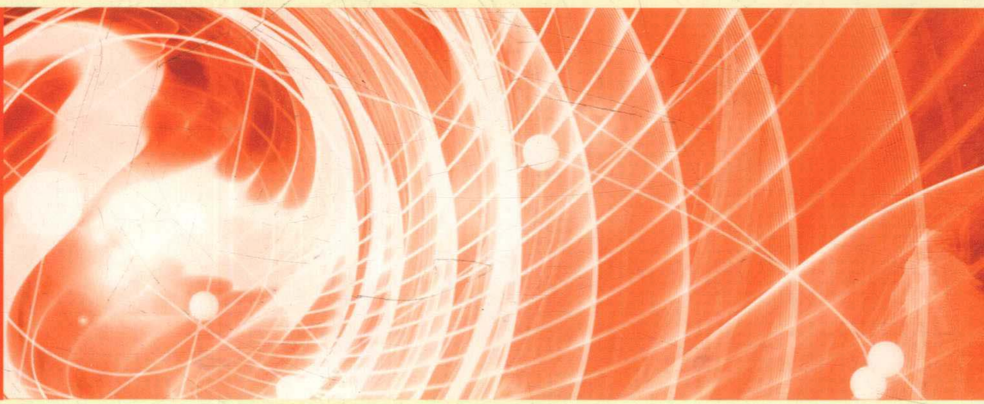
高校核心课程学习指导丛书

物理学中的数学方法习题集

WULIXUE ZHONG DE SHUXUE FANGFA XITI JI

王怀玉 / 编著



中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

物理学中的数学方法习题集

WULIXUE ZHONG DE SHUXUE FANGFA XITI JI

王怀玉 / 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书与《物理学中的数学方法》一书配套，是《物理学中的数学方法》的习题解答，包括8个方面的内容：变分法、希尔伯特空间、二阶线性常微分方程、贝塞尔函数、狄拉克δ函数、格林函数、范数和积分方程. 每一部分的习题前给出必要的常用公式. 每一题的解答尽量写出所应用的公式和说明解题步骤.

本书适合大学物理系和非数学类理工科各专业的研究生及本科高年级学生使用，也可供高校教师和研究所的科研与工程人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的数学方法习题集/王怀玉编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2019. 5

ISBN 978-7-312-04610-0

Ⅰ. 物…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 物理学—数学方法—习题集　Ⅳ. O411-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 010866 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press. ustc. edu. cn
https://zgkxjsdxcbs. tmall. com
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×1000 mm　1/16
印张　14. 75
字数　281 千
版次　2019 年 5 月第 1 版
印次　2019 年 5 月第 1 次印刷
定价　39. 00 元

前　言

作者为物理系和非数学类理工科各专业的研究生及本科高年级学生讲授“物理学中的数学方法”这门课程已经有若干年了.在讲课的过程中作者收集材料并进行整理加工,编写了教材《物理学中的数学方法》,于2013年由科学出版社出版.2017年,科学出版社和新加坡的世界科技出版公司(World Scientific Publishing Company)联合出版了此书的英文版.

在编写《物理学中的数学方法》的过程中,作者收集和编制了一些习题,附在每一章内容之后.在教学中,作者体会到,解题的一些技巧不一定很容易就能被初学者掌握.因此,编写一本相应的习题解答,对于帮助学习“物理学中的数学方法”课程的学生更好地掌握相关内容,是很有好处的.

作者认为,做习题的目的主要有以下三个方面:第一,通过做一定数量的习题,掌握和巩固在课堂上和课本中学到的内容并加深理解.第二,补充一些课堂上因学时等方面的原因而未讲到的内容,拓展知识范围.第三,有相当一部分学习本课程的学生以后要从事科研或者工程方面的工作,做习题,特别是一些较难的习题,是可以当作科研的实战预演的.本书中的有些习题就是作者根据科研文献上的内容改编而成的.

《物理学中的数学方法》一书中的内容分为10章.本书只涉及该书前8章的内容,分别是变分法、希尔伯特空间、二阶线性常微分方程、贝塞尔函数、狄拉克δ函数、格林函数、范数和积分方程.本书未涉及原教材中第9章和第10章的内容,这是出于两方面的考虑:一是这两章的内容涉及的领域相对狭窄一些,学习的人较少;二是相关习题的解答会占很大的篇幅,将使得习题集过厚.

本书中的习题基本上是上述教材中的.考虑到篇幅的因素,作者删去了一些习题.同时,作者也增加了少许习题作为拓展.对于每一道题,本书尽可能地说明所应用的公式和解题步骤.本书并不是只挑选难做的习题,其中的一部分习题也适合只学过数学物理方法的本科生做.因此,本书兼顾研究生和本科生.

有关物理学中的数学方法的内容是很多的.作者深知,在自己的学识范围内,不能达成面面俱到.不过,作者认为,《物理学中的数学方法》(中、英文版)和

本书三本书已经涵盖了一些常用的内容.若将本书与前述的作者已出版的中英文教材配套,则将更加有利于学生的学习.

本书主要适合非数学类理工科研究生和高年级本科生以及有关的科研和工程人员.

在《物理学中的数学方法》(中、英文版)和本书以及另外两本教材的编写过程中,作者的妻子苗青做出了巨大的贡献.她尽可能地为作者节约了大量的时间,让作者能够在长时间内集中精力做好这些事情及其他科研方面的工作,在此对她表示感谢.感谢中国科学技术大学出版社立项出版这本习题解答.在编写本书时,涉及的有些科研工作得到国家重点研发计划(课题号 2016YFB0700102)的资助,在此表示感谢.书中的内容有错误或者不当之处,恳请读者批评指正.作者的电子邮箱是 wanghuaiyu@mail. tsinghua. edu. cn.

王怀玉

2018 年 5 月

符号与公式的说明

本书中各符号的含义与作者所著的《物理学中的数学方法》(科学出版社，2013)中的符号完全一致.

本书分为习题和解答两部分,每部分各有8章.对于习题部分,各章的习题之前列出一些常用的公式.第1章的公式用(1.1),(1.2),…依次编号,其他各章习题前的公式类似地编号.这便于引用.

每道题内的等式从习题到解答统一用①,②,…编号.若一道题的内容分为若干部分,则用(i),(ii),…顺序编号,该道题内的所有公式统一用①,②,…编号.若一道题分为若干小题,则小题用(a),(b),…依次编号,每一小题内的公式从习题到解答统一用①,②,…编号,表明这些小题之间是相对独立的.

目录

习　题

第1章 变 分 法

若有泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

则泛函(1.1)的增量为

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[y + \delta y] - J[y] \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.2}$$

泛函(1.1)的变分为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

使得泛函(1.1)达到极值的函数 $y(x)$满足欧拉方程:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \tag{1.4}$$

若式(1.1)中的被积函数 F 不依赖于函数y,则式(1.4)有首次积分

$$F_{y'}(x, y') = C_1 \tag{1.5}$$

若式(1.1)中的被积函数 F 不依赖于自变量x,则式(1.4)有首次积分

$$F - y'F_{y'} = C_1 \tag{1.6}$$

如果泛函依赖于两个函数 y 和z:

$$J[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x} F(x, y, y', z, z')\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

那么使得泛函(1.7)取极值的函数 $y(x)$和 $z(x)$满足如下的欧拉方程组:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0, \quad F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 0 \tag{1.8}$$

如果泛函依赖的函数 u 有两个自变量x 和y:

$$J[u] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.9}$$

那么使泛函(1.9)取极值的函数 $u(x, y)$满足如下的欧拉方程:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_p - \frac{\partial}{\partial y}F_q = 0 \quad (p = u_x, q = u_y) \tag{1.10}$$

若有 N 个变量$x_i(i=1,2,\cdots,N)$,M 个函数$y_\alpha(\{x_i\})(\alpha=1,2,\cdots,M)$,泛函就是

$$J[\{y_\alpha(\{x_i\})\}] = \int_R F\left(\{x_i\},\{y_\alpha(\{x_i\})\},\left\{\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i}\right\}\right)\mathrm{d}^N x \tag{1.11}$$

使得泛函(1.11)取极值的多变量多函数的欧拉方程组如下：

$$\frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial(\partial y_\alpha/\partial x_i)} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,M) \tag{1.12}$$

这是包含 M 个方程的方程组.

等周问题：若泛函(1.1)在

$$J_1 = \int_{x_0}^{x} G(x,y,y')\mathrm{d}x = l(\text{常数}) \tag{1.13}$$

的条件下取极值，则这样的问题称为等周问题，式(1.13)称为等周条件. 此时的欧拉方程是

$$H_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y'} = 0, \quad H = F + \lambda G \tag{1.14}$$

测地线问题：若泛函

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',z,z')\mathrm{d}x \tag{1.15}$$

在

$$G(x,y,z) = 0 \tag{1.16}$$

的条件下取极值，则这一问题称为测地线问题. 测地线问题有如下欧拉方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} - [F_y + \lambda(x)G_y] = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} - [F_z + \lambda(x)G_z] = 0\end{cases} \tag{1.17}$$

一般地，如果含有 n 个函数的泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \tag{1.18}$$

要在 m 个约束条件

$$\varphi_k(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,m;m < n) \tag{1.19}$$

下取极值，那么就有如下的欧拉方程组：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'} - \left[F_{y_i} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(x)\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\right] = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.20}$$

如果泛函(1.1)的极值曲线的一端(例如 x_0 端)可以在 $x = x_0$ 的直线上滑动，那么极值曲线在这一端的边界条件是

$$F_{y'}\big|_{x=x_0} = 0 \tag{1.21}$$

式(1.21)称为自然边界条件.

设泛函(1.11)中的被积函数 F 是拉格朗日量 L：

$$L = L(\{x_i\},\{\varphi_\alpha(\{x_i\})\},\{\partial_i\varphi_\alpha(\{x_i\})\}) \tag{1.22}$$

其中$\{x_i\}$表示一组自变量，$\{\varphi_\alpha(\{x_i\})\}$表示一组物理量，$\{\partial_i\varphi_\alpha(\{x_i\})\}$表示物理量对自变量的偏导数，那么可从如下的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_i(\partial_i\varphi_\alpha)} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,M) \tag{1.23}$$

求出物理量满足的微分方程.

对于一个经典力学系统，系统的动能总是可如下表示：

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2} \tag{1.24}$$

此处用 q 表示坐标. 这个 q 可以只表示一维运动的坐标，也可以表示高于一维运动的坐标，此时就有坐标分量. 坐标是时间 t 的函数，q 上加一点和两点分别表示对时间 t 的一次和二次导数. 如果势能 U 给定，那么就可写出拉格朗日量：$L = T - U$. 拉格朗日量是坐标 q 和时间 t 的函数. 已知拉格朗日量，就可由式(1.23)写出运动方程，即坐标随时间变化的函数. 若给定初始时刻和最终时刻的坐标：

$$q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2, \quad t_2 - t_1 = T \tag{1.25}$$

则可定出运动方程中的积分常数. 得到的运动方程就是使得泛函达到极小的极值曲线，用 $q_c(t)$来表示. 再加入拉格朗日量，积分得到作用量：

$$S_c = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_c, \dot{q}_c, t) \tag{1.26}$$

1.1 设 $f(x)$和 $g(x)$是区间 $C_1[a,b]$内的函数，$\eta(x)$是任何属于 $C_3[a,b]$且使 $\eta(a)=0$ 和 $\eta(b)=0$ 的函数. 证明以下两个命题：

(i) 若积分

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)dx = 0 \tag{①}$$

则在此区间上 $f(x)$一定是个常数.

(ii) 若积分

$$\int_a^b [f(x)\eta(x) + g(x)\eta'(x)]dx = 0 \tag{②}$$

则在此区间上必有

$$f(x) = g'(x) \tag{③}$$

1.2 求以下泛函的全增量和变分：

(a) $J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$.

(b) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (x^2 y + y^2 + yy')dx$.

1.3 设两端点固定，求下列泛函的极值曲线：

(a) $J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{y(1 + y')^2}dx$.

(b) $J = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2)\mathrm{d}x$.

(c) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1 + y^2}{y'^2}\mathrm{d}x$.

(d) $J = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y\sin x)\mathrm{d}x$.

(e) $J = \int_{x_0}^{x_1} (12xy + yy' + y'^2)\mathrm{d}x, y(0) = 1, y(1) = 4$.

1.4 求泛函

$$J[y] = \int_1^2 [(x + x^2 + x^3)y' + x^2 y'^2]\mathrm{d}x \quad (y(1) = y(2) = 0) \qquad ①$$

的极值曲线和极值.

1.5 假定在泛函 $J = \int_{x_0}^{x_1} F\mathrm{d}x$ 中,F 对各变元有任意阶连续导数,且 $y(x)$ 及其各阶导数在 $x = x_0$ 和 $x = x_1$ 处的值均给定.求下列泛函的极值曲线所应满足的微分方程:

(i) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y''^2 + x^2)\mathrm{d}x$. ①

(ii) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y'''^2 + 2xy)\mathrm{d}x$. ②

1.6 求下列泛函的极值曲线:

(a) $J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\mathrm{d}x$.

(b) $J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + y'z')\mathrm{d}x$.

1.7 写出下列泛函的欧拉方程:

(a) $J[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(b) $J[u(x, y, z)] = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2uf(x, y, z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(c) $J[u(x, y)] = \iint_D [au_x^2 + bu_y^2 + cu^2 + 2uf(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 a 和 b 为常数,$f(x, y)$是固定的已知函数.

1.8 设在泛函(1.1)中,F 不显含自变量 x 和函数 y,即 $F = F(y')$,那么结果如何?

1.9 设在泛函(1.7)中,F 不显含自变量 x,即 $F = F(y, y', z, z')$,则是否有首次积分?由此将 F 扩展成含有 N 个函数及其一阶导数,但是不显含自变量 x 的 $F = F(\{y_i\}, \{y_i'\})$,关于是否有首次积分的结论又如何?

1.10 泛函

$$J[y]=\iiint\limits_V F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

在条件

$$\iiint\limits_V u^2(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=1$$

下取极值的必要条件是 $u(x,y,z)$满足什么样的方程?

1.11 求下列等周问题的极值曲线:

(a) $J[y]=\int_0^1(y'^2+x^2)\mathrm{d}x(y(0)=0,y(1)=0)$,等周条件:$\int_0^1 y^2\mathrm{d}x=2$.

(b) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y'^2\mathrm{d}x,\int_{x_0}^{x_1}y\mathrm{d}x=a$,$a$ 是常数.

(c)

$$J[y,z]=\int_0^1(y'^2+z'^2-4xz'-4z)\mathrm{d}x\quad(y(0)=z(0)=0,y(1)=z(1)=1)\tag{①}$$

$$\int_0^1(y'^2-xy'-z'^2)\mathrm{d}x=2\tag{②}$$

(提示:含多个函数的泛函的等周问题的解法与只含一个未知函数的情形相同.)

1.12 求圆柱面 $r=R$ 上的短程线.(提示:用柱面坐标 r,φ,z 求解较便利.)

1.13 写出在条件 $\int_0^{x_1}r(x)y^2\mathrm{d}x=1(y(0)=0,y(x_1)=0)$ 下,泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}[p(x)y'^2+q(x)y^2]\mathrm{d}x$ 的极值曲线所应满足的微分方程,其中 $r(x),p(x)$,$q(x)$是三个固定的已知函数.

1.14 (i) 通过平面上某一轴同侧的两定点,连接一条曲线,使此曲线绕轴旋转所成的旋转曲面具有最小侧面积.试把这个问题写成数学表达式,并求出极值曲线的表达式.

(ii) 设这条曲线经过空间某点坐标(x_0,y_0),例如(0,1),画出通过该点的各参量数值的曲线,这些线都相切于一根包络线.

1.15 设函数 $y(x)$的左端固定在原点,即 $y(0)=0$,另一边界点在直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 上滑动.试求泛函 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y^2-y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

1.16 求泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2-yy'+y^2)\mathrm{d}x$ 满足下列边界条件的极值曲线:

(i) $y(x)$过点 $P_1(0,1)$,在 $x=1$ 处满足自然边界条件.

(ii) $y(x)$过点 $P_2(1,2)$,在 $x=0$ 处满足自然边界条件.

(iii) $y(x)$在 $x=0$ 和 $x=1$ 处都满足自然边界条件.

1.17　一个电子在电磁场中做相对论性运动.其运动的拉格朗日量如下：

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-e(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) \qquad ①$$

求粒子遵循的运动方程.

1.18　证明:如果取 ψ 和 ψ^* 作为独立的场变量,且场的拉格朗日密度为

$$L=\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\cdot\nabla\psi^*+U(r,t)\psi\psi^*-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\dot{\psi}\psi^*-\psi\dot{\psi}^*) \qquad ①$$

其中∇为梯度算符,$\dot{\psi}$上的一点表示对时间求偏导,$\dot{\psi}=\frac{\partial\psi}{\partial t}$.将这个拉格朗日密度代入欧拉-拉格朗日方程之后,会导出一个什么方程?

1.19　对于如下给出的各种势能,遵循式(1.23)～式(1.26)的步骤,计算得到作用量.

(a) 自由粒子.

(b) 一维简谐振子,势能是 $U=\frac{m\omega^2q^2}{2}$.

(c) 自由粒子受到一个常力的作用,势能为 $U=-Dq$.

(d) 一维简谐振子受到一个常力的作用,势能为 $U=\frac{m}{2}\omega^2q^2-Dq$.

(e) 有一个垂直于 xy 平面的稳定磁场B,一个带电荷 e 的粒子在xy 平面内运动.运动势能是 $U=\frac{eB}{2}(\dot{x}y-\dot{y}x)$.

1.20　自旋为零的中性粒子,例如中性 π 介子的拉氏密度为

$$L=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-c^2|\nabla\varphi|^2-\frac{\mu^2c^4}{\hbar^2}\varphi^2\right]$$

其中的场量 φ 可能是个复数.因此,确切地写出后,拉氏密度如下：

$$L=\frac{1}{2}[\varphi_t\varphi_t^*-c^2(\varphi_x\varphi_x^*+\varphi_y\varphi_y^*+\varphi_z\varphi_z^*)-\gamma\varphi\varphi^*]\quad\left(\gamma=\frac{\mu^2c^4}{\hbar^2}\right) \qquad ①$$

只考虑自由空间,遵循式(1.23)和式(1.26)的步骤,计算得到作用量.

第 2 章　希尔伯特空间

2.1　证明:距离满足以下不等式:

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z_1) + \rho(z_1,z_2) + \cdots + \rho(z_{n-1},z_n) + \rho(z_n,y)$$

这一不等式的几何意义是:一个多边形的一条边的长度小于等于所有其他边的长度之和.

2.2　证明:每一个收敛点列一定是柯西序列.

2.3　连续函数空间 $C[-1,1]$是不完备的.可以定义一连续函数的序列$\{y_n(t)\}$如下:

$$y_n(t) = \begin{cases} 0 & (-1 \leqslant t \leqslant 0) \\ nt & \left(0 < t < \dfrac{1}{n}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1\right) \end{cases}$$

序列中的每一个元素都是连续函数.对此空间定义一个距离,然后证明:在此距离的定义下,这一序列是个柯西序列,但收敛于一个不连续的函数.

2.4　证明关于内积的不等式:$\sqrt{(x-y,x-y)} \geqslant \left|\sqrt{(x,x)} - \sqrt{(y,y)}\right|$.

2.5　若$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$是 m 维内积空间中的任一正交规一集,对于该空间中的任意向量 x 和 y,证明帕赛瓦尔等式:$(x,y) = \sum_{i=1}^{m}(x,x_i)(x_i,y)$.注意这是在有限维情况下的证明.

2.6　证明:若$(f,f)=0$,则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

2.7　在区间$[0,2\pi]$上,$A=\{1,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx\}$是一线性无关组.定义该空间中两个连续函数 $f_1(x),f_2(x)$ 的内积为$(f_1,f_2) = \int_0^{2\pi} f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$.证明这组基是正交但不规一的.正交规一基组应该写成什么形式?

2.8　在六次多项式空间 $X=P_6[-1,1]$上,$A=\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6\}$是一线性无关组.定义该空间中两个六次多项式 $f_1(x),f_2(x)$ 的内积为$(f_1,f_2) = \int_{-1}^{1} f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$.证明这组基是非正交规一的.请构造正交规一基组.最后得到的正交规一基组是什么多项式?为什么得到的是这一多项式而不是其他多项式?

2.9　证明:三角函数系 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$是定

义在$[-\pi,\pi]$上的正交基组.如果要使它成为正交规一基组,那么各基函数的系数应如何改写?

2.10　勒让德多项式的定义为

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\quad(n=1,2,\cdots) \tag{①}$$

证明:$\{\mathrm{P}_n(x)\}$是区间$[-1,1]$上的正交基组.如果要使它成为正交规一基组,$\mathrm{P}_n(x)$的系数应该写成什么形式?

2.11　证明:如果三个向量 a,b,c 有关系$c=a+b$,并且 a 和b 正交,那么它们的模满足关系$\|c\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2$.

2.12　线性积分算子有一个核函数.这个算子的伴随也有一个核函数.这两个核函数之间是什么关系?

2.13　一个微分算子以及它所作用的函数满足的边界条件如下:

$$Lu(x)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+1\right)u(x)\quad(0<x<1);\quad u(0)-\alpha u(1)=0 \tag{①}$$

求其伴随算子及其所作用的函数满足的边界条件.

2.14　对于算子$L=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+4\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-3$,微分方程是$Lu(x)=0(a<x<b)$,边界条件是$4u(a)+u'(a)=0,4u(b)+u'(b)=0$.求伴随方程$L^\dagger v(x)=0(a<x<b)$的伴随算子的表达式和函数 $v(x)$满足的边界条件.

2.15　微分方程

$$u''(x)=f(x)\quad(0<x<1) \tag{①}$$

只有一个边界条件:

$$u(0)=\gamma \tag{②}$$

请证明其伴随方程有三个边界条件.

2.16　三阶微分算子的一般形式是

$$L=r_3(x)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}+r_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+r_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+r_0(x)$$

写出其形式伴随算子和结函数.若要求此算子是自伴的,条件是什么?

2.17　证明:函数序列

$$f_n(x)=\frac{2\sqrt{n}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}nx\mathrm{e}^{-(nx)^2} \tag{①}$$

对所有 x 逐点收敛于零,即

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0 \tag{②}$$

但不平均收敛于零,即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-0|^2\mathrm{d}x = 1 \neq 0 \tag{③}$$

（此例说明逐点收敛不蕴含平均收敛.）

2.18 证明：一个算子 A 为正规算子，即 $AA^\dagger = A^\dagger A$ 的充要条件是对于任意向量 x，有

$$(Ax, Ax) = (A^\dagger x, A^\dagger x)$$

2.19 (i) 作为非自伴算子的一个简单的例子，我们来看矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

求出它的两个特征值 λ_1 和 λ_2 及对应的两个特征向量 u_1 和 u_2. 它虽然是非自伴的，但是它的特征值都是实数. 再求出它的伴随

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

的两个特征值 μ_1 和 μ_2 及对应的两个特征向量 v_1 和 v_2. 将特征值都从大到小排列. 验证：A 的属于不同特征值的特征向量之间正交，$A^\dagger$ 的特征向量也是如此；当 $m\neq n$ 时，$(u_m, v_n)=0$. 求出使得 $VA^\dagger V^{-1}$ 对角化的矩阵 V.

(ii) 对于 $B=\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，做与(i)小题中同样的事情. 由于矩阵 B 非实数，在非 B 的特征向量以外，可以找出无穷多向量 x，使得 (x, Bx) 非实数. 试举例.

2.20 将贝塞尔完备性关系

$$(f,f) = \sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|(f_i,f)|^2 \tag{①}$$

用于函数 $f+g$ 并随后减去对于 f 和 g 的相应的等式，试用这种方法来证明希尔伯特空间中的帕赛瓦尔关系：

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty}(f,f_i)(f_i,g) \tag{②}$$

（2.5 题证明的是有限维的情况，本题证明的是无限维的情况.）

2.21 在区间[0,1]上构造权函数 $\rho(x)=1$ 的正交多项式，至 $\varphi_3(x)$ 的表达式为止.

2.22 从第一类切比雪夫多项式的定义 $\mathrm{T}_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 出发.

(i) 求特殊点的值：$\mathrm{T}_n(1)$，$\mathrm{T}_n(-1)$，$\mathrm{T}_{2n+1}(0)$，$\mathrm{T}_{2n}(0)$.

(ii) 写出奇偶性关系，即 $\mathrm{T}_n(-x)$ 与 $\mathrm{T}_n(x)$ 的关系.

(iii) 求出 $\mathrm{T}_n(x)$ 的零点的位置.

(iv) 写出第一类切比雪夫多项式在[−1,1]区间上的极值点和在极值点处的值.