JIEXI JIHE JICHU YU YINGYONG

解析几何基础与应用

董改芳　杜玉平◎著

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

解析几何基础与应用

董改芳　杜玉平◎著

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

解析几何基础与应用/董改芳，杜玉平著. --长春：东北师范大学出版社，2018.10

ISBN 978-7-5681-3058-5

Ⅰ.①解… Ⅱ.①董… ②杜…… Ⅲ.①解析几何 Ⅳ.①O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 245276 号

□责任编辑：张志文　□封面设计：马静静
□责任校对：周玉娇　□责任印制：顾　伟

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号(邮政编码：130117)
电话：0431—84568127
网址：http://www.nenup.com
北京亚吉飞数码科技有限公司制版
三河市铭浩彩色印装有限公司印装
北京市昌平区回龙观镇黄平路 19 号院 4 号 207
2019 年 3 月第 1 版　2019 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
幅面尺寸：170 mm×240 mm　印张：13.5　字数：242 千

定价：52.00 元

前　　言

在解析几何创立以前，几何与代数是彼此独立的两个分支.解析几何的建立第一次真正实现了几何方法与代数方法的结合，使形与数统一起来，这是数学发展史上的一次重大突破.作为变量数学发展的第一个决定性步骤，解析几何的建立对于微积分的诞生有着不可估量的作用.

解析几何是数学的重要组成部分，它的特点在于主要突出几何空间的想象、归纳和推理能力.解析几何以坐标和向量为主要工具，使用代数方法来研究几何图形，它开创了数形结合的研究方法.数形结合法是解决解析几何问题的一种重要的数学思想方法.其实质是将抽象的数学语言与直观的图形结合起来，即将代数问题几何化，运用图形的几何性质来解决，或将几何问题代数化，运用代数特征进行运算解决.其方法是以形助数，以数助形，数形渗透，相互作用.其目的是将复杂的问题简单化、隐蔽的问题明朗化、抽象的问题直观化，以便迅速、简捷、合理地解决问题.

本书共分为 5 章.第 1 章为向量代数，主要介绍向量的定义、向量的线性运算以及向量应用等内容，它是解析几何的有力工具，首先在空间引进向量及其运算，然后通过向量来建立坐标系.第 2 章为空间平面和直线，直线与平面分别是空间中最简单的曲线和曲面，本章主要介绍如何建立直线和平面的方程，并研究它们之间的位置关系与度量关系.第 3 章为空间曲面和曲线，主要介绍一些常见的二次曲面及其方程.在直角坐标系下，一方面，根据图形的几何特征去建立它们的方程，并讨论它们的几何性质，包括球面、柱面、锥面和旋转曲面等；另一方面，根据代数方程讨论它们的图像和性质，包括椭球面、双曲面、抛物面等.第 4 章为二次曲线的一般理论，主要介绍二次曲线的几何性质，并利用这些几何性质对二次曲线进行化简和分类.第 5 章为二次曲面的一般理论，主要介绍二次曲面的几何性质，并利用这些几何性质对二次曲面进行化简和分类.为了更好地激发读者对解析几何的兴趣，加深对解析几何的了解，在每章的最后还增加了知识扩展.

本书在撰写过程中以作者在解析几何方面的研究工作为基础,参考并引用了国内外专家学者的研究成果和论述,在此向相关内容的原作者表示诚挚的敬意和谢意.

由于作者水平有限,时间仓促,书中难免存在疏漏,敬请广大读者批评指正.

作　者

2018 年 4 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第1章　向量代数

本章先引入向量的概念及其线性运算，在此基础上建立空间直角坐标系，并利用坐标讨论向量的运算，然后介绍向量在代数与几何方面的应用．

1.1　向量及其线性运算

1.1.1　向量的基本概念

定义 1.1.1　在客观世界中，我们遇到的量可分为两类：一类是仅与数值有关的量，称为数量，例如重量、体积、时间、温度等；另一类是既与数值有关又与其方向有关的量，例如力、速度、加速度、位移等，这些既有大小又有方向的量称为向量(或矢量)．

在数学上，常用一条有向线段表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量，记作$\overrightarrow{AB}$．也可用黑体字母表示向量，例如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 等，如图 1-1-1 所示．

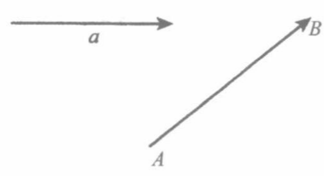

图 1-1-1

在研究实际问题时，我们发现有些向量与起点有关，如力学中的作用力；而有些向量与起点无关，如质点运动的速度．但向量的共性是都有方向和大小．在向量代数中，一般只研究与起点无关的向量，这种向量称为自由向量．遇到与起点有关的向量，可做特殊处理．

定义 1.1.2　向量的大小(也叫长度)称作向量的模．例如，向量$\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}$ 和 $\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\boldsymbol{a}|$ 和 $|\vec{a}|$．

特别地,模为零的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 事实上,零向量的起点和终点重合,其方向是不确定、任意的. 模为 1 的向量称为单位向量,设空间中有一定点 O,那么以 O 为起点的所有单位向量的终点则构成一个以 O 为球心、半径为 1 的球面.

定义 1.1.3 若两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的模相等,并且方向相同,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为相等向量,记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$. 也就是说,两个相等的向量即使起点不同,经过平移也可重合在一起.

定义 1.1.4 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的模相等,方向相反,则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量,记作 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$,显然,也有 $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\beta}$.

1.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 1.1.5 设两个向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta}$,以 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 $OACB$,向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\gamma}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 之和,记为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$$

或

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},$$

而这一运算法则称为向量加法的平行四边形法则,如图 1-1-2 所示.

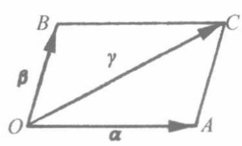

图 1-1-2

另外,也可以三角形法则求两向量的和.

作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$,以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 为起点作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\beta}$,连接 OB,令 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\gamma}$,如图 1-1-3 所示,从而有

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}.$$

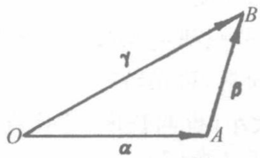

图 1-1-3

根据上述定义容易验证，向量加法满足如下运算规律（$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 为任意向量）：

（1）交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

（2）结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$，如图 1-1-4 所示；

（3）$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

（4）$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

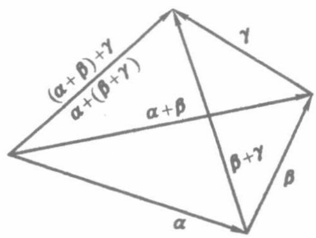

图 1-1-4

由于向量的加法满足交换律和结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 相加可写成 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$，并可用三角形法则通过折线依次画出：使前一向量的终点作为后一向量的起点，先后作出向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，该向量即为所求的和．如图 1-1-5 所示，有 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$.

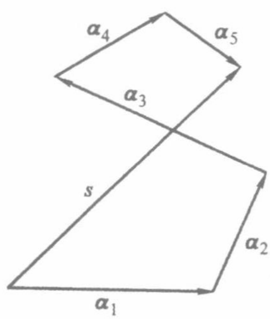

图 1-1-5

2. 向量的减法

根据向量的加法和负向量的概念可定义向量的减法．

定义 1.1.6　规定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差为

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

根据三角形法则，以同一起点分别作向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 是由 $\boldsymbol{\beta}$ 的终点到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的终点的向量，如图 1-1-6 所示．

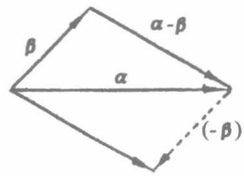

图 1-1-6

特别地，当 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$ 时，有 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

3. 向量与数的乘法

定义 1.1.7 实数 k 和向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 相乘的结果为一个向量，记作 $k\boldsymbol{\alpha}$，称 $k\boldsymbol{\alpha}$ 为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积．它的模 $|k\boldsymbol{\alpha}|$ 等于实数 k 的绝对值与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模的乘积，即 $|k\boldsymbol{\alpha}|=|k|\cdot|\boldsymbol{\alpha}|$；它的方向规定为：当 $k>0$ 时，$k\boldsymbol{\alpha}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向；当 $k<0$ 时，$k\boldsymbol{\alpha}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 反向；当 $k=0$ 时，$k\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量．

易证，向量与数的乘积（简称数乘）满足如下运算性质（$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为任意向量，k,l 为任意实数）：

(1) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(2) 结合律：$k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(3) 分配律：$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

根据向量数乘的定义可知，如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零向量，那么 $\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 为一个与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同方向的单位向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}^{\circ}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}^{\circ}=\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$$

或

$$\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}^{\circ}.$$

向量的加法和数乘统称为向量的线性运算．

4. 向量的共线与共面

定义 1.1.8 方向相同或相反的向量称为共线向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$. 平行于同一平面的向量称为共面向量．

定理 1.1.1 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 共线的充分必要条件为存在不全为零的数 k 和 l，使得 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

证明：必要性：当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，显然结论成立．

当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时，有 $|\boldsymbol{\alpha}|\neq 0$，并且存在 $m\geqslant 0$ 使得

$$|\boldsymbol{\beta}|=m|\boldsymbol{\alpha}|.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 同向时，取 $k=m, l=-1$；当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 反向时，取 $k=m, l=1$ 则都满足 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，这里的 m, l 不全为零．

充分性：若 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，其中 k, l 不全为零．假设 $k\neq 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}=-\frac{l}{k}\boldsymbol{\beta}$，从而可知，$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 或同向或反向，总之向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 共线．

【例 1-1-1】　在三角形 ABC 中，D 为边 BC 的中点，如图 1-1-7 所示，证明 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

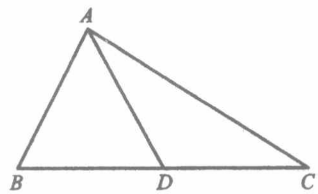

图 1-1-7

证明：如图 1-1-7 所示，有

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD},$$
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD},$$

又 D 为边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{CD}$，将上述两式相加，可得

$$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

即

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

【例 1-1-2】　证明平行四边形的对角线相互平分．

证明：设平行四边形为 $ABCD$，如图 1-1-8 所示，E 为 BD 的中点，连接 AE, EC.

因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED},$$

所以

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EC}.$$

则可知平行四边形的对角线相互平分．

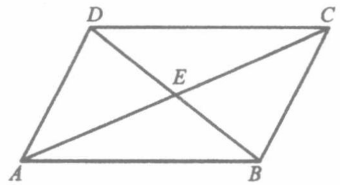

图 1-1-8

1.2 标架与坐标

向量法较为直观,但是向量的运算不如数的运算简捷,为了取长补短,我们给向量引进坐标,同时也给点引进坐标,把向量法与坐标法结合起来使用.

1.2.1 标架、向量和点的坐标

1. 标架及向量的坐标表示

空间中任意三个有次序的不共面的向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 称为空间中的一个基. 对于空间中任一向量 $\boldsymbol{a}$,存在唯一的数组 (x,y,z),使

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3.$$

将有序三元实数组 (x,y,z) 称为 $\boldsymbol{a}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的坐标,记为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

在空间中任意取定一点 O,则任意一点 M 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 有一一对应关系,我们把向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的位置向量(或径矢).

定义 1.2.1 空间中一个点 O 和一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 合在一起称为空间的一个仿射标架或仿射坐标系,简称标架,记为 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$,其中 O 称为标架的原点,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 称为标架的坐标向量. 对于空间中任一点 M,把它的位置向量 $\overrightarrow{OM}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 中的坐标称为点 M 在仿射标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 中的坐标. 若 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$,则点 M 的坐标记为 $M(x,y,z)$.

点 M 在标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 中的坐标为 (x,y,z) 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,$$

将向量 $\boldsymbol{a}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的坐标也称为 $\boldsymbol{a}$ 在仿射标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 中的坐标.

空间中取定一个标架后,空间中全体向量的集合与全体有序三元实数组的集合之间就建立了一一对应关系;通过位置向量,空间中全体点的集合

与全体有序三元实数组的集合之间也建立了一一对应关系．

设 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 为空间的一个标架，过原点 O 且分别以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为方向的有向直线分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，统称为坐标轴．由每两条坐标轴决定的平面称为坐标平面，它们分别是 xOy，yOz，zOx 平面．坐标平面把空间分成八个部分，称为八个卦限，如图 1-2-1 所示，在每个卦限内，点的坐标的符号不变．

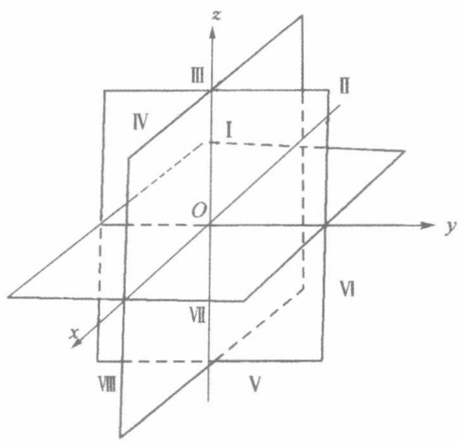

图 1-2-1

将右手四指（拇指除外）从 x 轴方向弯向 y 轴方向（转角小于 π），如果拇指所指的方向与 z 轴方向在 xOy 平面同侧，则称此坐标系为右手系，否则称为左手系，如图 1-2-2 所示．

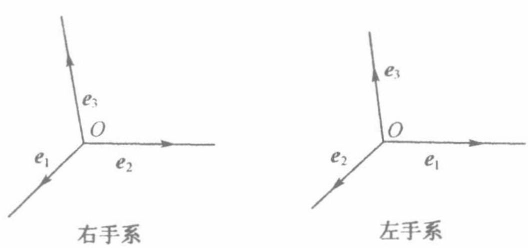

图 1-2-2

各卦限内点的坐标符号见表 1-2-1.

表 1-2-1　卦限内点的坐标

坐标＼卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是两两垂直的单位向量,则 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 称为直角标架或直角坐标系．如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是两两垂直的向量,则 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 称为笛卡儿标架．

直角标架是特殊的仿射标架,点(或向量)在直角标架中的坐标称为它的直角坐标,在仿射标架中的坐标称为它的仿射坐标．

2. 向量的分解

在仿射标架下,任给向量 $\boldsymbol{r}$,有对应点 M,使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK$-$OPNQ$,如图 1-2-3 所示,有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式,$x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量．

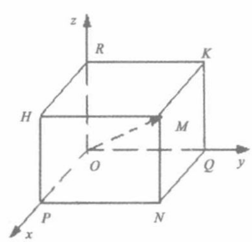

图 1-2-3

显然,在仿射标架下,给定向量 $\boldsymbol{r}$,就确定了点 M,即 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ 三个分向量,进而确定了 x,y,z 三个有序数;反之,给定三个有序数 x,y,z 后,也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M,于是点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x,y,z 之间有一一对应关系:

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z).$$

据此，定义有序数 x,y,z 为向量 $\boldsymbol{r}$（在坐标系 $O\text{-}xyz$ 中）的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；定义有序数 x,y,z 为点 M（在坐标系 $O\text{-}xyz$ 中）的坐标，记作 $M(x,y,z)$.

1.2.2　用坐标做向量的线性运算

取定标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则有：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；

(3) 对于任意实数 λ，有 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$.

定理 1.2.1　向量的坐标等于其终点坐标减去其始点坐标.

证明：对于向量 $\overrightarrow{AB}$，设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2).$$

因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

在仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 中，非零向量 $\boldsymbol{a}(a_1,a_2,a_3)$ 与 $\boldsymbol{b}(b_1,b_2,b_3)$ 共线的充要条件是对应坐标成比例，即

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

推论 1.2.1　在仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 中，非零向量 $\boldsymbol{a}(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}(c_1,c_2,c_3)$ 共线的充要条件为

$$\frac{b_1-a_1}{c_1-a_1}=\frac{b_2-a_2}{c_2-a_2}=\frac{b_3-a_3}{c_3-a_3}.$$

设 $P_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2,3$，推导三点 P_i 共线的充要条件.

对于线段 $P_1P_2(P_1\neq P_2)$，如果点 P 满足 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则称点 P 分线段 P_1P_2 成定比 λ，当 $\lambda>0$ 时，$\overrightarrow{P_1P}$ 与 $\overrightarrow{PP_2}$ 同向，点 P 在线段 P_1P_2 内，称 P 为线段 P_1P_2 的内分点；当 $\lambda<0$ 时，$\overrightarrow{P_1P}$ 与 $\overrightarrow{PP_2}$ 反向，点 P 在线段 P_1P_2 外，称 P 为线段 P_1P_2 的外分点；当 $\lambda=0$ 时，P 与 P_1 重合．假设 $\lambda=-1$，则 $\overrightarrow{P_1P}=-\overrightarrow{PP_2}$，即 $\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{0}$，这与 $P_1\neq P_2$ 矛盾，所以 $\lambda\neq-1$.

设 $P_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2$，则分线段 P_1P_2 成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$ 的分点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

因此，线段 P_1P_2 的中点坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

【例 1-2-1】 用坐标法证明四面体对棱中点的连线交于一点.

证明: 如图 1-2-4 所示,设四面体 $ABCD$ 的棱 AB,AC,AD,BC,CD,DB 的中点分别为 B',C',D',E,F,G.

取仿射标架 $\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$,则各点的坐标分别为

$$A(0,0,0),B(1,0,0),C(0,1,0),D(0,0,1),$$

$$B'\left(\frac{1}{2},0,0\right),C'\left(0,\frac{1}{2},0\right),D'\left(0,0,\frac{1}{2}\right),$$

$$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),F\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),G\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).$$

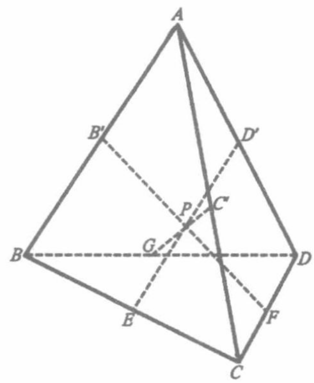

图 1-2-4

假设 $B'F$ 与 $D'E$ 交于点 $P(x,y,z)$,设$\overrightarrow{B'P}=k\,\overrightarrow{PF},\overrightarrow{D'P}=l\,\overrightarrow{PE}$,则 P 的坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{\frac{1}{2}+k\cdot 0}{1+k},y=\dfrac{0+k\cdot\frac{1}{2}}{1+k},z=\dfrac{0+k\cdot\frac{1}{2}}{1+k}, \\ x=\dfrac{0+l\cdot\frac{1}{2}}{1+l},y=\dfrac{0+l\cdot\frac{1}{2}}{1+l},z=\dfrac{\frac{1}{2}+l\cdot 0}{1+l}. \end{cases}$$

解得 $k=l=1$,从而交点 P 存在,且 P 的坐标为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

设 $B'F$ 与 $C'G$ 交于 P',同理可得 $P'\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$,所以 P 与 P' 重合,即 $B'F,D'E,C'G$ 交于一点.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com