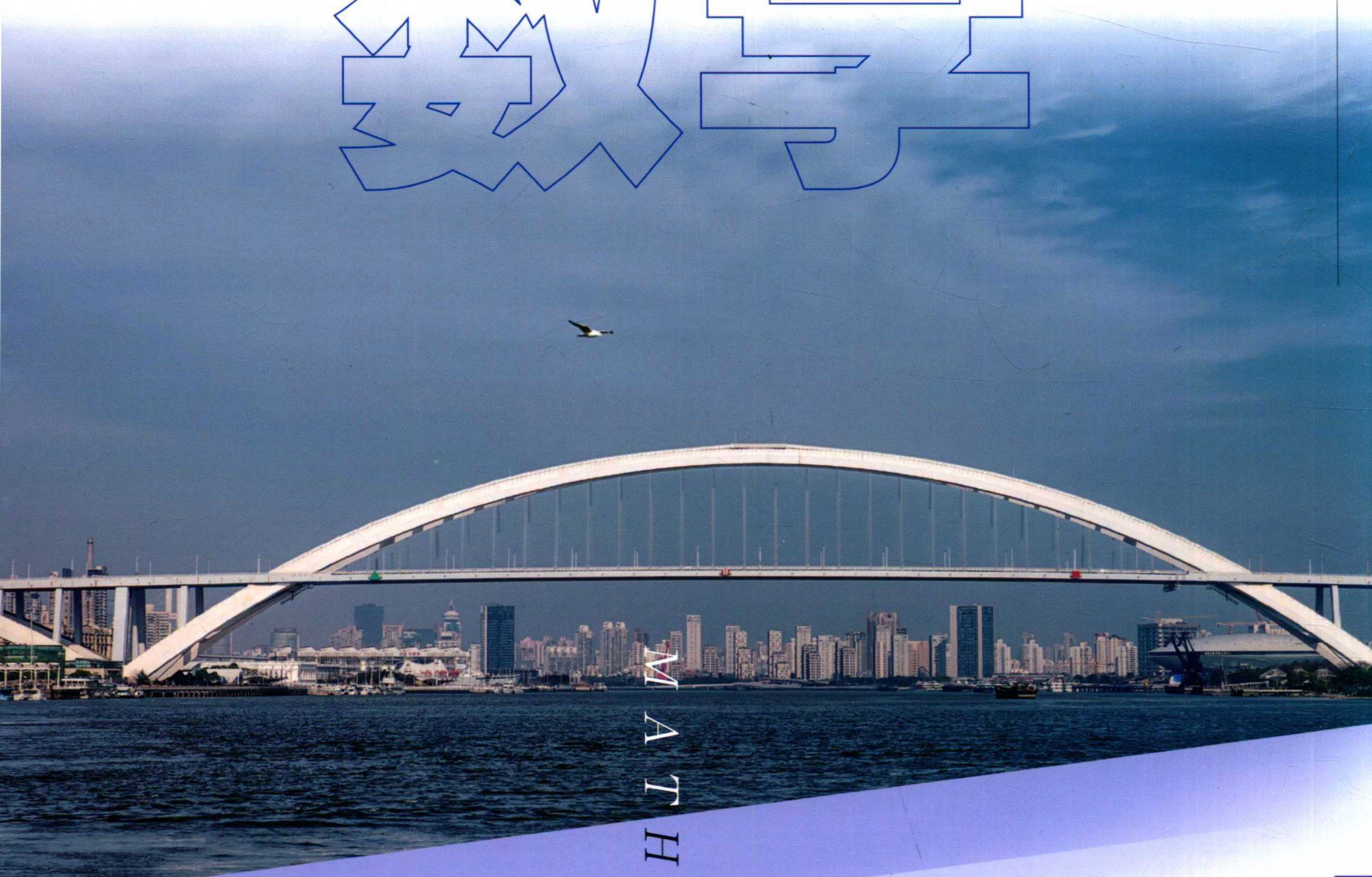
高级中学课本

高中二年级 第一学期

（试用本）

上海教育出版社

数学



MATHEMATICS

高级中学课本

数学

高中二年级第一学期

（试用本）

上海教育出版社

编者的话

本书是高中二年级第一学期的数学课本.在教学过程中,同学们将学习数列、数学归纳法、数列的极限、平面向量的坐标表示、矩阵和行列式初步、算法初步等知识.

如果在一个月中,你每天记录该天的最高温度,可以得到以日期为序的一列数.如果以学号为序记录整个班级每个同学的身高或体重,你可以得到另一列数.有序的一列数就叫做数列.数列是一种常见的数学模型.在本书中,我们要研究其简洁而有效的表示方法,讨论一些常用的特殊数列以及数列的求和等问题.

在小学阶段,同学们学会了自然数和小数的四则运算.在初中阶段,同学们学会了有理数和实数的运算.在这里我们把“数”扩充到有序数对和矩形数表,并学习对有序数对和矩形数表进行运算.

在平面直角坐标系中,平面向量可以用有序数对来表示.矩阵是一个矩形数表,行列式是一个特定算式,向量与矩阵都可以是运算对象.数学符号的进步起着推动数学发展的作用.矩阵、行列式符号的引入将使数学的表达更加简洁和有效.

算法是数学重要的组成部分.把一个数学问题分解成一系列有序的计算步骤,是解决问题的一种思想方法.算法与计算机技术的结合解决了许多复杂数学问题、生产和生活问题.本书10.3节前标注了“*”,表示这一小节暂不作为学生的必学内容,供学校选用.

2007年8月

目　录 CONTENTS

第 7 章　数列与数学归纳法 ………………………… 4

一　数列 ………………………… 5

7.1　数列 ………………………… 5

7.2　等差数列 ………………………… 10

7.3　等比数列 ………………………… 19

阅读材料 ………………………… 27

二　数学归纳法 ………………………… 29

7.4　数学归纳法 ………………………… 29

7.5　数学归纳法的应用 ………………………… 32

7.6　归纳—猜想—论证 ………………………… 34

三　数列的极限 ………………………… 37

7.7　数列的极限 ………………………… 37

7.8　无穷等比数列各项的和 ………………………… 44

阅读材料 ………………………… 49

探究与实践 ………………………… 51

课题一　数列极限在面积计算中的应用 ………………………… 51

本章小结 …………………………………………………… 51

第8章 平面向量的坐标表示 …………………… 54

8.1 向量的坐标表示及其运算 ………………… 55

8.2 向量的数量积 ………………………………… 59

8.3 平面向量的分解定理 ……………………… 65

8.4 向量的应用 ………………………………… 67

探究与实践 ………………………………… 70

课题二 宇航员的训练 ……………………… 70

本章小结 …………………………………………………… 71

第9章 矩阵和行列式初步 ……………………… 72

一 矩阵 ……………………………………………… 73

9.1 矩阵的概念 ………………………………… 73

9.2 矩阵的运算 ………………………………… 76

探究与实践 ………………………………… 83

课题三 平面图形的矩阵变换 ……………… 83

二 行列式 …………………………………………… 88

9.3 二阶行列式 ………………………………… 88

9.4 三阶行列式 ………………………………… 94

本章小结 …………………………………………………… 105

第 10 章 算法初步 …… 108

10.1 算法的概念 …… 109

10.2 程序框图 …… 113

*10.3 计算机语句和算法程序 …… 121

本章小结 …… 136

附 录 …… 137

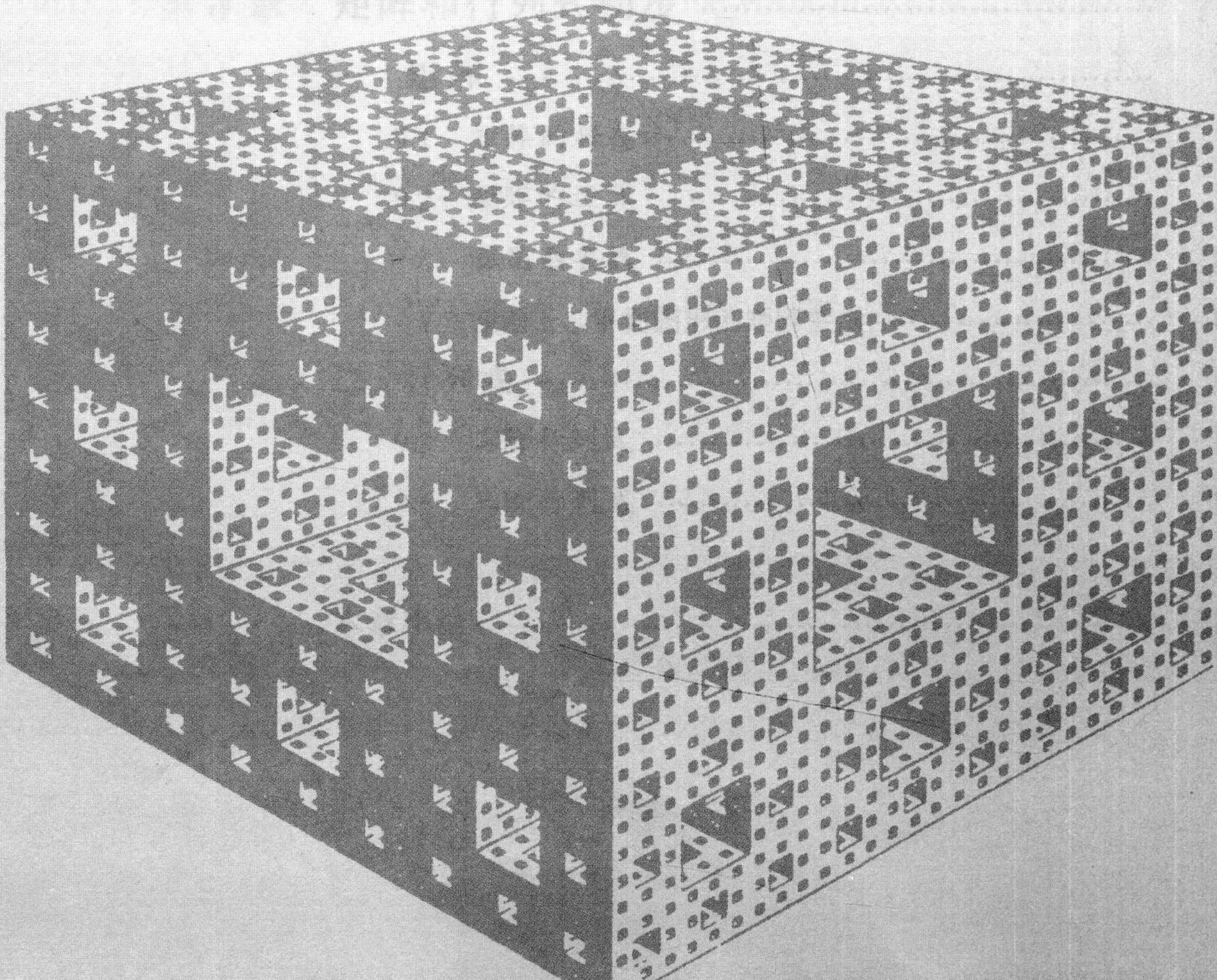
第7章 数列与数学归纳法

Sequences of Numbers and Mathematical Induction

中国古代庄周所著的《庄子·天下篇》中引用过一句话:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”其含义是:一根一尺长的木棒,每天截下其一半,这样的过程可以无限地进行下去.如果把木棒每天的长度记录下来,可得到一列数:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

这种按一定次序排列起来的一列数叫做数列.本章讨论数列的通项公式、递推公式;讨论两类最常用的数列:等差数列和等比数列以及求它们前n项和的问题,并学习数列在解决实际问题中的应用.



一 Sequences of Numbers

7.1 数列

Sequences of Numbers

现实世界中的许多事物，其数量可以排成一列数. 例如，按一定规律堆放在一起的食品罐头(图 7—1)，共堆放 7 层，从上到下各层的罐头数依次排成一列数：

$$3,6,9,12,15,18,21. \qquad ①$$

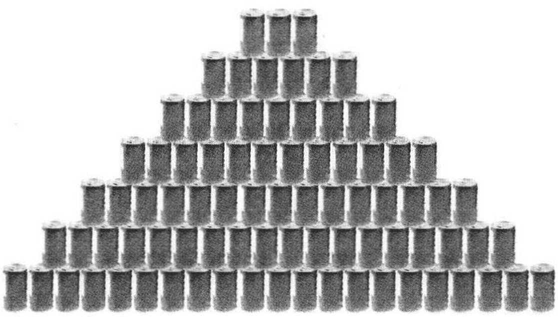


图 7—1

将正整数 1,2,3,4,…的倒数依次排成一列数：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots. \qquad ②$$

将$\sqrt{3}$的不足近似值按小数位数从少到多的次序排成一列数：

$$1,1.7,1.73,1.732,1.732\,0,1.732\,05,\cdots. \qquad ③$$

将−2 的 1 次幂、2 次幂、3 次幂、4 次幂……依次排成一列数：

$$-2,4,-8,16,\cdots. \qquad ④$$

将无穷多个 1 排成一列数：

$$1,1,1,1,1,\cdots. \qquad ⑤$$

1915 年，波兰数学家谢尔宾斯基(W. Sierpinski)创造了一个美妙的“艺术品”，被人们称为谢尔宾斯基三角形(图 7—2). 我们来看图中那些白色三角形的个数，并把它们按面积大小，从大到小依次排列起来，可以得到一列数：

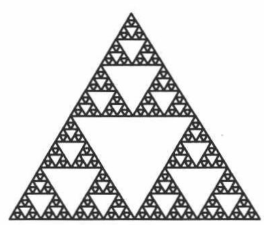


图 7—2

$$1,3,9,27,81,\cdots. \qquad ⑥$$

像这样，按一定顺序排列起来的一列数叫做数列(sequence of number). 数列中的每一个数叫做这个数列的项，数列中的每一项都和项的序数有关，排在第一位的数称为这个数列的第1项(通常也叫做首项)，排在第二位的数称为这个数列的第2项，……，排在第 n 位的数称为这个数列的第 n 项.

数列1,3,5,7,9和数列9,7,5,3,1是同一数列吗？为什么？

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项，n 是 a_n 的序数. 上面的数列可以简单记作 $\{a_n\}$.

项数有限的数列叫做有穷数列(finite sequence)；项数无限的数列叫做无穷数列(infinite sequence). 从第2项起，每一项都大于它的前一项的数列叫做递增数列；从第2项起，每一项都小于它的前一项的数列叫做递减数列；各项相等的数列叫做常数列.

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项的序数 n 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的通项公式(general term).

在数列中，当项的序数 n 确定时，相应的项 a_n 也就确定了. 于是项 a_n 与项的序数 n 之间存在着对应关系，这种对应关系可描述如下：

$$\begin{array}{lccccccc} \text{项的序数} & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & n, & \cdots, \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{项} & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \cdots, & a_n, & \cdots, \end{array}$$

从函数的观点看，数列可以看成以正整数集(或其子集)为定义域的函数 $a_n=f(n)$，当自变量 n 按从小到大的顺序依次取值时，$f(n)$ 所对应的一列数.

如果将数列①中项的序数 n 与其对应的 a_n 用坐标 (n, a_n) 表示，那么它的图像是一列离散的点(图7—3).

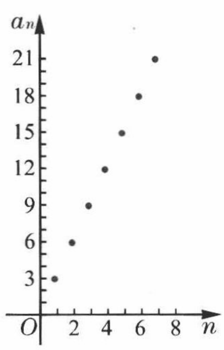


图 7—3

例1 根据下面的通项公式，写出数列的前5项：

(1) $a_n=\dfrac{n-2}{n+1}$；

(2) $a_n=4+4\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$.

解 (1) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$-\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},\frac{2}{5},\frac{1}{2}.$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$1,\frac{25}{4},\frac{37}{16},\frac{337}{64},\frac{781}{256}.$$

例 2 根据图 7—4 中的图形及相应的点数，写出点数的一个通项公式：

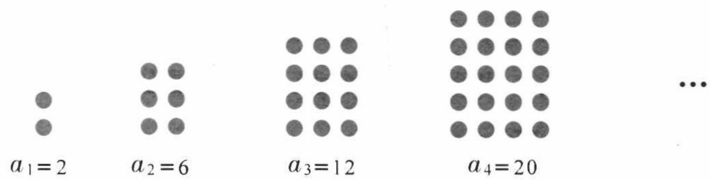


图 7—4

解 如果设第 n 幅图中点数为 a_n，那么由图 7—4 的四幅图可以推得第 n 幅图中共有 $n+1$ 行、n 列的点，点的个数共有 $n(n+1)$ 个.

所以，点数的一个通项公式为 $a_n=n(n+1)$.

根据数列的前若干项归纳得出的通项公式的形式不一定是唯一的. 例如，某一数列的前 6 项为 2，0，2，0，2，0，那么 $(-1)^{n+1}+1$，$2\sin^2\dfrac{n\pi}{2}$，$1-\cos n\pi$ 都可作为这个数列的通项公式.

练习 7.1(1)

1. 根据数列的通项公式填表：

n	1	2	…	5	…		…	n
a_n			…		…	95	…	$2n-3$

2. 根据数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，分别写出下列数列的前 6 项，观察并指出这些数列的特点.

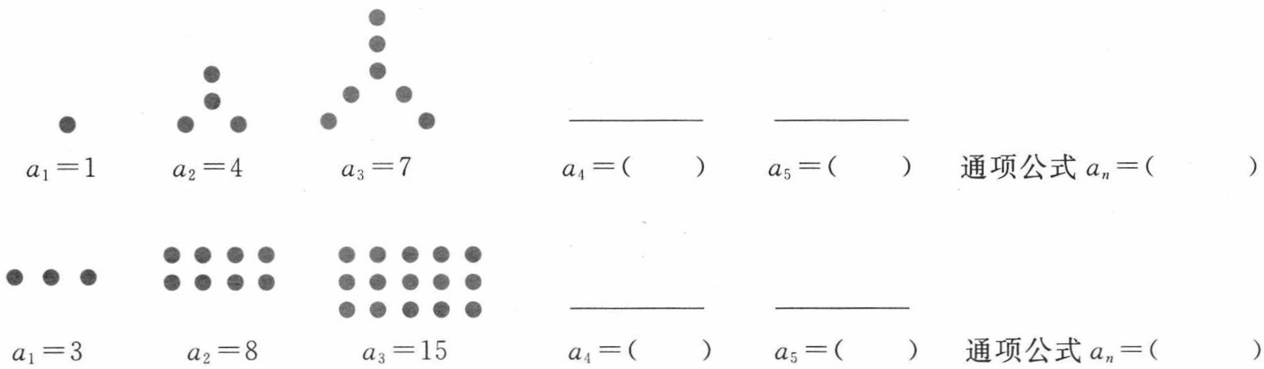
(1) $a_n=\dfrac{3+3\cdot(-1)^n}{2}$； (2) $a_n=\dfrac{\cos n\pi}{2}$.

3. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=(-1)^n(2n-1)$，写出它的前 5 项.

4. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{20}$;　　　　(2) $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16}$.

5. 根据下面的图形及相应的点数，在横线上画适当的图形，并在括号内填写点数和点数的一个通项公式.



（第 5 题）

在数列①中，相邻项之间有如下关系：

$$a_1=3,$$
$$a_2=a_1+3,$$
$$a_3=a_2+3,$$
$$a_4=a_3+3,$$
$$\cdots$$

所以，数列①也可用下面的公式表示：

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}+3 \quad (2\leqslant n\leqslant 7),\\ a_1=3.\end{cases}$$

如果已知数列$\{a_n\}$的任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前几项）间的关系可用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式. 递推公式也是定义数列的一种方法.

一个数列的递推公式有时可能有多种表示形式，比如数列①的递推公式也可以写成

$$\begin{cases}a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1},\\ a_1=3,\end{cases}$$

其中 $2\leqslant n\leqslant 7$.

例 3 根据下列递推公式写出数列的前 4 项：

(1) $\begin{cases}a_n=2a_{n-1}+1 \quad (n\geqslant 2),\\ a_1=1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}a_n=15-a_{n-1} \quad (n\geqslant 2),\\ a_1=100.\end{cases}$

解 (1) $a_1=1$,

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$,

$a_3=2a_2+1=2\times3+1=7$,

$a_4=2a_3+1=2\times7+1=15$.

这个数列的前 4 项依次为 1,3,7,15.

(2) $a_1=100$,

$a_2=15-a_1=15-100=-85$,

$a_3=15-a_2=15-(-85)=100$,

$a_4=15-a_3=15-100=-85$.

这个数列的前 4 项依次为 100,−85,100,−85.

例 4 根据图 7—5 中的框图,建立所打印数列的递推公式,并写出这个数列的前 5 项.

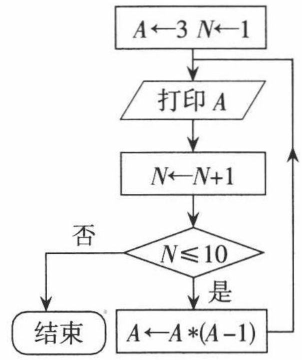


图 7—5

框图中“*”表示乘法,“/”表示除法.

解 由图 7—5 可知,数列的首项为 3,从第二项起数列中的每一项都是前一项与前一项减 1 所得的差之积,即

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}(a_{n-1}-1) \quad (2\leqslant n\leqslant10),\\ a_1=3.\end{cases}$$

利用上述递推公式,计算可得到数列的前 5 项依次为

3,6,30,870,756 030.

练习 7.1(2)

1. 观察下列数列的特点,在括号内填入适当的数,并写出每个数列的一个通项公式:

(1) ( ),4,9,16,25,( ),49;

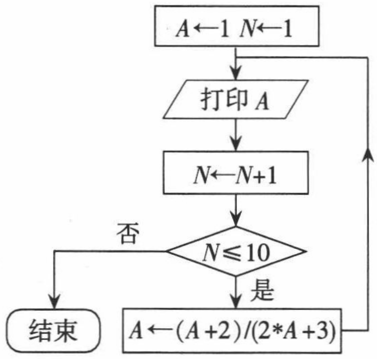
(2) $-1,\frac{1}{2}$,( ),$\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\frac{1}{6}$,( );

(3) $1,\sqrt{2}$,( ),$2,\sqrt{5}$,( ),$\sqrt{7}$.

2. 根据数列$\{a_n\}$的递推公式,写出这个数列的前 4 项:

$$\begin{cases}a_n=3a_{n-1}+2 \ (n\geqslant2),\\ a_1=1.\end{cases}$$

3. 根据下面的框图，建立所打印数列的递推公式，并写出这个数列的前 4 项.



（第 3 题）

7.2 等差数列

Arithmetic Sequences

1. 等差数列及其通项公式

观察下面的数列

$$2,5,8,11,14,17,\cdots, \quad ①$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},-\frac{3}{4},\cdots, \quad ②$$

$$-7,-5,-3,-1,1,3,\cdots. \quad ③$$

可以看到，对于数列①，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于 3；对于数列②，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于$-\frac{1}{4}$；对于数列③，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于 2.

这就是说，这些数列具有一个共同特点：从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列叫做等差数列（arithmetic sequence），这个常数叫做等差数列的公差（common difference）. 公差通常用小写字母 d 表示.

设 a,A,b 是等差数列，由等差数列的定义，可得

$$A-a=b-A,$$

即
$$2A=a+b,$$

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

反过来，如果 $A=\frac{a+b}{2}$，那么

$$2A=a+b,$$

可得
$$A-a=b-A,$$

即 a,A,b 成等差数列.

这时，A 叫做 a 与 b 的等差中项(arithmetic mean).

如果三个数成等差数列，那么等差中项等于另两项的算术平均数.

三个数 a,A,b 组成的等差数列可以看成最简单的等差数列.

一般地，如果等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1，公差是 d，那么根据等差数列的定义得到

$$a_n-a_{n-1}=d \text{ 或 } a_n=a_{n-1}+d(n\geqslant 2).$$

所以 $a_2=a_1+d,$

$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$

$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$

…

由此可以得到

$$\boldsymbol{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

当 $n=1$ 时，上面等式两边均为 a_1，等式也成立，这表明当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时这个等式都成立，因此它就是**等差数列$\{a_n\}$的通项公式.**

这里，$a_n=a_{n-1}+d(n\geqslant 2)$是以 a_1 为首项、以 d 为公差的**等差数列$\{a_n\}$的递推公式.**

例 1 (1) 求等差数列 8,5,2,…的第 20 项.

(2) -401 是不是等差数列$-5,-9,-13,\cdots$的项？如果是，是第几项？

解 (1) 由 $a_1=8,a_2=5$，得该等差数列的公差

$$d=5-8=-3.$$

又 $n=20$，故

$$a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49.$$

(2) 由 $a_1=-5,a_2=-9$,得该等差数列的公差

$$d=-9-(-5)=-4.$$

所以,这个数列的通项公式为

$$a_n=-5-4(n-1).$$

假设 -401 是这个数列中的第 n 项,则

$$-401=-5-4(n-1).$$

解得 $\qquad n=100.$

所以 -401 是这个数列的第 100 项.

例 2 已知某区的绿化覆盖率的统计数据如下表所示(见表 1):

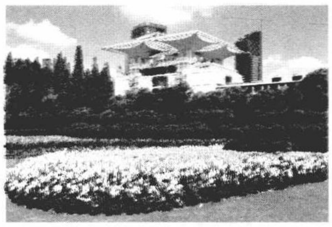


表 1

年份	第 1 年年底	第 2 年年底	第 3 年年底	第 4 年年底
绿化覆盖率(单位:%)	22.2	23.8	25.4	27.0

如果以后的几年继续依此速度发展绿化,那么到第几年年底该区的绿化覆盖率可超过 35.0%?

解 设第 1 年年底,第 2 年年底,……的绿化覆盖率(单位:%)分别为 $a_1,a_2,\cdots$,则 $a_1=22.2$.

经计算,可知

$$a_2-a_1=1.6,$$

$$a_3-a_2=1.6,$$

$$a_4-a_3=1.6.$$

所以按此速度发展绿化,可推得

$$a_n-a_{n-1}=1.6(n\geqslant 2).$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=22.2+(n-1)\cdot 1.6.$$

由题意,得不等式

$$22.2+(n-1)\cdot 1.6>35.0.$$

解得 $\qquad n>9.$

所以,到第 10 年年底该区的绿化覆盖率可以超过 35.0%.

统计资料表明,上海市区 2000 年底、2001 年底的绿化覆盖率分别为 22.2% 和 23.8%,而在 2003 年底市区绿化覆盖率就已超过 35.0%.

练习 7.2(1)

1. 下列数列中成等差数列的是 ( )

(A) 0,1,3,5,7;

(B) $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9}$;

(C) $1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5}$;

(D) $1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-1,-\frac{5}{3}$.

2. 如果命题甲为:$\triangle ABC$ 中有一个内角为 $60°$,命题乙为:$\triangle ABC$ 的三个内角的度数可以构成等差数列,那么命题甲是命题乙的 ( )

(A) 充分非必要条件;

(B) 必要非充分条件;

(C) 充要条件;

(D) 既非充分又非必要条件.

3. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列,如果 $a_1=5,a_2=2$,那么 $a_3=$________.

4. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列,如果 $a_3=18,a_6=27$,那么 $d=$________.

5. 1 与 9 的等差中项 $A=$________.

6. 对大气、水土等生产条件有严格国家认证标准的有机食物越来越受到消费者的青睐.某有机谷物的生产地,今年种植有机谷物的面积为 1 万亩,为适应市场需求,计划每年新增种植面积 3 千亩.如果今年是第 1 年,那么第几年种植面积超过 3 万亩?

例 3 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=4n-3$,判断数列$\{a_n\}$是否是等差数列.如果是,求出这个数列的公差和首项.

解 取数列$\{a_n\}$中的任意相邻两项 a_{n-1} 与 $a_n(n\geqslant 2)$,

$$\begin{aligned}&a_n-a_{n-1}\\&=4n-3-[4(n-1)-3]\\&=4n-3-4n+7\\&=4.\end{aligned}$$

在通项公式中,令 $n=1$,得 $a_1=1$,

所以,数列$\{a_n\}$是以 1 为首项、以 4 为公差的等差数列.

例 4 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=pn+q$,其中p、q为常数,且$p\neq 0$.判断数列$\{a_n\}$是否是等差数列,并证明你的结论.

分析 判断$\{a_n\}$是否是等差数列,可以利用等差数列的定义,也就是看$a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$的值是否是一个与$n$无关的常数.

解 取数列$\{a_n\}$中的任意相邻两项a_{n-1}与$a_n(n\geqslant 2)$,

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=(pn+q)-[p(n-1)+q]\\&=pn+q-(pn-p+q)\\&=p,\end{aligned}$$

其中p是与n无关的常数.

在通项公式中,令$n=1$,得

$$a_1=p+q,$$

所以,$\{a_n\}$是以$p+q$为首项、以p为公差的等差数列.

从例4可以看到,通项公式为

$$a_n=pn+q \qquad (*)$$

的数列$\{a_n\}$是等差数列,其中p、q是常数,p为公差,$p+q$为首项.当$p\neq 0$时,$(*)$式是关于n的一次式,因此从图像上看,表示这个数列的各点均在一次函数$y=px+q$的图像上.

例如,以1为首项、以2为公差的无穷等差数列的通项公式为

$$a_n=2n-1.$$

相应的图像是直线$y=2x-1$上的均匀排列的无穷多个离散点,如图7—6所示.

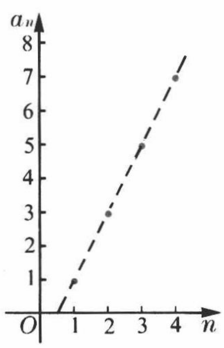


图 7—6

练习 7.2(2)

1. 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1) 如果$a_4=10$,$a_7=19$,那么$d=$__________;

(2) 如果$a_2=2$,$a_5=54$,那么$a_1=$__________;

(3) 如果$a_3=3$,$a_6=9$,$a_n=17$,那么$n=$__________.