) $\forall \alpha \in \mathscr{F}$ 有一个元素β，满足

$$\alpha+\beta=0 \tag{1.1.6}$$

称β为α的加法逆。

(7) 对于 $\mathscr{F}$中的每一个非零元素α，$\mathscr{F}$中含有一个元素γ，满足

$$\alpha\cdot\gamma=1 \tag{1.1.7}$$

称γ为α的乘法逆。

例 1.1.1 包含 0 和 1 的集合$\{0, 1\}$，若按照通常的加法和乘法定义，集合$\{0, 1\}$不构成域。这是因为：$1+1=2\notin\{0,1\}$ 。但若按如下方法定义的加法和乘法：

$$0+0=1+1=0, \quad 1+0=1, \quad 0\cdot 0=0\cdot 1=0\,, \quad 1\cdot 1=1 \tag{1.1.8}$$

则集合$\{0, 1\}$满足关于域的所有条件，集合$\{0, 1\}$为域。称集合$\{0, 1\}$为二进制数域。通常用符号 $\mathscr{R}$ 表示实数域，用 $\mathscr{R}(s)$ 表示具有实系数及未定数 s 的有理函数域。

2. 数域 $\mathscr{F}$ 上的线性空间$(\mathscr{X},\ \mathscr{F})$

定义 1.1.2 线性空间是由称为向量的元素构成的集合 $\mathscr{X}$、数域 $\mathscr{F}$ 以及称为向量加法和数乘的两种运算共同组成的，在 $\mathscr{X}$和 $\mathscr{F}$上定义向量加法和数乘两种运算，应满足下列诸条件：

(1) 向量加法是封闭的，即$\forall\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{X}$ ，有

$$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{X} \tag{1.1.9}$$

(2) 向量加法是可交换的，即$\forall\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{X}$ ，有

$$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_1 \tag{1.1.10}$$

(3) 向量加法是可结合的，即$\forall\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathscr{X}$ ，有

$$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3) \tag{1.1.11}$$

(4) $\mathscr{X}$中含有向量$\boldsymbol{0}$，即$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$ ，有

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x} \tag{1.1.12}$$

向量$\boldsymbol{0}$称为零向量或原点。

(5) $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$ ，存在$\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}$ ，满足

$$\boldsymbol{x}+\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0} \tag{1.1.13}$$

(6) $\forall\, \alpha \in \mathscr{F}$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$，有

$$\alpha \boldsymbol{x} \in \mathscr{X} \tag{1.1.14}$$

$\alpha \boldsymbol{x}$ 称为 α 和 $\boldsymbol{x}$ 的数乘积(数乘)。

(7) 数乘是可结合的，即 $\forall \alpha, \beta \in \mathscr{F}$， $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$，有

$$\alpha(\beta \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x} \tag{1.1.15}$$

(8) 数乘关于向量加法是可分配的，即 $\forall\ \alpha \in \mathscr{F}$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{X}$，有

$$\alpha(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \alpha \boldsymbol{x}_2 \tag{1.1.16}$$

(9) 数乘关于标量加法是可分配的，即 $\forall\ \alpha, \beta \in \mathscr{F}$， $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$，有

$$(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{x} \tag{1.1.17}$$

(10) $\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$，有

$$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \tag{1.1.18}$$

其中，1 是 $\mathscr{F}$ 中的元素 1 。

例 1.1.2 给定域 $\mathscr{F}$, 令 $\mathscr{F}^n$ 为写成如下形式的所有 n 元向量组成的集合：

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$$

其中， $x_{ji} \in \mathscr{F}$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 。

向量加法定义为

$$\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{y}_j = \begin{bmatrix} x_{1i} + y_{1j} \\ x_{2i} + y_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni} + y_{nj} \end{bmatrix}$$

数乘定义为

$$\alpha \boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} \alpha x_{1i} \\ \alpha x_{2i} \\ \vdots \\ \alpha x_{ni} \end{bmatrix}$$

则 $(\mathscr{F}^n, \mathscr{F})$ 是一个线性空间。有时线性空间也称为向量空间。

若 $\mathscr{F} = \mathscr{R}$, 则称 $(\mathscr{R}^n, \mathscr{R})$ 为 n 维实向量空间。

3. 线性映射

定义 1.1.3 设 $\mathscr{F}$ 为一数域, $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是定义在数域 $\mathscr{F}$ 上的线性空间，即 $(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ 和 $(\mathscr{Y}, \mathscr{F})$。如果映射 $L: \mathscr{U} \to \mathscr{Y}$ 满足 $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathscr{U}$ 和 $\forall a_1, a_2 \in \mathscr{F}$，有下式成立：

$$L(a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2) = a_1L(\boldsymbol{u}_1) + a_2L(\boldsymbol{u}_2) \tag{1.1.19}$$

则称映射 L 为线性的。式(1.1.19)又称为叠加原理。它可以被等效为如下两个公式：

$$\begin{cases} L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2) \\ L(a\boldsymbol{u}) = aL(\boldsymbol{u}) \end{cases} \tag{1.1.20}$$

其中，$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u} \in \mathscr{U}$；$a \in \mathscr{F}$。式(1.1.20)中的两个公式分别为映射的叠加性和齐次性。

4. 线性系统

定义 1.1.4 在初始条件为零的条件下，如果系统的输入-输出关系可以用线性映射来描述，则称此系统为线性系统，即

$$\boldsymbol{y} = L(\boldsymbol{u}) \tag{1.1.21}$$

其中，L 为线性映射；$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \in \mathscr{Y}$；$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \in \mathscr{U}$，$\mathscr{U}$是输入线性空间，$\mathscr{Y}$是输出线性空间。

系统初始条件为零是指在初始时刻系统没有能量储备。

1.1.2 非零初始条件与脉冲输入

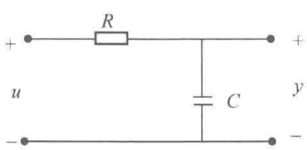

图 1.1.1 RC 电路

图 1.1.1 所示为 RC 电路的例子。

由电路定律，有

$$\begin{cases} u = iR + y \\ i = C\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1.1.22}$$

由式(1.1.22)，有

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{RC}y(t) + \frac{1}{RC}u(t) \tag{1.1.23}$$

设 $t = t_0$ 时，$y = y_0$，则有

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}\frac{1}{RC}u(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant t_0 \tag{1.1.24}$$

令 L 表示 u 与 y 之间的映射，即

$$y = L(u)$$

设有 $u_1(t)$，$u_2(t)$，$t \geqslant t_0$，$y_1(t) = L(u_1(t))$，$y_2(t) = L(u_2(t))$，$y_{12}(t) = L(u_1(t) + u_2(t))$，$a \in \mathscr{R}$

如果 $y_0 = 0$，有

$$y_{12}(t) = y_1(t) + y_2(t)$$
$$ay_1(t) = L(au_1(t))$$

这说明映射 L 为线性的。

如果 $y_0 \neq 0$，则

$$y_{12}(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$$

这说明映射 L 为非线性的。同样，由式(1.1.24)可知，对于给定的输入 $u(t)$，由于 y_0 不同，

得到的输出 $y(t)$ 也不同，这样输入和输出之间就没有唯一的确定关系。

1. 零初始条件

由前面的讨论可知，系统的非零初始条件也影响系统的输出，在建立系统的输入-输出描述时，为了获得输入-输出之间的唯一确定关系，必须假定系统的初始条件为零，即在初始条件为零的条件下，建立系统的外部描述。

这里，系统的初始条件为零是指系统在初始时刻没有能量储备。

而实际情况是，系统的初始条件往往不为零，这是系统输入-输出描述的局限。实际上，可以将非零的初始条件等效为在初始时刻的一个特定的输入。下面给予详细讨论。首先引入单位脉冲函数的概念。

2. 单位脉冲函数（δ 函数）

令

$$\delta_{\varDelta}(t-t_1)=\begin{cases}0, & t<t_1\\ \dfrac{1}{\varDelta}, & t_1\leqslant t\leqslant t_1+\varDelta\\ 0, & t>t_1+\varDelta\end{cases} \tag{1.1.25}$$

其图形表达如图 1.1.2 所示。

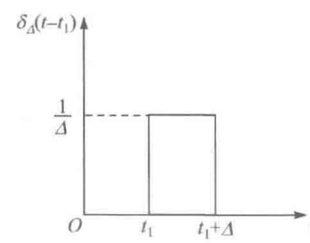

图 1.1.2　函数 $\delta_{\varDelta}(t-t_1)$ 的图形表达

1）δ 函数定义

δ 函数定义为当 $\varDelta\to 0$ 时 $\delta_{\varDelta}(t-t_1)$ 的极限函数，即

$$\delta(t-t_1)\triangleq\lim_{\varDelta\to 0}\delta_{\varDelta}(t-t_1) \tag{1.1.26}$$

称为单位脉冲函数，或简称为 δ 函数。

2）δ 函数性质

（1）$\forall\varepsilon>0$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_1)\mathrm{d}t=\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon}\delta(t-t_1)\mathrm{d}t=1 \tag{1.1.27}$$

（2）对任何在 t_1 时刻连续的函数 $f(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_1)\mathrm{d}t=f(t_1) \tag{1.1.28}$$

3. 非零初始条件与等价的脉冲输入

对于非零的初始条件，可以将其等价为在初始时刻系统的脉冲输入。

结论 1.1.1　非零初始条件对应的系统响应等效于在初始时刻加入脉冲输入时的系统响应。

考虑如下两个系统

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=f(y(t),t)+\phi(t)\delta(t-t_0)\\ y(t_0)=0\end{cases} \tag{1.1.29}$$

和

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t),t) \\ y(t_0) = \phi(t_0) \end{cases} \tag{1.1.30}$$

这两个系统的解都为 $y(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(\tau),\tau)\mathrm{d}\tau$ 。

这说明，一个系统的初始能量可以是以往积累的结果（$y_0 \neq 0$），也可以由瞬时脉冲输入来建立，即非零的初始条件可以等价为在初始时刻加入一个脉冲输入，而此时的初始值为零。

以后，在建立系统的输入-输出描述时，均假定系统的初始条件为零。

1.1.3 线性系统的单位脉冲响应

系统的单位脉冲响应是系统的输入-输出描述的一种形式。首先以单变量线性系统为例讨论线性系统的单位脉冲响应，然后将结果推广到多输入-多输出系统。对单变量系统，在初始条件为零的条件下，当系统的输入为单位脉冲函数时，相应的系统输出称为系统的单位脉冲响应。

设单变量线性定常系统的输入-输出关系表示为

$$y = L(u) \tag{1.1.31}$$

用符号 $g(t,\tau)$ 表示系统的单位脉冲响应，即

$$g(t,\tau) \triangleq L(\delta(t-\tau)) \tag{1.1.32}$$

应当注意的是，$g(t,\tau)$ 为双变量函数，τ 为 δ 函数作用于系统的时刻，t 为观测系统响应的时刻。对任意的输入，相应的系统输出可由单位脉冲响应表示，相应的结论如下。

结论 1.1.2 线性系统输出的单位脉冲响应表示。对单输入线性定常系统，$u(t)$ 为其输入变量，$g(t,\tau)$ 为其单位脉冲响应，在初始条件为零的条件下，系统的输出响应为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.1.33}$$

证 以单变量线性定常系统(1.1.31)为例加以证明。如图 1.1.3 所示，任意连续的输入 $u(t)$ 可用一串脉冲函数来近似，即

$$u(t) \approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t_i)\delta_{\Delta}(t-t_i)\Delta \tag{1.1.34}$$

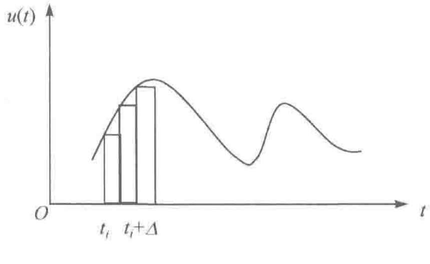

图 1.1.3 $u(t)$ 的近似表示

在 $u(t)$ 的作用下，系统的输出为

$$\begin{aligned} y = L(u) &\approx L\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t_i)\delta_{\Delta}(t-t_i)\Delta\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L(u(t_i)\delta_{\Delta}(t-t_i)\Delta) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L(\delta_{\Delta}(t-t_i))\cdot u(t_i)\Delta \end{aligned} \tag{1.1.35}$$

当 $\Delta \to 0$ 时，式(1.1.35)变为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\delta(t-\tau))u(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

至此，证明完成。

结论 1.1.2 表明，在初始条件为零的条件下，线性系统的输入-输出描述可以由系统的单位脉冲响应来表达，即线性系统的单位脉冲响应可以作为系统外部描述的一种形式。

1. 线性定常系统

定义 1.1.5 如果线性系统输入-输出之间的线性映射 L 满足

$$\begin{cases} y(t+t_1) = L(u(t+t_1)) \\ y(t) = L(u(t)) \end{cases} \tag{1.1.36}$$

即此线性映射 L 不随时间变化，则称此系统为线性定常系统。

对线性定常系统，其单位脉冲响应满足如下结论。

结论 1.1.3 线性定常系统单位脉冲响应只取决于响应的观测时刻与 δ 函数作用于系统的时刻之差，即

$$g(t,\tau) = g(t-\tau) \tag{1.1.37}$$

证 对线性定常系统，有

$$g(t+t_1,\tau) = L(\delta(t+t_1-\tau)) = L(\delta(t-(\tau-t_1)) = g(t,\tau-t_1) \tag{1.1.38}$$

令 $\tau_1 = \tau - t_1$，则由式(1.1.38)，可得

$$g(t+t_1,\tau_1+t_1) = g(t,\tau_1) \tag{1.1.39}$$

式(1.1.39)对任意的 t, t_1, τ_1 均成立。因此选取 $t_1 = -\tau$，则对任意的 t 和 τ_1，有

$$g(t,\tau_1) = g(t_1-\tau_1,0) \tag{1.1.40}$$

这表明线性定常系统的单位脉冲响应只取决于响应的观测时刻与 δ 函数作用于系统的时刻之差，即有式(1.1.37)成立。至此，证明完成。

由结论 1.1.3 和式(1.1.33)，有以下结论。

结论 1.1.4 对任意输入 $u(t)$，线性定常系统的响应可以表示为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.1.41}$$

或

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.1.42}$$

其中，$g(\cdot)$ 为线性定常系统的单位脉冲响应。

2. 因果系统

定义 1.1.6 一个系统在给定时刻的输出值与未来的输入无关，则称该系统为因果系统。

结论 1.1.5 对任意输入 $u(t)$，线性定常因果系统的响应可以表示为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.1.43}$$

证 由式(1.1.41)，有

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} g(t_1-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{+\infty} g(t_1-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对于因果系统，上式第二项为零，所以

$$g(t_1-\tau)=0,\quad t_1<\tau$$

因为 t_1 在 $(-\infty,+\infty)$ 任意取值，所以

$$g(t-\tau)=0,\quad t<\tau$$

或

$$g(t)=0,\quad t<0 \tag{1.1.44}$$

因此，对于线性定常因果系统，有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

至此，证明完成。

下面将单输入系统的相关结论推广到多输入系统，得到多输入线性系统的单位脉冲响应矩阵，有以下结论。

结论 1.1.6 多输入线性定常系统输出的单位脉冲响应矩阵表示。对多输入线性定常系统，$\boldsymbol{u}(t)$ 为其 p 维输入向量，即 $\boldsymbol{u}=[u_1\ u_2\ \cdots\ u_p]^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{y}(t)$ 为 q 维输出向量，即 $\boldsymbol{y}=[y_1\ y_2\ \cdots\ y_q]^{\mathrm{T}}$，在初始条件为零的条件下，系统的输出响应为

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{G}(t,\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.1.45}$$

其中

$$\boldsymbol{G}(t,\tau)=\begin{bmatrix} g_{11}(t,\tau) & g_{12}(t,\tau) & \cdots & g_{1p}(t,\tau) \\ g_{21}(t,\tau) & g_{22}(t,\tau) & \cdots & g_{2p}(t,\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(t,\tau) & g_{q2}(t,\tau) & \cdots & g_{qp}(t,\tau) \end{bmatrix} \tag{1.1.46}$$

称 $q\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{G}(t,\tau)$ 为系统的单位响应矩阵。其第 i 行第 j 列的元 $g_{ij}(t,\tau)(i=1,2,\cdots,q;$ $j=1,2,\cdots,p)$ 为系统第 j 个输入端单独施加单位脉冲函数时(而其他输入为零)，在第 i 个输出端的响应。

证 设系统第一个输出分量 y_1 与输入向量 $\boldsymbol{u}$ 之间的映射为 L_1，即

$$\begin{aligned} y_1 &= L_1\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}\right) = L_1\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ u_p \end{bmatrix}\right) \\ &= L_1\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right)+L_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right)+\cdots+L_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ u_p \end{bmatrix}\right) \\ &= L_{11}(u_1)+L_{12}(u_2)+\cdots+L_{1p}(u_p) \end{aligned} \tag{1.1.47}$$